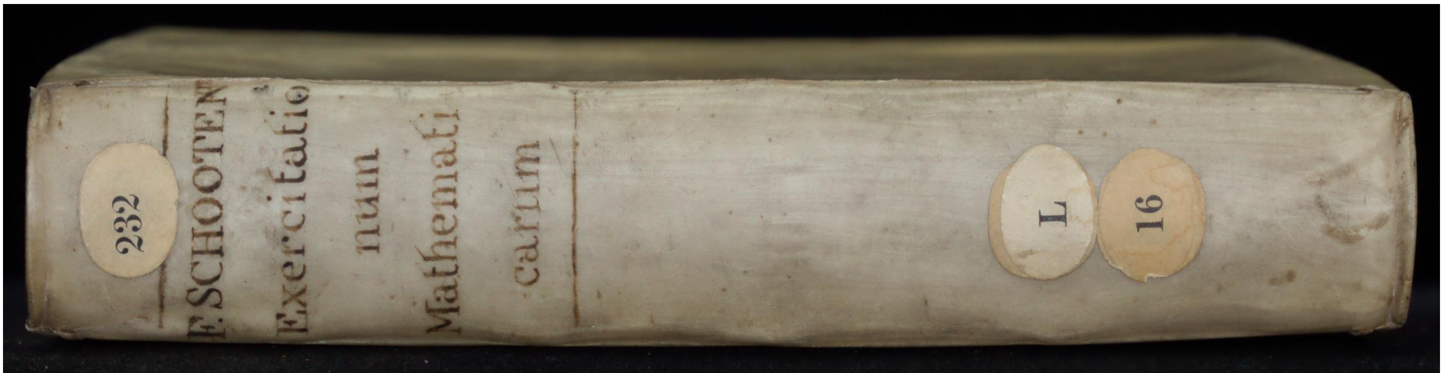
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

[illegible] B

238

C 19.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

KW 232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONVM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.

II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.

III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.

IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.

V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheſeos-Profeſſoris,

EXERCITATIONVM MATHEMATICARUM

LIBER PRIMUS.

CONTINENS

PROPOSITIONUM ARITHMETICARVM ET GEOMETRICARVM CENTURIAM.



LVGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,

Academiæ Typographi.

cIↄ Iↄc LVII.

KONINKL. BIBLIOTHEEK TE 'SHAGE.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nobiliſſimis, Potentiſſimiſq; Dominis,

D. D. PRÆSIDI ac SENATORIBUS CURIÆ HOLLANDIÆ, ZEELANDIÆ, & WEST-FRISIÆ,

Studiorum Mathematicorum Patronis, ſummè colendis.

Nobiliſſimi, Potentiſſimique Domini

CUM inter res cunctas, quas univerſi hujus autor Deus, pro immenſa ſua tum ſapientia tum bonitate, in terris produxit, nil mente humanâ, inveniatur præſtabilius, dolendum meritò eſt divino hoc munere, per quod conditoris noſtri gerimus imaginem, nos adeò frequenter & tam turpiter abuti. Etenim, quoties, voluptati praviſque affectibus ſerviendo, inſuper habito rectæ rationis ductu, meliorem noſtri partem negligimus, toties, originis noſtræ immemores, à recto tramite miſerè admodum aberramus. Ne itaque pecudum ritu vitam tranſigamus, cum quibus corpus ejuſque motus habemus commu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

nes, ſolâ mente ab iiſdem diſtincti, omni ope enitendum eſt, ut, relictis ſenſuum corporiſque illecebris, hanc, quâ excellimus, præcipuè excolamus divinæ auræ particulam, & eam veritatis indagationi, à cujus cognitione omnis ejus dependet perfectio, continuè aſſuefaciamus.

Inter omnes autem mentis exercitationes, quæ huc conducere poſſunt, nullæ æquè utiles reperiuntur ac Mathematicæ; quæ ſicut cæteras certitudinis evidentiâ antecellunt, ita apud eruditos & quoſlibet ingenio præſtantes viros ſummam adeptæ ſunt dignitatem. Enimverò cum ſenſuum ſuffragium, quod ſæpiſſime nos fallit, in exercitationibus hiſce nullam mereatur fidem, ſed mens ſola circa illas verſetur: fit ut eadem exercitatione hâc ſimile quid acquirat quod corpus multifariâ membrorum agitatione; promptitudinem ſcilicet in exequendis iis, in quibus ſe exercuit. Adeò ut mens hâc ratione accommodata planè aptáque reddatur ad verè ac ſolidè judicandum, & res quaſlibet, non tantùm in Mathematicis, ſed etiam Philoſophicis quibuſvis, ut & in civili vita, cum certitudine inquirendas & perſpiciendas.

Quapropter cum ex omnibus Mathematicis Exercitationibus, quæ præcipuè huc ſpectant atque cenſentur utiles, nullæ ita puræ deprehendantur, quàm quæ Arithmeticæ & Geometriæ ſubjiciuntur, indeque Matheſis puræ nomine veniant, jure meritoque Arithmetica & Geometria ante reliquas omnes Mathematicæ ſcientiæ partes, quæ ſanè complures ſunt, addiſcuntur, ipſiſque primus inter illas locus aſſignatur. Quibus dum reliquæ ceu fulcimentis innituntur,

accidit

accidit ut mens humana iiſdem imbuta, velut per gradus quoſdam à minorum conſideratione ad majorum, à naturalium ad divinorum, & à corruptibilium ad æternorum manuducatur cognitionem. Harum beneficio mens noſtra, ut divinus teſtatur Plato, humo tollitur & tanquam binis alis in cœlum ſubvehitur; adeoq́ue à terrenis hiſce atque caducis omnibus abducitur ad cœleſtium contemplationem. Vnde diſcit, aſſueſcitq́ue ſupra ſortem ſuam ac conditionem ſe erigere, veritati fidem habere, & Deum Opt. Max. cunctarum rerum creatorem, ex immenſis ac infinitis ejus operibus hâc viâ rectè cognoſcere, atque ad eum ſolùm, ſi Sacrarum Literarum ſtudium jungas, quibus ſolis ſalutis noſtræ comprehenditur ratio, omnem laudem, omnemq́ue gratitudinem ac reverentiam referre.

Hæ binæ artes ſeu ſcientiæ, cum per ſe ſubſiſtant nec aliarum egeant demonſtratione auxilióve, utpote quæ contra ex illis ſuam nanciſcuntur firmitudinem, meritò à Philone reliquarum artium omnium Metropolis, & Philoſophiæ Anſæ à Xenocrate appellatæ ſunt. Quinimò, ſi pro rei dignitate loqui velimus, non ineptè Scientiarum Ianua ac Myſteriorum Reſeratio dici poſſunt: quippe quæ, theſauros ſuos aperientes, reſolvunt, pandunt, atque manifeſtant quicquid ante menti obſcurum occultumq́ue videbatur. Hæc igitur fuit cauſa, cur Veteres, ut ſtudiis ſuis optimè conſulerent, & tyrones recti firmiq́ue judicii capaces redderent, eas ante omnia didicerint atque docuerint, ipſæq́ue inde artes ſeu ſcientiæ Mathemata, id eſt, Diſciplinæ dictæ fuerint. Hoc autem

vel

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

vel inde liquet, quòd Plato, cujus temporibus hæ maximè floruêre, illas Viam ad Eruditionem Compendiariam, unicumque tramitem, quo quis rectâ ad perfectam rerum omnium cognitionem pervenire poteſt, vocaverit. Vnde etiam eos, qui in Arithmetica jam verſati erant, ad diſcendas inveſtigandaſque artes quaſlibet aptos ſolerteſque pronunciavit, & Geometriæ ignaros è Schola ſua eliminavit. Imò eouſque Geometriam extulit, ut vel ipſam à Deo ſemper exerceri, ejuſdémve interventu cuncta dirigi dicere ſolitus fuerit. Hoc utique indicare volens, eum, qui à teneris in Diſciplinis hiſce ſe exercuerit, Deo quaſi aſſimilari, ipſiuſque ingenium formari ad verè ac infallibiliter de re qualibet judicandum. Quod ipſum in diſcendis aliis artibus ac ſcientiis apprimè utile eſt ad veritatem, quæ cujuſque ſcientiæ finis eſt, ab ejus contrario diſcernendam; atque ad dubitationem omnem, præjudicium, & temeritatem evitandam. Cui ſententiæ adſtipulatur etiam Athenæus, exiſtimans unumquemque per diſciplinas haſce perfici, modò jam inde à puero vitam ad virtutes componere ſtudeat: quandoquidem ipſæ, dum minimè exiſtunt contentioſæ, ſedatos quoque animos gignunt; atque hoc item præ cæteris omnibus diſciplinis ſibi vendicant, quòd nullo fuco aut verborum lenocinio, quibus aliquis facilè ſeduci poteſt, ornari ſe patiantur; ſed contentæ ſint ſimpliciter doceri, & ſuos amatores ſummâ animi tranquillitate ac jucunditate perfuſos dimittere.

Præter verò tot tantaſque harum diſciplinarum utilitates, eſt etiam, Nobiliſſimi atque Potentiſſimi Viri, *quod*

Vos

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Vos ſpeciatim concernit, quippe qui earum uſum in componendis litibus, in decidendis cauſis, in defendendo jure tuendiſque legibus, & in injuria vindicanda aſſiduè deprehenditis. Quin etiam experientiâ edocti eſtis, Arithmeticam eſſe quæ expendit ac recipit, quæ emit ac vendit, nec ſine eâ ulla hominum negotia expediri, eorumque controverſias dirimi poſſe. Idem locum obtinet in Geometria, quâ figuræ quælibet agrorum, ſaltuum, ſtagnorum, paludum, prædiorum, ac fundorum menſurantur, delineantur, dividuntur, illorumque damnum & jactura æſtimantur atque compenſantur; adeò ut ejuſdem beneficio diſſidia quævis menſurationis & diviſionis componantur, falſi limites indicentur, verique reſtituantur, injuriæ obviam eatur, confuſio evitetur, paxque inter diſſidentes concilietur. E quibus omnibus, dum nihil ſine Arithmetica & Geometrica proportione perficitur, atque hæc præmia & pœnas ratione perſonarum ac dignitatum diſtribuat; illa autem circa permutationes verſetur, liquidò conſtat, quanta ſit cum Arithmeticæ tum Geometriæ neceſſitas in quotidiana hominum converſatione, ac præſertim in cauſis forenſibus, & quam ob cauſam Iuſtitia in commutativam & diſtributivam apud Iuriſconſultos diviſa fuerit. His adde, quòd abſque illarum adminiculo plurimæ Romanæ Leges, de hæreditatum diviſione, agrorum accremento, fluviorum curſus mutatione, partiendis fructibus aliorum fundorum, ſimilibuſque rebus agentes, quarum in jure civili ſæpe mentio fit, non rectè intelligi queant; at verò in ſtatuendis pretiis, in computandis debitis, in æſtimanda noxa eaque

reſtituenda, in perpendendis delictis, ac ferè omnibus, quæ inter mortales quotidie accidunt, ſemper habendam eſſe rationem temporis & loci, quando ac ubi, ut & quanti aliquid ſit venditum, locatum, permutatum, tranſactum, oppignoratum atque redemptum; nec non quâ conditione hæc emptio, locatio, permutatio, tranſactio, oppignoratio juxta & redemptio facta ſit. Quæ omnia luculenter ſatis oſtendunt, binas haſce artes in edito judicii loco ac ipſo Tribunali conſediſſe, atque à Themide deſtinatas ad quodvis Juſtitiæ pondus æquæ lancis examine expendendum, & unicuique ſuum adjudicandum.

Quocirca cum per eas, uti dictum eſt, reliquæ omnes ſcientiæ ac artes faciliùs rectiùſque addiſcantur, atque ipſæ unicum vinculum ſint, quo ſubſiſtant, & in omnibus porrò commerciis, negotiationibus, ut & opificiis ritè dirigendis tam multas præbeant commoditates; haud immeritò creditur, nullam bene conſtitutam Rempublicam ſine iis conſiſtere poſſe, ſed earum exercitio bene ac fœliciter geri, ſimúlque ſcientias omnes, bonas artes, & opificia quævis in ea quàm maximè florere. Teſtis eſt ſagax atque prudens harum provinciarum regimen, ubi hæ diſciplinæ, ut uſui publico inſerviant, magno ipſarum commodo, publicè atque vernaculâ linguâ docentur. Vbi etiam Vos, Nobiliſſimi, Potentiſſimiq; Viri, *quò prædictæ artes, Arithmetica nempe & Geometria in dignitate ſua conſerventur, ſuaque evidentia ac certitudine quotidie exerceantur, & in omni negotio atque adminiſtratione ſacra ſint anchora & amuſſis, optimâ ratione judicatis*

dicatis Geodætarum ſolertiam in ſupputando, menſurando, dividendo, aliiſque eò ſpectantibus, priuſquam munus ſuum obire poſſint, juſto examini eſſe ſubjiciendam, neque alium admittitis, quàm qui certa earundem artium ediderit ſpecimina, ſuaque infallibili demonſtratione noverit confirmare.

Vnde conſideratâ ſingulari hac veſtrâ curâ, non abs re fore judicavi, ſi Exercitationes haſce Arithmeticas pariter atque Geometricas ſacras Vobis facerem. In quibus variæ, jucundæ, quotidiéque occurrentes quæſtiones ſive propoſitiones pertractantur: docentes, quo pacto plures calculi, ad quos abſolvendos quilibet hactenus ſpecialibus regulis, ſine ullâ earum cauſæ aut ortus cognitione uſus eſt, per vulgares regulas, unicuique fermè cognitas, expediri poſſint; ut & quibus modis plures dimenſiones atque diviſiones, quæ ante tædioſo ac prolixo calculo perficiebantur, per multò expeditiorem artificiosè præſtentur; ac denique quâ viâ plures incognitæ vel quæſitæ lineæ breviter ſeu compendiosè inveniantur. Idque tam ad tyronum introductionem & exercitationem, quàm ad eoſdem harúmque artium ſtudioſos, quò ad altiora contendant, cum invitandos tum excitandos.

Quibus omnibus bene perſpectis, futurum confido, Nobiliſſimi Potentiſſimiq; Domini, *ut hunc meum laborem, qui veſtris dignitatibus ſingulari obſervantiâ à me offertur ac conſecratur, æquo benevoloque animo ſitis accepturi, & veſtram in clientelam lubentes admiſſuri. Præ-*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſertim cum hæ exercitationes chariſſimæ meæ patriæ bono in publicam lucem proferantur, earúmque etiam fructus in Juſtitia adminiſtranda ad Vos redundare poſſit. Finiam itaque, D. O. M. precibus humillimis obſecrans, ut veſtra conſilia omnia proſperè evenire faciat ad Reïpublicæ noſtræ ſalutem, Voſque quàm diutiſſimè ſervet incolumes.

Nobiliſſimi, Potentiſſimiq; Domini

Veſter devotiſſimus cliens

Lugd. Bat. Idibus Septemb. Anno cIↄ Iↄc LVI.

FR. à SCHOOTEN.

EXER-

EXERCITATIONES MATHEMATICÆ, AC PRIMUM DE ARITHMETICIS PROPOSITIONIBVS.

I.

Quatuor perſonæ conducunt currum, quo vehantur Leydâ Amſtelodamum, 9 florenis, & 10 ſtufris, hâc conditione, ut, ſi in via adhuc alii advenerint, id in ipſarum cedat emolumentum. Jam poſtquam Aelſmeriam pervenerunt, tribus Amſtelodamo milliaribus, contingit adhuc duas aſcendere, promittentes ſe pro ratione aliarum ſoluturas. Quæritur, quantum ſingulæ tum priorum tum poſteriorum ſolvere debeant, ſi Leyda diſtet Amſtelodamo 8 milliaribus?

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Operatio fiat, ut ſequitur.

perſ. milliar.

4—8 | 32   9 flor. 10 ſtufr.   ſtufri ſolvendi
2—3 | 6   20
38 — 190 ſtufr. — { 32 / 6 } fit { 160 à 4 primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufros, pro ſingulis
30 à 2 reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufros, pro ſingulis. }

Vel ſic:

Quoniam ſingulæ priorum pro ratione duarum reliquarum ſolvere debent, ut 8 ad 3 (pro ratione nempe milliarium, quæ profectæ ſunt) & priores duplæ ſint poſteriorum, ſequitur rationem pecuniæ 4 priorum ad pecuniam 2^{rum} poſteriorum eſſe compoſitam ex ratione 8 ad 3, & ex ratione 2 ad 1. Unde tota ſumma 9 fl. 10 ſt. dividenda eſt in duas partes, quæ inter ſe ſint ut 16 ad 3. Omnino ut ſequens indicat calculus.

8—3   ſtufri ſolvendi
2—1
16—3   9 fl. 10 ſtufr. { 16 / 3 } fit { 160 à 4^{or} primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufr. pro ſingulis
3   20
19 — 190 ſtufr. — 30 à 2^{bus} reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufr. pro ſingulis. }
ut ſupra.

II.

Si 27 ulnæ Amſtelodami valent 16 ulnas Lugduni, & 3 ulnæ Lugdunenſes valent 5 ulnas Antverpienſes, & 4 ulnæ Antverpienſes ſint æquales 5 ulnis Colonienſibus: invenire quot ulnæ Amſtelodamenſes contineantur in 200 ulnis Colonienſibus.

Inſpi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Inſpiciatur ſequens operatio.

27—16
3— 5   z   facit
4— 5   64800 { 162, ulnæ Amſtelodamenſes continentur
200   400 { in 200 ulnis Colonienſibus.

64800—400

III.

Cùm 7 ℔ ſacchari valent 2 ℔ gariophillorum, & 3 ℔ garioph. tanti conſtant quanti 13 ℔ piperis, & 1 ℔ pip. conſtet 12 ſtufris: Invenire quanti conſtet ciſta ſacchari pendens 476 ℔.

7— 2
3—13   facit
1—12   148512 { 7072 ſtufris, vel 353 flor. & 12 ſtufr.
476   21 {

21—148512

IV.

Duo ſtudioſi proficiſcuntur in Italiam, quorum unus 7 diebus priùs diſcedit altero, conficiens ſingulis diebus 9 milliaria: Quæritur, ſi alter quotidie emetiatur 12 milliaria, quanto temporis ſpatio primum ſit aſſequuturus?

Vide ſequentem operationem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Prior præcedit 7 diebus
Conficiens quotidie 9 milliaria
Præceſſit ergo prior 63 milliaribus.
Ex 12 milliaribus, quæ poſterior quotidie eſt emenſus
Subtr. 9 milliaria, à priore confecta
Reſtant 3 milliaria, quæ à poſteriore quotidie conficiuntur ultra milliaria prioris.

Fiat itaque

milliar.	Diem	milliar.	
3 ——	1 ——	63	facit 21 diebus.

Examen

Mult. 21 dies, quibus 2^{dus} eſt profectus
per 12 milliaria
42
21
Et fiunt 252 milliaria, à 2do confecta.

Ad 21 dies, quibus 2^{dus} eſt profectus
adde 7 dies, quibus 1^{mus} præceſſit,
fiunt 28 dies, quibus 1^{mus} eſt profectus
per 9 milliaria
fiuntque 252 milliaria, à 1mo confecta, cùm 2^{dus} eum aſſecutus eſt.

V.

Inſula in ambitu eſt 36 milliarium. Si jam eodem tempore, & ex eodem loco duo proficiſcuntur tabellarii, invicem ſequentes, quorum unus quotidie conficit 9, & alter 7 milliaria: Invenire, quanto temporis ſpatio iterum ſint conventuri, ut & quot milliaria & ambitus uterque abſolverit.

milliaria
Subt. { 9
7
	Die	milliaria	
2 ——	1 ——	36	facit 18 diebus.

Mult. 18 dies
per 9 mill.
fiunt 162 mill. quæ prior confecit

Multipl. 18 dies
per 7 mill.
fiunt 126 mill. quæ poſterior confecit;

(18
divid. 162 { $4\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { prior abſolvit.

(18
divid. 126 { $3\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { poſterior abſolvit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

VI.

Si Nurenberga diſtet Româ 140 milliaribus, & eodem tempore ex utraque urbe decedat tabellarius, quorum unus quotidie abſolvit 8, & alter 6 milliaria. Quæritur, intra quot dies ſibi invicem obviam ſint venturi, ut & quot milliaria quiſque confecerit?

Fiat ut ſequitur.

mill.
Add. { 8 à primo quotidie confecta
6 à 2do quotidie confecta

ſumma 14 milliaria, quæ uterque ſimul quotidie conficiunt
Tum fiat
mill. diem mill. dies
14 —— 1 —— 140 | facit 10, intra quos ſibi mutuò occurrent.

Mult. 10 dies
per 8 mill.
fiunt 80 mill. quæ prior abſolvit

Mult. 10 dies
per 6 mill.
fiunt 60 mill. quæ poſterior abſolvit.

VII.

Duæ civitates diſtant à ſe invicem 100 milliaria. Jam ex utraque eodem tempore decedit tabellarius, quorum unus quotidie $2\frac{1}{2}$ milliaria plus conficit quam alter. Quæritur, ſi poſt 8 dies ſibi mutuò obviam veniant, quot milliaria uterque perfecerit?

Dies milliaria Dies milliaria
1 —— $2\frac{1}{2}$ —— 8 | facit 20, unus plus confecit quàm alter. Quæ ex 100 mill. ſubducta, relinquunt 80 milliaria, quorum ſemiſſis eſt 40 milliria, quæ poſterior confecit. Unde prior confecit 60 milliaria.

Ut autem inveniatur, quot milliaria ſinguli quotidie confecerint, fiat Dies milliaria Dies milliaria
8 —— 40 —— 1 | facit 5, quotidie confecit poſterior. Unde prior quotidie confecit $7\frac{1}{2}$ milliaria.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

VIII.

Emit aliquis agrum 450 perticarum, jugerum 1000 florenis; hâc conditione, ut prætium duobus perſolvat temporibus, & primo quidem tempore 350 florenos plus quàm ſecundo: Quæritur, quantum ſingulis temporibus ſolvere debeat?

Jugerum	flor.	pert.		flor.
pert. 600 ——	1000 ——	450	facit	750 pretium agri

Adde { 375 ſemiſſem
175 ſemiſſi ipſius 350 }

ſumma 550 flor. primo tempore ſolvendi

ſubt { 375
175 }

Relinq. 200 flor. 2do tempore ſolvendi

IX.

Emit lanio 50 boves, jam quæritur, ſi ſingulis ſeptimanis 2 boves mactare velit, donec omnes poſt 25 ſeptimanas mactati ſint, quot boves per idem temporis ſpatium eodem pretio alere poſſit?

Facit 26 boves eodem pretio per 25 ſeptimanas alere poteſt, quo 50 boves, ſi ſingulis ſeptimanis duos mactet. Quod ut inveniatur, adde 50 & 2, eritque 26, ſemiſſis ſummæ 52, numerus böum quæſitus.

X.

Duo ſtudioſi A & B ſimul Leydâ diſcedunt in Gallias, quorum A quotidie conficit 6 milliaria, & B primo quidem die 1 milliare, ſecundo 2, tertio 3 milliaria, & ſic deinceps, ſequenti die unum ſemper milliare plus conficiens. Quæritur, quanto tempore primum ſit aſſequuturus?

Facit 11 diebus.

Ad

Ad quod inveniendum, ſumatur duplum ipſius 6, quod eſt 12, à quo ſi auferatur 1, relinquetur 11, numerus quæſitus.

XI.

Frumentarius duplex habet frumentum, utpote triticum & ſiliginem, vendit autem tritici modium 7 flor. 10 ſtufr. & 8 den: Quæritur, ſi tres modii tritici ipſi tanti conſtent quanti 4 modii ſiliginis, quo pretio modium ſiliginis vendere debeat?

NOTA. *Hæc quæſtis ſolvi poteſt per rationem compoſitam ad modum propoſitionis ſecundæ, ſicut hic videre eſt.*

flor. ſtufr. den.
7 ... 10 ... 8
20
150 ſtufr.
16
908
15
2408 den.

4 — — 3
1 — 2408 den.
4 — 7224

(1
ʒ 244 (1
7224 { 1806 | 11 | 2
4 16

facit 5 flor. 12 ſtufr. & 14 den.

XII.

Si 1 ℔ aromatis Amſtelodami emitur 12 ſolidis, 6 gro., quanti conſtabit 1 ℔ Antverpienſis, cùm 19 ℔ Amſtelodamenſes æquantur 20 Antverpienſibus?

Facit 11 ſol. 10 gr. 12 m.

Inſtitua-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Inſtituatur operatio per rationem compoſitam, ut ſequitur.

Sol. gro.

```
20—19          12...6
 1—150         12
 -------       --
20—2850        24
  (1          126
(1  20        ----
              150 gr.
2850 { 142 { 11.
  20 {  12 {
```

Aliter, per Regulam Proportionum converſam, hoc pacto:

```
℔ Amſt.  Sol. gr.      ℔ Antv.
19 ———-----12..6————20
           12
           --
           24
          126
          ---
          150 gr.        (1
           19       (1   20
          ----  2850 { 142 { 11.
          1350    20 {  12 {
           15
          ----
          2850
```

XIII.

Cereviſiarius habet ahenum cereviſiæ, 45 vaſorum, cujus vas ipſi conſtat 4 flor. 16 ſtufr.: Quæritur, ad quot vaſa decoquere debeat, ut vas ei conſtet 6 flor. Facit ad 36 vaſa.

Operare juxta Regulam Proportionum inverſam, ut ſequitur.

```
flor.  ſtufr.      vaſa        flor.
 4 ... 16 ———— 45 ————— 6
20                              20
--                              --
96 ſtufr.                       120 ſtufr.
45
---
480                   7
384              4320 { 36.
----              120 {
4320
```

Ut au-

Ut autem cognoſcatur, poſtquam numeri vulgari modo ſunt collocati, num juxta directam an verò inverſam proportionum regulam, ſit operandum: Notari debet, num quæſtio ſit ejus naturæ, ut, ſi tertius numerus, in regula, major ſit primo, tum quoque quartus ſeu quæſitus major requiratur ſecundo; vel, ſi tertius primo minor ſit, tum etiam quartus minor requiratur ſecundo, hoc enim ſi contingat, operatio inſtituenda erit ſecundùm regulam directam, multiplicando ſcilicet ſecundum per tertium numerum, & productum dividendo per primum; Contrario verò contingente, operandum erit juxta regulam inverſam, multiplicando nempe primum per ſecundum numerum, & productum dividendo per tertium.

XIV.

Si 1 ℔ cinamomi conſtat 3 flor., 1 ℔ gariophillorum 4 flor. 10 ſtufr., 1 ℔ nucum muſc. 3 flor. 15 ſtufr., 1 ℔ piperis 16 ſtuf., & 1 ℔ zingiberis 15 ſtufris. Quæritur, ſi ſingulorum aromatum idem numerus librarum expetatur, & in totum expendere velimus 1600 flor. quot libræ cujuſque ſpeciei ſint recipiendæ?

flor. ſtufr.
3 .... 0 . Cinam.
4 ... 10 . Garioph.
3 ... 15 . Nucum
16 . Pip.
15 . Zing. cujuſque aromatis flor.

12 ... 16 ——— 1 ℔ ——— 1600 | facit 125 ℔, cujuſque ſpeciei.

*Eodem modo invenietur, ſi 10 * nummi aurei commutandi ſint in ducatones, imperiales, ſolidos, & ſtufros, ita ut cujuſque ſpeciei idem ſumendus ſit numerus, ſingulorum recipiendos eſſe 12 nummos.*

* rijders

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XV.

Aromatopola Leydenſis petit Amſtelodamum, ad emenda aromata, videlicet: piper, gariophillos, & zingiber; ubi 1 ℔ piperis ipſi offertur pro 16 ſtufr., 1 ℔ gārioph. pro 4 flor. 10 ſtuf., & 1 ℔ zing. pro 15 ſtufris: Quæritur, ſi in totum expendere velit 229 florenos, & ſumendo 13 ℔ piperis, accipiat 2 ℔ garioph.; & ſumendo 3 ℔ garioph. accipiat 7 ℔ zingib., quot ℔ ſingularum ſpecierum recipere debeat?

13 —— 2 ╳ 3 —— 7
3 3   2 2
39 —— 6 —— 14

℔   ſtufr.
39 —— 16 | 624
6 —— 90 | 540   229 flor.
14 —— 15 | 210   20
1374 —— 4580 ſtufr. {624, 540, 210} facit {2080, quod div. per 16, fiunt 130 ℔ Pip.; 1800, quod div. per 90, fiunt 20 ℔ Garioph.; 700, quod div. per 15, fiunt $46\frac{2}{3}$ ℔ Zing.}
3 —— 10

Eodem modo invenitur, ſi permutandi ſint 189 *aurei Gallici, in patacones,* * *aureos, & ſolidos, & duplo plures patacones expetantur quàm ſolidi, recipiendos eſſe* 264 *patac.* 132 *aur. &* 44 *ſolidos.*

* een g. gul. hoc eſt, 28 ſtufr.

XVI.

Sex prædiati A, B, C, D, E, & F aggere prædia ſua cingere cupiunt, in ambitu continente 1270 pedes; hâc conditione, ut illi, qui, priuſquam aggerem extruere poſſunt, foſſam ſuam implere debent, 14 pedes ejuſdem aggeris minus perficiendos habeant. Quæritur, ſi prædium ipſius A ſit 30, B 20, C 45 D 40, E 36, & F 50 perticarum, & ipſis A, C, E, & F foſſas implere obtingat, quot pedes ſingulis ex ambitu ſint adjudicandi?

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

perticæ
A. 30.
B. 20
C. 45.
D. 40
E. 36.
F. 50.
221

Mult. 14 pedes
per 4
fiunt 56 pedes

	pedes	perticæ		pedes		In examen adde ſingulorum pedes
Ambitus	1270	A. 30.		A. 180, ſubtr. 14	fiuntque perticæ ex ambitu pro	A. 166
adde	56	B. 20		B. 120		B. 120
221 ———	1326 —	C. 45.	fit	C. 270, ſubtr. 14		C. 256
		D. 40		D. 240		D. 240
		E. 36.		E. 216, ſubtr. 14		E. 202
		F. 50.		F. 300, ſubtr. 14		F. 286

fiuntque 1270 pedes, ambitus, ut requirebatur.

XVII.

Tres, ſocietate initâ, contribuunt, nimirum, A & B ſimul 540 flor., B & C 360 flor., & A & C 450 flor.; peracto autem negotio lucrati ſunt 150 flor.: Quæritur, quid unuſquiſque contribuerit atque lucratus ſit?

	flor.	
A & B.	540	
B & C.	360	
A & C.	450	
ſumma	1350	duplum eorum pecuniæ.
ſemiſſis	675	pecunia ipſorum A, B, & C.
ſubtr.	360	pecuniam ipſorum B & C.
rel.	315	pecunia ipſius A. Quæ ſi auferatur ex 540 fl. pecuniâ ipſorum A & B, relinquetur 225 flor., pecunia ipſius B. Hinc cum B & C ſimul contribuunt 360 flor., ſequitur C contribuiſſe 135 florenos.

Lucrum ſingulorum ſic invenies

Summa totius pecuniæ	totum lucrum	ſingulorum pecunia		ſingulorum lucrum.
675 ———	150 ———	A. 315		A. 70 fl.
		B. 225	facit	B. 50 fl.
		C. 135		C. 30 fl.

XVIII.

Si 125 ℔ piperis plus 4 florenis valeant 60 florenos plus 13 ℔: Quæritur, quantum perſolvi debeat pro ſacco, pendente 512 ℔?

℔ flor. flor. ℔
Ex 125 + 4 æquale 60 + 13
Subtrah. utrinque 13 ℔ . . . . & . . . . 4 fl.
Remanent 112 ℔ æqual. 56 flor.
Tum fiat
℔ flor. ℔
112 —— 56 —— 512 | facit 256 flor.

XIX.

Si 100 ℔ ſacchari minus 3 flor. tantum valent quantum 36 floreni plus 5 ℔: Quanti conſtabit ciſta, pendens 475 ℔?

℔ flor. flor. ℔
Ad 100 — 3 æqual. 36 + 5
Adde utrinque 3. flor. minus 5 ℔. — 5 ℔ + 3 flor.
fiuntque 95 ℔ æqual. 39 flor.
Tum fiat,
℔ flor. ℔
95 — 39 — 475 | facit 195 flor.

XX.

Si 3 ulnæ panni veneunt 6 aureis Gallicis & 12 ſtufris; & eâdem ratione pro 25 ulnis ſolvantur 51 aurei Gallici & 12 ſtufri: Quæritur, quot ſtufros aureus valuerit?

3 ulnæ

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

3 ulnæ æqual. 6 aur. + 12 ſtuf.

hoc eſt, 1 ulna æqual. 2 aur. + 4 ſtuf.

& 25 ulnæ æqual. 50 aur. + 100 ſtuf.

Unde 51 aur. + 12 ſtuf. æquantur 50 aur. + 100 ſtuf.

Subt. utrinque 50 aur. & 12 ſtufr. 50 aur. + 12 ſtuf. 50 aur. + 12 ſtuf.

relinq. 1 aur. .... æqualis .... 88 ſtuf.

hoc eſt, 1 aureus valet 4 fl. & 8 ſtufr.

XXI.

Si 12 poma & 15 pira emantur 3 ſtufris, & eâdem ratione 10 poma & 50 pira 5 ſtufris, quot igitur ſingulorum uno ſtufro ementur?

ſtufr. poma pira ſtufr. poma pira pomis piris

3 —— 12 & 15 —— 5 | facit 20 & 25 æqual. 10 & 50

3,

1 —— 4 & 5

Subtr. utrinque 10 poma, & 25 pira. 10 pom. 25 pir.

& relinq. 10 poma æqual. 25 pir.

5,

vel 2 pom. æqual. 5 pir.

3,

& 6 pom. æqual. 15 pir.

Jam ad inveniendum, quot poma & pira ſeorſim pro ſtufro emantur, ita fiat

Ad 12 poma

ſtufr. adde 6 poma, vel 15 pira ſtufr.

3 —— 18 pom. —— 1 | facit 6 poma pro 1 ſtufro.

Hinc ſi 6 poma tantundem valeant ac 15 pira, & 6 poma emantur 1 ſtufro; ſequitur 15 pira pro 1 ſtufro emi poſſe.

XXII.

Si 3 ℔ gariophillorum, 2 ℔ piperis, & 1 ℔ zingiberis ſimul conſtent 186 ſtufris: atque 3 ℔ pip. 2 ℔ zing. & 1 ℔ gariopḣ. ſimul 116 ſtufris: itemque 3 ℔ zing. 2 ℔ garioph. & 1 ℔ pip. ſimul 142 ſtufris: Quæritur, quantum 1 ℔ cujuſque conſtiterit?

ſtufr.
facit 1 ℔ Garioph. 48.
Pip. 16.
Zing. 10.

Id quod ſequenti modo invenitur.

Ex 3 G. 3 P. 3 Z... 222

Add. { 3 G. 2 P. 1 Z ... 186 .... ſubtr.. 3 G. 2 P. 1 Z... 186
1 G. 3 P. 2 Z ... 116 Reliq. 1 P. 2 Z... 36
2 G. 1 P. 3 Z ... 142

ſumma 6 G. 6 P. 6 Z .. 444
ſemiſſis 3 G. 3 P. 3 Z ... 222
triens 2 G. 2 P. 2 Z .... 148 ...... Ex 2 G. 2 P. 2 Z 148
ſubtr. 1 P. 2 Z 36
Reliq. 2 G. 1 P 112
Ex 2 G. 1 P. 3 Z ... 142
ſubtr. 2 G. 1 P 112
Reliq ..... 3 Z 30

Hoc eſt, 1 Z .. 10, & 2 Z ... 20, id quod ſubductum ex 1 P. 2 Z .... 36, relinquit 1 P ... 16. Et hoc rurſus ex 2 G. 1 P .... 112, remanet 2 G .... 96, hoc eſt, 1 G ..... 48.

XXIII.

Si milites 24 ſingulis diebus fodiant 16 virgas, & 18 alii quotidie 15 virgas; Quæritur, quanto tempore ſimul perficient vallum 4650 virgarum?

Virg.

Virg.

Add. $\begin{cases} 16. \\ 15. \end{cases}$

31

Fiat itaque; 31 virgæ perficiuntur 1 die (intellige ab omnibus ſimul militibus), quot diebus perficientur 4650 virgæ? facit 150 diebus.

XXIV.

Si boves aliquot intra 8 dies depaſcunt 5 jugera, & aliquot alii intra 7 dies 3 jugera; Quæritur, quanto temporis ſpatio agrum depaſcent $126\frac{3}{7}$ jugerum?

Dies Jugera Dies Jugera
8 — 5 — 7 | facit $4\frac{3}{8}$
add. 3 jug.
dies jug.
$7\frac{3}{8}$ jug. — 7 — $126\frac{3}{7}$ | facit 120 diebus.

XXV.

Inſula ambitum habet 134 milliarium. Jam verò eodem tempore ex eodem loco duo tabellarii tendunt ad diverſas partes, quorum unus 2 diebus conficit 11 milliaria, & alter 3 diebus 17 milliaria : Quæritur, quanto temporis ſpatio ſibi invicem ſint obviam venturi, ut & quot milliaria uterque abſolverit?

dies mill. dies milliar
2 — 11 — 3 | $16\frac{1}{2}$
add. 17 milliar. dies milliar.
$33\frac{1}{2}$ milliar.— 3 — 134 | facit 12 diebus.

Milliaria à ſingulis confecta, invenies hoc modo:

dies milliar. dies milliar.
2 — 11 — 12 | 66 à 1mo perfecta
3 — 17 — 12 | 68 à 2do perfecta.

XXVI. Qui-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XXVI.

Quidam volens molere 215 modios tritici, adit molitorem 3 habentem molas, quarum primâ ſingulis horis molit 2 modios, ſecundâ 2^{bus} horis 5 modios, & tertiâ 3^{bus} horis 8 modios: Quæritur, quanto tempore totum triticum moletur, ſi omnibus molis imponatur, & quantum tritici ſingulis molis ſit imponendum?

Ad evitandas fractiones, inveniatur, per 38 prop. lib. 7. Elem: Euclidis, minimus numerus, qui per 1, 2, & 3 dividi poteſt abſque reliquo, qui eſt 6; inſtituaturque operatio, ut ſequitur.

horæ		modii		horæ	mod.					
1	—	2	—	6	facit 12					
2	—	5	—	6	facit 15					
3	—	8	—	6	facit 16		hor.		mod.	
					ſumma 43	—	6	—	215	facit 30 horis, totum triticum moletur.

Modii autem, ſingulis molis imponendi, ſic invenientur.

		modii			
43 — 215	{	12	} facit {	60	$1^{mæ}$ molæ
		15		75	$2^{dæ}$ modæ
		16		80	$3^{tiæ}$ molæ.

XXVII.

Quatuor mercenarii opus aliquod perficere poſſunt, videlicet,

A	bis	3	ſeptimanis
B	ter	4	ſeptimanis
C	quinquies	6	ſeptimanis
& D	novies	8	ſeptimanis. Quæritur, quanto tempore id ipſum ſimul laborantes, abſolvent?

Sep-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Septim. vicibus. Septim. vicibus

3 — 2 — 24 | facit 16
4 — 3 — 24 | facit 18
6 — 5 — 24 | facit 20
8 — 9 — 24 | facit 27

ſumma 81 vicibus, ſimul perficiunt opus 24 ſeptimanis.

vices Septim. vicis
81 — 24 — 1 | facit $\frac{8}{27}$ Septimanis, hoc eſt, 2 diebus, & $1\frac{7}{9}$ horis opus hoc ſimul perficere poſſunt.

XXVIII.

Fons aliquis habet 4 epiſtomia A, B, C, D, infra quæ labrum exiſtit, quod per A impletur 8 horis, per B 9, per C 12, & per D 18 horis. Labrum autem hoc cum habeat 4 foramina E, F, G, H, & evacuetur per E 7, per F 6, per G 4, & per H 3 horis : Quæritur, ſi labrum aquâ plenum ſit, & omnia ſimul epiſtomia, foramináque aperiantur, quanto temporis ſpatio labrum evacuabitur?

hor. vice hor. vicibus

8 — 1 — 72 | facit 9
9 — 1 — 72 | facit 8
12 — 1 — 72 | facit 6
18 — 1 — 72 | facit 4

Hoc eſt, ſimul 27 vicibus, labrum impletur 72 horis.

vic. hor. vic.
27 — 72 — 1 | facit $\frac{8}{3}$ horis, labrum ſemel impletur per omnia epiſtomia.

hor. vice hor. vicibus

7 — 1 — 84 | facit 12
6 — 1 — 84 | facit 14
4 — 1 — 84 | facit 21
3 — 1 — 84 | facit 28

Hoc eſt, ſimul 75 vicibus, labrum evacuatur 84 horis.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

vic. hor. vice
75 — 84 — 1 | facit $\frac{28}{25}$ horis, labrum ſemel evacuatur per omnia foramina. Quare cum interim per epiſtomia $\frac{21}{50}$ aquæ pars totius labri influxerit (nimirum, quantum oritur dividendo $\frac{28}{25}$ per $\frac{8}{3}$) : ſequitur $\frac{28}{25}$ horarum ſpatio reliquum duntaxat, utpote $\frac{29}{50}$ aquæ totius labri partem, per impletionem & evacuationem, elapſam eſſe. Unde ſi fiat, $\frac{29}{50}$ pars aquæ ipſius labri effluit $\frac{28}{25}$ horis, quot horis effluet 1, aqua ſc. totius labri? fiètque $1\frac{27}{29}$ horis.

XXIX.

Civis Leydenſis emit bovem 18 libris Flandricis, erogans arrhæ nomine 8 ſtufros, ſervoque donans 12 ſtufros; expendit autem pro vectigali nummum ſeptimum, id eſt, 15 flor. 8 ſtufr. & 9 den. & inſuper pro impoſitione urbana nummum quadrageſimum, id eſt, 2 flor. 14 ſtufr. dein pellem vendens, accipit 10 flor., eique contingunt 95 ℔ adipis, ℔ à $4\frac{1}{2}$ ſtufr. Poſtremò, lanei expenſis iiſque, quæ ipſi ulteriùs in emolumentum cedere poſſunt, compenſatis, deprehendit, nudam carnem pendere 605 ℔. Quæritur, quanti conſtet 1 ℔? facit 3 ſtufr. $2\frac{1}{2}$ den. circiter.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

33 26 (4
18 libræ Flandricæ 108000 ③ { 15428 ③
6 7

Add.	108		flor. bovis empti
	4		. . arrhæ
	6		. . pecuniæ donatæ
	15	428	.nummi 7^mi
	2	7	. . nummi 40^mi
ſumma	127	128	flor. in toto expenſi
ſubtr.	31	375	flor. iterum recepti
relinq.	95	753	flor. pro nuda carne dati

2
1080 ① { 27 ①
40

ſtufr.
$4\frac{1}{2}$ ſtufr. { 1 ℔ adipis
9000 ③ 225 ③
40 95
1125
2025

add. { 10 | . . . flor. pellis
21 | 375 flor. adipis . . . . 21375 ③
. . . . 31 | 375

℔ flor. ℔
605 —— 95753 ③ —— 1
1
95753 ③

1
06
3 20
95753 ③ } 158 ③
605 { 20
vel ſtufr. 3 | 160
16
96
1 | 6
& den. 2 | 56

XXX.

Si quis ſingulis ſeptimanis lucretur 5 flor. 8 ſtufr. & quotidie expendat 10 ſtufr. 8 den.: Quæritur, quantum anni ſpatio ſuperlucrabitur, aſſumpto anno 52 ſeptimanarum?

Septim. flor. Septim. flor.
1 —— 54 ① —— 52 | facit 280 | 8, lucratur in anno
dies flor. 7 | facit 191 | 1, expendit in anno
1 — 525 ③ — dieb. 364 | Relinq. 89 | 7, hoc eſt, 89 flor. & 14 ſtufr. anni ſpatio ſuperlucrabitur.

XXXI.

Si quis ſingulis ſeptimanis lucretur 5 flor. 8 ſtufr., Invenire, quantum quotidie expendere debeat, ut 89 flor. & 14 ſtufr. anni ſpatio ſuperlucretur.

Septim. flor. Septim. flor.
1 — 54① — 52 | facit 280 | 8 lucratur in anno
ſubtr. 89 | 7
relinq. 191 | 1 anni ſpatio conſumendum.

dies flor. dies flor.
364 — 1911① — 1 | facit 525③, hoc eſt, 10 ſtufr. & 8 den. quotidie debet expendere.

1
982
191100 ③ { 525 ③
364 { 20
10 | 500 ③

XXXII.

Si quis quotannis ſuperlucretur 89 flor. 14 ſtufr. quantum ſuperlucrabitur 13 annis, & 7 menſibus? Facit 1218 flor. 8 ſtufr. & 8 denarios.

897① 12 mens^bus ſuperlucr.
13 anni
269 | 1
897 |
4485 ..6 mens^bus ſuperlucr.
7 | 475..1 mens^bus ſuperlucr.
flor. 1218 | 425
2
ſtufr. 8 | 50
16
3 | 00
5 | 0
den. 8 | 00

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XXXIII.

Aliquis conducit mercenarium hâc conditione, ut, ſi operetur, quotidie pro mercede recipiat 12 ſtufr., ſi autem ferietur, ſit quotidie ſoluturus 8 ſtufros. Quæritur, quot diebus operari & feriari debeat, ut anno, 365 dierum, elapſo, neuter alteri exiſtat debitor?

ſtufr. dies ſtufr. dies
12 — 1 — 24 | facit 2 operari debet, ad 24 ſtufr. lucrandos.
8 — 1 — 24 | facit 3 feriari debet, ad aſſumptos 24 ſtufr. conſumendos.
5 ſumma dierum profeſtorum & feriatorum, ad tantum lucrandum quantum expendendum.

Tum fiat

$$5 - 365 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \text{facit} \left\{ \begin{matrix} 146 \text{ dies profeſtos} \\ 219 \text{ dies feriatos} \end{matrix} \right.$$

Aliter.

NOTA, Quoniam dies, quibus operatur, multiplicati per 12 tantum producere debent, quantum reliqui multiplicati per 8: ſequitur * 12 ſtufros ad 8 ſtufros eam rationem habere debere, quam dies feriati ad profeſtos. Sed, 4^or numeris in eadem ratione exiſtentibus, ut ſe habet ſumma duorum priorum ad ſecundum, ita quoque ſe habet ſumma duorum poſteriorum ad quartum, * Erit inde:

** per 19 prop. 7 libri Elem. Eucl.*

** Vide Clavium ad prop. 22 libri 7 Elem. Euclidis.*

ſtufr.
Add. { 12 / 8 ſtufr. — ſumma dierum profeſt. & feriat.
ſumma 20 — 8 ——— 365 | ad 146 dies profeſtos, qui ſubducti ex 365 diebus, relinquunt 219 dies feriatos.

XXXIV.

Duo opifices opus aliquod perficiendum habent, quorum A illud perficere ſuſcipit 30, & B 20 diebus; Quæritur, ſi ſimul operentur, quanto temporis ſpatio illud abſolvent?

dies opus dies opera
30 — 1 — 60 | facit 2
20 — 1 — 60 | facit 3

ſumma 5 opera A & B ſimul perficiunt 60 diebus, hoc eſt, quinquies illud opus eodem tempore ſimul abſolvunt.

opera dies opus
5 — 60 — 1 | facit 12 diebus A & B idem opus ſimul conficiunt.

Aliter.

Quoniam A prædictum opus ſolus perficere poteſt 30, & B 20 diebus; patet, ſi ſimul operantes illud aliquo tempore abſolvant, dies ipſius A ad dies ipſius B, eam rationem habere, quam pars à B confecta ad partem ab A confectam; & conſequenter * ſummam dierum A & B eſſe ad dies ipſius B, ſicut ſumma duarum partium ab A & B confectarum (hoc eſt, totum opus) ad partem ipſius A.

* *Vt in antecedenti quæſtione.*

Quare operatio inſtituenda eſt, ut ſequitur.

dies
A. 30
B. 20 B dies Opus
ſumma dierũ A & B. 50 — 20 — 1 | facit $\frac{2}{5}$ partes operis, quas confecit A. Unde B reliquas $\frac{3}{5}$ partes confecit.

Jam fiat, A abſolvit totum opus, hoc eſt, 1, diebus 30, quanto tempore abſolvet igitur $\frac{2}{5}$ partes ipſius operis? facit 12 diebus. Unde A & B ſimul abſolvunt opus 12 diebus, ut ſupra.

Adhuc aliter.

A. 30
B. 20 B A
ſumma. 50 — 20 — 30 | facit 12 diebus, ut ante.

XXXV.

Si Mars perficiat curſum ſuum 2 annis, & Jupiter 12 annis, & ſint ſimul in primo gradu Arietis; Quæritur tempus primæ conjunctionis, ut & gradus Zodiaci, in quo illa contingat?

Conjunctionis tempus quære, ut ſequitur.

Anni gradus Annus gradus
2 — 360 — 1 | facit 180
12 — 360 — 1 | facit 30 Ann. gradus
reliq. 150 — 1 — 360 | facit $\frac{12}{5}$ annis.

Vel brevius, hoc modo:

Quoniam Jupiter curſum ſuum abſolvit 12 annis, & Mars 2 annis: ſequitur, ſi ſimul ſint in primo gradu Arietis, & aliquando iterum conjungantur, annos Jovis ad annos Martis eam rationem habere, quam gradus à Marte interim confecti ad gradus Jovis: & conſequenter *, differentiam annorum Jovis & Martis ad annos Martis eandem habere rationem, quam differentia graduum Martis & Jovis, hoc eſt, 360 gr. vel 1 periodus, ad gradus Jovis.

* *Vide Clavium 22 prop. 7. libr. Euclidis.*

Vnde operatio ſic ſe habet.

Anni
12 Jovis
2 Martis. Anni Martis. periodus ſeu 360 gr.
differ. 10 ——— 1 ——— 1 | facit $\frac{1}{5}$ partem periodi ſeu 72 gr. conficit Jupiter intra tempus 1mæ conjunctionis. Quare incidet illa in 12 gradũ Geminorũ.

Jam fiat, Jupiter curſum ſuum abſolvit 12 annis, quanto tempore abſolvet $\frac{1}{5}$ partem periodi ſeu curſus ſui? facit $\frac{12}{5}$ annis. Unde Jupiter & mars $\frac{12}{5}$ annis, ut ſupra, conjungentur.

Adhuc aliter.

Jupiter 12
Mars 2 Mars Jupiter
differ. 10 — 2 — 12 | facit $\frac{12}{5}$ ſeu $2\frac{2}{5}$ annis, ut ante.

Eâdem ratione, ſi in horologio ſint 2 indices, quorum unus bis circumagitur 1 die, & alter ſemel 30 diebus, atque ſimul, indicantes idem punctum, moveri incipiant, invenietur eoſdem rurſus conjunctum iri $12\frac{12}{59}$ horis.

XXXVI. Ali-

XXXVI.

Aliquis conducit ſervum, cui in anno pollicetur ſe daturum 30 flor. & veſtem; jam verò, peractis 7 menſibus, cum inter ſe diſſentirent, ſervus miſſionem petit, pro mercede recipiens dictam veſtem & adhuc 5 flor. Quæritur, quanti prædicta veſtis ipſi æſtimata fuerit?

Menſ. flor.
In 12 .. meretur .. 30, cum veſte
ſubt. in 7 .. meretur .. 5, cum veſte menſibus flor.
Relinq. in 5 mens^bus^ meretur 25 flor. quot meretur in 7? | facit 35
ſubtr. 5 recept.
relinq. 30 flor. pro veſte.

Ejuſdem farinæ.

XXXVII.

Mercator 2 naves vino oneravit, in quarum 1ma ſunt 150, & in 2da 240 dolia. Locum autem prætervectus, in quo vectigal ſolvere tenebatur, pendit pro 1ma navi unum dolium & recipit 6 flor., pro ſecunda verò dolium ſolvit & inſuper 18 flor.: Quæritur, quanti dolium æſtimatum fuerit?

Subtr. Subtr.
pro 240 doliis ſolvit 1 dol. & 18 flor.
pro 150 doliis ſolvit 1 dol. minus 6 flor. doliis
Relinq. pro 90 doliis ... ſolvit ... 24 flor. quot igitur ſolvit pro 150?
flor.
facit 40 pro 1ma.
add. 6 flor. receptos
fiuntque 46 flor. pro dolii pretio.

NOTA, haſce duas quæſtiones ſolvi etiam poſſe ad modum quæſtionum 18 & 19.

XXXVIII.

Aliquis debet 787 flor., quos ſolvere cupit dato tritico

ſiligi

ſiligine, & hordeo, tritici verò modius ipſi conſtat 7 flor. 15 ſtufr., ſiliginis 5 flor. 5 ſtufr., & hordei 3 flor. 10 ſtufr.: Quæritur, ſi, ſumptis 3 modiis tritici, petantur 2 modii ſiliginis, & ſumendo 5 modios ſiliginis requirantur 4 modii hordei, quot modii ſingulorum ſint recipiendi?

3 — 2
5 — 4
15 — 10 — 8

7 flor. 15 ſtufr.   5 flor. 5 ſtufr.   3 flor. 10 ſtufr.
20   20   20
155 ſtufr.   105 ſtufr.   70 ſtufr.

155   105   70
775   1050   560
155
2325
1050   787 flor.
560   20
3935 — 15740 ſtufr.
1 — 4

$\left.\begin{matrix}2325\\1050\\560\end{matrix}\right\}$ fit ſtufr. $\left\{\begin{matrix}9300\text{, quod div. per } 155\\4200\text{, quod div. per } 105\\2240\text{, quod div. per } 70\end{matrix}\right\}$ facit modios $\left\{\begin{matrix}60\text{ tritici}\\40\text{ ſiliginis}\\32\text{ hordei.}\end{matrix}\right.$

XXXIX.

Dividere 14830 in 4^{or} partes, ita ut $\frac{2}{3}$ primæ partis ſint æquales $\frac{3}{4}$ ſecundæ, & $\frac{5}{6}$ ſecundæ æquales $\frac{7}{8}$ tertiæ, & $\frac{9}{10}$ tertiæ æquales $\frac{11}{12}$ quartæ.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ $\frac{9}{10} \times \frac{11}{12}$

9 8   2, 42 ... 40   2, 110 ... 108
  21 ... 20   55 54

9 — 8
21 — 20
189 — 168 — 160
55 — — 54
10395 — 9240 — 8800 — 8640
5, 2079 — 1848 — 1760 — 1728
1848
1760
1728
7415 — 14830
1 — — 2

21	21	8	
9	8	20	
189	168	160	160
55	55	55	54
945	840	800	640
945	840	80	80
10395	9240	8800	8640

7415 — 14830 { 2079, 1848, 1760, 1728 } facit { ſing. partes A. 4158, B. 3696, C. 4520, D. 3456 }

XL.

Tres perſonæ dividere debent 170 flor., hâc ratione, ut $\frac{1}{2}$ partis A, $\frac{3}{4}$ partis B, & $\frac{5}{6}$ partis C omnes inter ſe ſint æquales. Invenire ſingularum partes.

1 — 3 — 5
2 — 4 — 6
30 — 20 — 18
2, 15 — 10 — 9
10
9
34 — 170 flor.
1 — 5

2	1	1
3	4	3
6	4	3
5	5	6
30	20	18

34 — 170 flor. { 15, 10, 9 } facit { ſing.partes A. 75 fl., B. 50 fl., C. 45 fl. }

XLI.

Quinque laniones ſimul conducunt agrum, cui A immittit 30 boves, pro 4 menſibus. Quæritur, quanto tempore B 40, C 24, D 20, & E 15 boves illi immittere debeant, ut tandem æqualem mercedis partem perſolvant?

A. 30

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

A. 30 boves	boves		menſes	
per 4 menſes	B. 40		B. 3	
Divid. 120 ...per..	C. 24	fiuntque	C. 5	
	D. 20		D. 6	
	E. 15		E. 8	

Ejuſdem farinæ.

XLII.

5 Mercatores conducunt unà currum, cui A imponit 600 pondo 20 milliaribus vehenda; Quæritur, quot pondo B eidem 15, C 12, D 10, & E 8 miliaribus vehenda imponere debeant, ut æquales mercedis partes perſolvant?

A. 600 ℔	milliaria		ſingulorum pondo	
per 20 mill.	B. 15		B. 800	
Divid. 12000.. per..	C. 12	fiuntque	C. 1000	
	D. 10		D. 1200	
	E. 8		E. 1500	

XLIII.

Mercator convenit cum auriga ut vehat 2000 ℔ milliaribus 25, hâc conditione, ut pro 100 ℔, ſingulis milliaribus ei ſolvat 2 ſtufros. Qui, poſtquam 10 milliaria confecit, propter viam ſalebroſam, 800 ℔ exonerare fuit coactus, & cum reliquis perrexit ad locum propoſitũ. Quæritur, quantum pro mercede auriga recipere debeat?

℔ ſtufr. ℔
100 —— 2 —— 2000 | facit 40 ſtufr. pro 2000 ℔ uno milliari vehendis.
Milliar. ſtufr. Milliar.
1 —— 40 —— 10 | facit 400 ſtufr. pro 2000 ℔ decẽ milliaribus vehendis.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

		2000 ℔
℔	ſtufr.	Subt. 800 ℔
100 —	2 —	1200 ℔ | facit 24 ſtufr. pro 1200 ℔ uno milliari vehendis.

		25 mill.
milliar.	ſtufr.	Subt. 10 mill.
1 —	24 —	15 mill. | facit 360 ſtufr. pro 1200 ℔ quindecim milliaribus vehendis,
		add. 400 ſtufr. pro 2000 ℔ decem milliaribus vehendis.
		fit ſumma 760 ſtufr. ſeu 38 floreni, ab auriga pro mercede recipiendi.

XLIV.

Oenopola duplex habet vinum, nimirum 8 ſtufr. & 14 ſtufrorum cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium vini vendere poſſit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriuſque ad hanc mixtionem faciendam ſumere debeat?

Mult. 80 Canth. ſeu, doliū. — Mult. 35 flor.
per 8 ſtufr. — per 20 ſtufr.
fiunt 640 ſtufr — fiuntque 700 ſtufr. conſtat dolium plenum vino 8 & 14 ſtufrorum.
conſtat dolium plenum vino 8 ſtufrorum. — 640 ſubtr.

Relinq. 60 ſtufri, quibus dolium plus conſtat impletum vino 8 ſtufr. & 14 ſtufrorum, quàm plenum ſolo vino 8 ſtufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 ſtufrorum in dolio contenti cariores ſunt cantharis 8 ſtufrorum, illorum loco ſumptis.

ſtufr.
Ex 14
ſubt. 8
6 ſtufr. differentia pretii unius canthari — Canth. 1 — 60 ſtufr. differentia pretii cantharorum in dolio. | facit 10 canth. 14 ſtufrorum
ſubtr. 80 Canth. dolii
rel. 70 canth. 8 ſtufrorum.

Eodem modo invenitur, ſi monetarius duplex habeat argentum, utpote 10 *den.,* & 8 *denariorum in ſelibra, illudq́; miſcere velit, ita ut libra contineat* 19 *denarios, ſumendas ipſi eſſe* 1½ *ſelibras* 10 *den.,* & ½ *ſelibr.* 8 *denariorum.*

Ejuſ-

Ejuſdem farinæ.

XLV.

22 Perſonæ, nimirum, viri & mulieres, in ſympoſio expenderunt 16 flor., & 16 ſtufr.: Quæritur, ſi quilibet virorum ſolvat 18, & quælibet mulierum 12 ſtufros, quot viri fuerint & mulieres.

Mult. 22 perſonas
per 12 ſtufr.
44
22
fiunt 264 ſtufri; à 22 mulieribus expenſi.

Mult. 16 flor. 16 ſtufr.
per 20
fiuntque 336 ſtufri, à viris & mulieribus unà expenſi.
.................264 ſubtr.
reliq. 72 ſtufri, plus expenſi à viris ſimul & mulieribus, quàm ſi omnes mulieres fuiſſent: vel etiam ſtufri, quos viri plus expenderunt quàm æquè multæ mulieres.

ſtufr.
Ex 18
ſubtr. 12
reliq. 6 —— 1 —— 72 | facit 12 viros

vir. ſtufr.
Subtr. 22 Perſonæ
reliq. 10 mulieres.

XLVI.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ ſtufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipſi offeruntur 1 ſtufr. & 25 pira 2 ſtufris. Quæritur, ſi utriuſque fructus ſimul 100 habere velit, quot poma & pira ſeorſim accipere debeat?

poma ſtufr. poma
10 — 1 — 25 | facit $2\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 25 poma.
ſubtr. 2 ſtufr. pretium 25 pirorum
Relinq. $\frac{1}{2}$ ſtufr. quo 25 poma cariora ſunt 25 piris.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Subtr.

pira ſtufr. pira $9\frac{1}{2}$ ſtufr. conſtant 100 poma & pira ſimul.
25 — 2 — 100| facit 8 ſtufr. conſtant 100 pira

relinq. $1\frac{1}{2}$ ſtufri, quibus 100 poma & pira ſimul cariora ſunt 100 piris, vel etiam, quibus poma in centenario contenta cariora ſunt piris eorum loco ſumptis.

ſtufr.differ. poma ſtufr.differ. 100
$\frac{1}{2}$ —— 25 —— $1\frac{1}{2}$| facit 75 poma
& 25 pira.

XLVII.

Quo pacto ARCHIMEDES portionem argenti, coronæ aureæ permixtam deprehenderit.

Vide Vitruvium *cap. 3. lib 9.*

Rex HIERO, cum auream coronam votivam diis ſuis in ſano quodam conſtituiſſet ponendam, immani pretio faciendam locavit, & auri certam quantitatem appendit redemptori. Qui ſubtiliter opus confectum Regi reſtituit, pondus coronæ viſus præſtitiſſe. Poſtea verò cum indicium factum eſſet, dempto auro tantundem argenti coronæ admixtum eſſe: Indignatus HIERO ſe contemptum, neque inveniens, quâ ratione id furtum, ſalvâ coronâ (quæ artificiosè erat confecta) deprehenderet, ARCHIMEDEM rogavit, ut in ſe ſumeret de eo cogitationem. Is cum caſu veniret in balneum, ibique, in ſolium deſcendens, animadverteret, quantum corporis ſui in eo inſideret, tantum aquæ extra ſolium effluere, duas feciſſe dicitur maſſas æquo pondere, quo fuerat corona, unam ex auro, alteram ex argento. Cum ita feciſſet, vas amplum ad ſumma labra implevit aquâ, in quo demiſit argenteam maſſam, cujus quanta magnitudo in vaſe depreſſa eſt, tantum aquæ effluxit. Ita, exemptâ maſsâ, quanto minus factum fuerat, refudit, ſextario menſus, ut eodem modo, quo priùs fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo invenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ menſura reſponderet. Cum id expertus eſſet, tum auream maſſam ſimiliter pleno vaſe demiſit, & eâ exemptâ, eâdem ratione menſurâ additâ, invenit ex aqua non tantum defluxiſſe, ſed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri maſſa eſſet quàm argenti. Poſtea verò repleto vaſe in eadem aqua ipsâ

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ipſâ coronâ demiſsâ, invenit plus aquæ defluxiſſe in coronam quàm in auream eodem pondere maſſam: & ita ex eo, quòd plus defluxerat aquæ in corona quàm in maſſa, ratiocinatus deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifeſtum furtum redemptoris.

Cum autem VITRUVIUS de auri quantitate coronæ nullam faciat mentionem, neque etiam quâ ratiocinatione ARCHIMEDES exactam quantitatem argenti coronæ permixti invenerit, poterit Quæſtio, poſito pondere coronæ 10 ſelibrarum, & pondere aquæ effluxæ aureæ maſſæ 1 ℔, argenteæ verò maſſæ $1\frac{1}{2}$ ℔, & denique coronæ $1\frac{1}{9}$ ℔, ſolvi, ut ſequitur.

℔
Ex $1\frac{1}{2}$, aqua effluxa argenteæ maſſæ.
ſubtr. 1, aquam effluxam aureæ maſſæ.
relinq. $\frac{1}{2}$ ℔, aqua plus effluxa ab argentea maſſa (pendente 10 ſelibras), quàm ab aurea maſſa (ejuſdem ponderis).

℔
Rurſus ex $1\frac{1}{9}$, aqua effluxa coronæ, ſive maſſæ 10 ſelibrarum ex auro & argento conflatæ.
ſubtr. 1, aquam effluxam aureæ maſſæ ejuſdem ponderis.
relinq. $\frac{1}{9}$ ℔, aqua plus effluxa à corona, ex auro & argento conflatâ, quàm ſi ex ſolo auro conſtitiſſet; vel etiam, differentia aquæ, ab argenti portione in corona plus effluxæ, quàm ſi ejuſdem portionis loco aurum aſſumptum fuiſſet.

Tum fiat,
℔ *aquæ* dant *Selibr. arg.* quid ℔ *aquæ*? *Selibr. argenti* in corona.
$\frac{1}{2}$ ——— 10 ——— $\frac{1}{9}$ | facit $2\frac{2}{9}$, quod ſubductum ex 10, relinquit $7\frac{7}{9}$ *ſelibras auri* in corona.

Notandum autem, quòd, etiamſi ſatis fuiſſet in explorato habere pondus aquæ unius ſelibræ cum auri tum argenti, quoniam inde facilè aqua defluxa plurium ſelibrarum inveniri potuiſſet, ARCHIMEDES tamen duas maſſas ejuſdem ponderis atque coronæ fecerit, ut eò certiùs quæſitum obtineret, nec parva aquæ differentia, quæ in unius ſelibræ pondere explorando fuerit commiſſa, per multitudinem ſelibrarum multiplicata, plus quàm par erat excreſceret.

Ali-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Aliter.

Si 31 ℔ argenti ponderent 3 ℔ minus in aqua quàm in aëre, & 19 ℔ auri 1 ℔ minus in aqua quàm in aëre, ponendo coronam, ut ſupra, in aëre pendiſſe 10 ſelibras, at verò in aqua $9\frac{1991}{5301}$ ſelibras, inveniemus argenti portionem in corona etiam hâc arte:

Subtr.
18 ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ auri.

℔ *argenti in aëre*, pendent 28, ℔ *in aqua*, quid 19, ℔ *arg. in aëre?*
31 —— 28 —— 19 | facit $17\frac{5}{31}$ ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ argenti.

relinq. $\frac{26}{31}$ ℔ differentia, quâ 19 ℔ auri plus pendent in *aqua* quàm 19 ℔ argenti.

℔ *auri in aëre*, pendent 18, ℔ *in aquâ*, quid 10 *ſelibr. pondus cor. in aëre?*
19 —— 18 —— 10 | facit .... $9\frac{9}{19}$ *ſelibr.* pendet corona ex ſolo auro in *aqua*.

ſubtr. $9\frac{1991}{5301}$ *ſelibr.* pendet corona ex auro & argento permixtum in *aqua*.

Relinq. $\frac{520}{5301}$ *ſelibr.* differentia; quâ corona ex ſolo auro plus pendet in *aqua* quàm ex auro & argento conflata; vel etiam differentia, qua detractum aurum plus pendit in aqua quàm additum argentum.

Tum fiat
℔ diff. $\frac{26}{31}$ —— ℔ *argent.* 19 —— *ſelibr.* diff. $\frac{520}{5301}$ | facit $2\frac{2}{9}$ *ſelibr. argenti* in corona.

ſubtr. 10 *ſelibr. auri & argenti* in corona.
& $7\frac{7}{9}$ *ſelibr. auri* in corona, ut ante.

Et tantùm de Arithmeticis Quæſtionibus atque Problematîs ſimplicibus, hoc eſt, quæ abſque ulla radicum extractione ſolvi poſſunt. Earum autem, quæ ſequuntur, prima eſt Plana Quæſtio, cum ad quæſiti inventionem extrahi debeat √Q; quæ verò duæ reliquæ, Solidæ ſunt, cum ad illas ſolvendas opùs ſit extrahere √C.

XLVIII.

Aliquis debet poſt 12 menſes 17579 flor., 12 ſtufr., & 8 den. convenit autem cum creditore ſuo de eodem debito perſolvendo finitis 6 menſibus, remittendo uſuram u-

ſuræ

ſuræ denarii 20 in anno: Quæritur, quantum dicto tempore perſolvere teneatur?

NOTA: Cum 17579 flor. 12 ſtufr. & 8 den., vel 17579625③ ſolvendum poſt 12 menſes ad 17155957③ ſolvendum poſt 6 menſes eandem rationem habere debeat, quam 17155957① ſolvendum poſt 6 menſes ad 16742500③ paratâ pecuniâ ſolvendum; patet, 17155957③ medium eſſe proportionalem numerum inter 17579625③ & 16742500③. Ad quem obtinendum, multiplicari debet 17579625③ per 16742500③, & ex eo quod fit extrahi √Q, & habebitur 17155957③.

Inſpice ſequentem operationem.

12 ſtufr. 8 den.

20 ſtufr. — flor. — $\frac{16}{72}$

$\frac{16}{320}$ den. — 1 — $\frac{128}{200}$ den., facit $\frac{200}{320}$ vel $\frac{5}{8}$ flor. hoc eſt, in decimalibus 625③

24

Utpote dividendo ~~5000~~③ {625③.
per ... 8

Solv. poſt 12 menſ. Solv. parat. pec. Solv. poſt 12 menſ.
21 ———— 20 ———— 17579625③
20
351592500③

1 1
~~145850~~
~~351592500~~③ < 17579625 ... ③ ſolv^dum^ poſt 12 menſes.
16742500③ ſolv^dum^ paratâ pecuniâ.
21 8789812500
35159250
70318500
123057375
105477750
17579625
2|94|32|68|71|56|25|00 ⑥

facit 1| 7| 1| 5| 5| 9| 5| 7③ Solv^dum^ poſt 6 menſes, hoc eſt, 17155 flor. 19 ſtufr. & 2 den. circiter.

flor. 17155 | 957
| 20
ſtufr. 19 | 14
| 16
| 84
1 | 4
den. 2 | 24

XLIX.

Aliquis debet poſt 12 menſes 17579625③, convenit autem cum creditore ſuo de eodem debito ſolvendo finitis 4 menſibus: Quæritur, quantum dicto tempore perſolvere teneatur, ſi remittatur uſura uſuræ denarii 20 in anno? facit 17017 flor. 0 ſtufr. & 5 denarios.

Poſt 12 menſ. Parat. pec. Poſt 12 menſ. Parat. pec.
21 ——— 20 ——— 17579625③ | facit 16742500③

16742500③
16742500③
8371250000
334850
669700
1171975
1004550
167425
280311306250000⑥
17579625 ③
140155653125000
56062261250
168186783750
252280175625
196217914375
140155653125
196217914375
28031130625
4|927|767|647|135|156|250|000⑨
facit 1| 7| 0| 1| 7| 0| 1| 6③
poſt 4 menſes, hoc eſt, 17017 flor. 0 ſtufr. & 5 den. circiter.

flor. 17017 | 106
20
ſtufr. 0 | 32
16
1 | 92
3 | 2
den. 5 | 12

L.

Aliquis ſolvere debet paratâ pecuniâ 16742 flor. & 10 ſtufr. convenit autem cum creditore ſuo de eodem debito per-

perſolvendo finitis 8 menſibus: Quæritur, quantum dicto tempore perſolvere teneatur, habendo rationem lucri uſuræ ad denarium 20 in anno?

NOTA: Cum 17579625 ③, ſolvendum poſt 12 menſes, ad 17296033 ③, ſolvendum poſt 8 menſes, eandem habeat rationem, quam 17296033 ③, ſolvendum poſt 8 menſes, ad 17017016 ③, ſolvendum poſt 4 menſes; & eandem quoque quam 17017016 ③, ſolvendum poſt 4 menſes, ad 16742500 ③, ſolvendum paratâ pecuniâ: patet, 17017016 ③ & 17296033 ③ eſſe duos medios proportionales numeros inter 16742500 ③ & 17579625 ③. Ad quos inveniendos, ſi multiplicetur quadratum ex 16742500 ③ per 17579625 ③, & quadratum ex 17579625 ③ per 16742500 ③, & ex productis numeris extrahatur √C: fient 17017016 ③ & 17296033 ③, quæſiti numeri.

Solv. paratâ pec. Solv. poſt 12 menſes Solv. paratâ pec. Solv. poſt 12 menſes
20 ——— 21 ——— 16742500 ③ | facit 17579625 ③

```
                         17579625 ③
                         17579625 ③
                         ----------
                         87898125
                        35159250
                       105477750
                      158216625
                     123057375
                    87898125
                   123057375
                  17579625
                  ---------------
                  309043215140625 ⑥
                         16742500 ③
                  ---------------
                  154521607570312500
                  61808643028125O
                 123617286056250O
                216330250598437 5
               185425929084375O
              309043215140625
          ----------------------------------
          5|174|156|029|491|914|062|500 ⑨
  facit   1|  7|  2|  9|  6|  0|  3|  3 ③
          ----------------------------------
```

post 8 menſes, hoc eſt, 17296 flor. o ſtufr. & 10 den. circiter.

```
flor. 17296 | 033
            |  20
            ----
ſtufr.    0 | 66
            | 16
            ----
          3 | 96
          6 | 6
            ----
den.     10 | 56
```

 Quo

Quo pacto hæ, aliæq́, ſimiles uſuræ quæſtiones compendioſè per Logarithmorum Tabulas ſolvendæ ſint, vide cap. 17. Arithmeticæ Logarithmicæ Doctiſſimi Briggii.

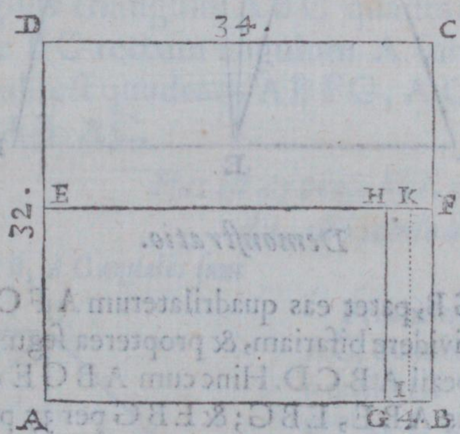
Sequuntur PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

PRO-

PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

I.

AReam quadrilateram ABCD, cujus longitudo AB vel DC eſt 34, & latitudo AD vel BC 32 pedum, dividere; ita ut, dempto communi angiportu GBFH, latitudinis GB, 4, pedum, parallelogramma AGHE & EFCD ſint inter ſe æqualia.



Quod ut fiat, ducatur IK ex I, medio ipſius GB, parallela GH vel BF: eritque GI vel IB 2, & AI 32. Deinde multiplicatâ AB 34 per BC 32, fit 1088, area ABCD. Cujus ſemiſſis 544, erit area gnomonis EDCBIK vel parallelogrammi AIKE. Quæ diviſa per longitudinem AI 32, dabit latitudinem IK vel AE 17. indicans, quot pedes menſurandi ſint ab A ad E, vel à B ad F.

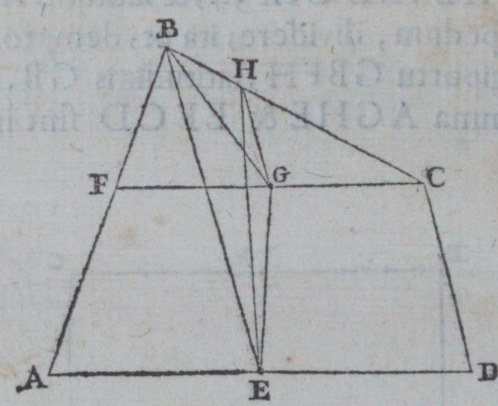
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

II.

Trapezium A B C D dividere bifariam, rectâ E H, ductâ ex E, puncto medio lateris A D.

Conſtructio.

Ductâ C F parallelâ D A, junctâque EB; ex G, medio ipſius CF, agatur G H parallela E B, dico rectam E H fore quæſitam.



Demonſtratio.

Junctis E G, G B, patet eas quadrilaterum A F C D nec non triangulum F B C dividere bifariam, & propterea ſegmentum A B G E ſemiſſem eſſe trapezii A B C D. Hinc cum A B G E compoſitum ſit ex binis triangulis A B E, E B G; & E B G per 37 prop. lib 1 Elem. Eucl. ſit æquale E B H: erit quoque ABHE (compoſitum ex ABE & E B H) ſemiſſis trapezii A B C D, adeoque E H linea quæſita.

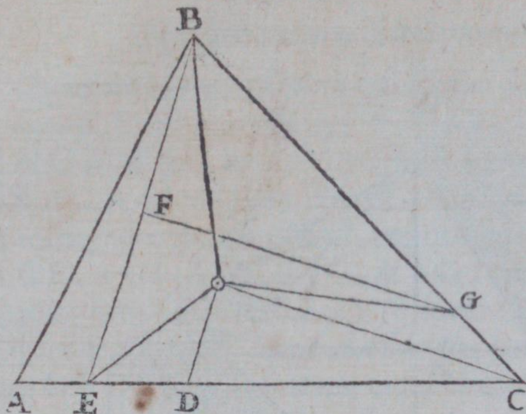
III.

Triangulum A B C dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ diviſione à linea B O.

Con-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio.



Ex O, ducatur ad D, $\frac{1}{3}$ partem ipſius AC, recta O D, & eidem ex B parallela B E, tum O E, reſecans partem ABOE, tertiam totius ABC. Deinde ad diſtinguendas reliquas partes, ductâ O C ex F medio ipſius EB agatur ei parallela FG, & denique O G, quæ reliquas duas partes diſtinguit.

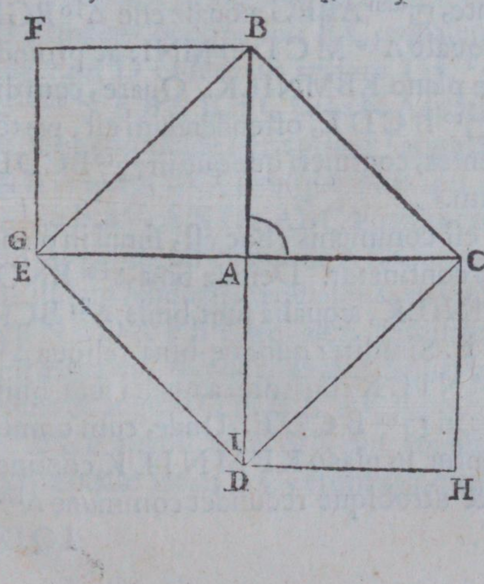
Cujus demonſtratio ex 37 prop. lib 1^{mi} Elem. Euclidis eſt manifeſta.

IV.

In rectangulis triangulis ABC quadratum BCDE, quod à latere BC rectum angulum A ſubtendente deſcribitur, æquale eſt quadratis ABFG, ACHI, laterum circa rectum AB, AC.

Hæc eſt 47 prop. libr. 1^{mi} Elem. Euclidis, alio modo demonſtrata.

1^{mus} Caſus, ubi AB, AC æquales ſunt



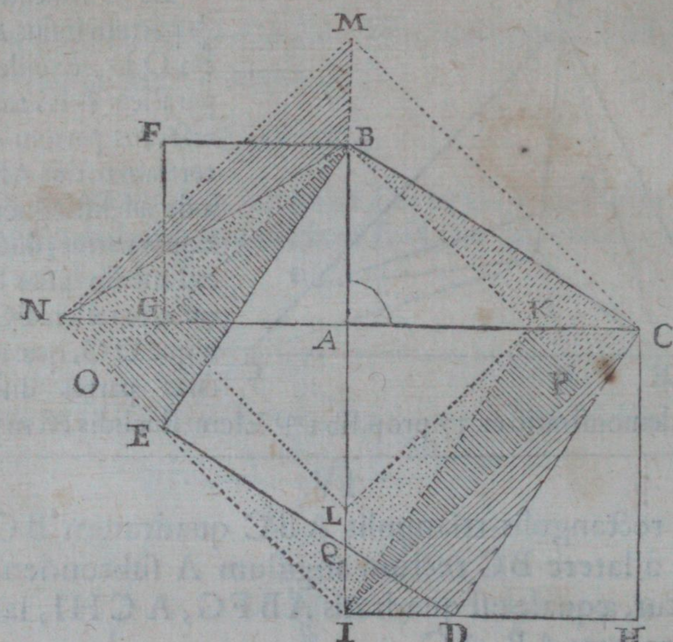
Primùm ſi AB ſit æqualis AC, quoniam $\square^{tum}$ ABFG æquale eſt Δ^{lo} BED, & $\square^{tum}$ ACHI æquale Δ^{lo} BCD, atque hæc bina triangula ſimul conſtituunt $\square^{tum}$ BCDE: patet, $\square^{tum}$ BCDE æquale eſſe binis $\square^{tis}$ ABFG, ACHI.

Si verò AB, AC inæquales ſint, ſumptis AK, AL ſingulis æqualibus ipſi AB, jungantur BK, KL, LG, & GB.

2. Ca-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

2^{dus} Caſus, in quo A B, A C inæquales ſunt.



Deinde ſumptis A M, A N ſingulis æqualibus ipſi A C, agantur C M, M N, N I, & I C. Denique junctis B N, I K, productiſque B G, B K ad O & P, in rectis N I, C I; ſecetur E D ab A I in Q.

Quibus poſitis, patet, ut ante, $\square^{tum}$ ABFG æquale eſſe Δ^{lo} BGL vel B K L, & $\square^{tum}$ ACHI æquale Δ^{lo} M C I vel MNI: ac proinde bina hæc quadrata æqualia eſſe plano KBMNILK. Quare, cum dicantur hæc $\square^{ta}$ æqualia eſſe $\square^{to}$ B C D E, oſtendendum eſt, partes planum KBMNILK conſtituentes, contineri quoque in $\square^{to}$ BCDE. Quod hoc modo fit manifeſtum.

Figura KBEQLK utrique eſt communis, hoc eſt, ſimul in plano KBMNILK & in $\square^{to}$ BCDE continetur. Deinde bina Δ^{la} BNO, OBE, contenta in plano KBMNILK, æqualia ſunt binis Δ^{lis} BCP, P K I, contentis in $\square^{to}$ B C D E. Similiter quoque bina reliqua Δ^{la} N MB, E D I, in plano K B M N I L K contenta, æqualia ſunt binis reliquis I C D, I L K, contentis in $\square^{to}$ B C D E. Unde, cum omnes partes jam dictæ, quæ continentur in plano K B M N I L K, contineantur etiam in $\square^{to}$ B C D E, & utrobique redundet commune Δ^{lum} IQD,

IQD, ſequitur planum KBMNILK, hoc eſt, duo $\square^{ta}$ ABFG & ACHI ſimul ſumpta æqualia eſſe $\square^{to}$ BCDE.

Supplementum ſeu demonſtratio plenior.

Quoniam autem dubitare quis poſſet de æqualitate dictorum triangulorum, Sciendum eſt, in 1mo caſu deſcriptis ſuper AB & AC $\square^{tis}$ ABFG & ACHI, lineas GAC & BAI [a] rectas eſſe: itemque, GA, AB, AC, & AI omnibus inter ſe æqualibus exiſtentibus, & angulis ad A rectis, adeoque æqualibus, angulos quoque AGB, ABG, ABC, ACB, ACI, AIC, AIG, & AGI omnes [b] inter ſe æquales eſſe, & propterea [c] ſemirectos: ut & lineas GB, BC, CI, & IG omnes [d] inter ſe æquales. Id quod oſtendit, junctis GB, CI, & IG, figuram GBCI eſſe quadratam, cujus nimirum anguli recti ſunt & latera inter ſe æqualia oſtenſa. vel etiam, quòd $\square^{tum}$ BCDE, ſuper BC deſcriptum, idem ſit atque illud, quod comprehenditur 4^{or} lineis GB, BC, CI, & IG.

a ℘ 14 Primi Elem. Eucl.
b ℘ 5 Primi Elem. Eucl.
c ℘ 32 Primi Elem. Eucl.
d ℘ 4 Primi Elem. Eucl.

Eodem modo in 2do caſu erunt quadratæ, figuræ MCIN & BKLG.

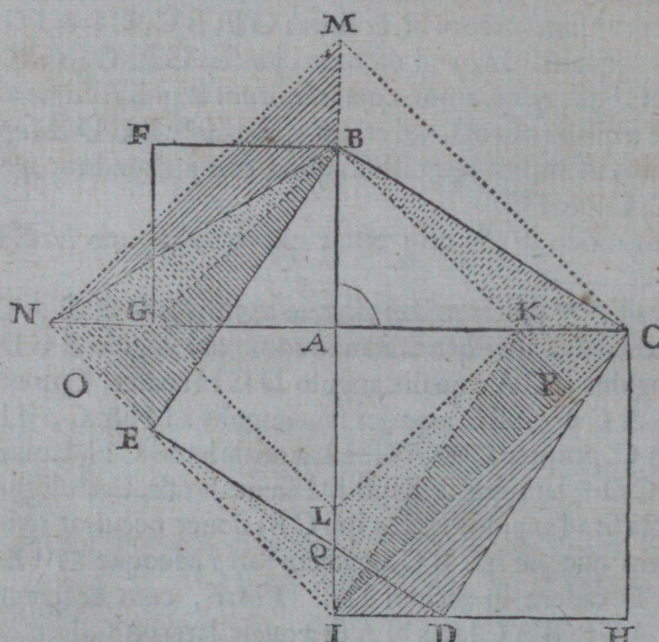
Quod ad 2^{dum} caſum attinet, in quo angulis BCD & ACH rectis exiſtentibus, ab iiſque ſubducto communi angulo ACD, relinquitur angulus BCA æqualis angulo DCH: patet, Quoniam anguli ad A & C Δ^{li} ABC æquales ſunt angulis ad H & C Δ^{li} HDC; & latus AC, propter $\square^{tum}$ ACHI, æquale lateri CH, latus quoque BC ipſi CD [e]; latuſque AB ipſi DH æquale eſſe. Unde liquet, cum CD ducta ſit ad angulos rectos ipſi CB, donec occurrat ipſi IH in D, eandem quoque ipſi BC æqualem fore: adeoque $\square^{ti}$ BCDE angulum D cadere in rectam IH. Porrò, cum rectangulorum Δ^{lorum} NAB & BAC latus NA ſit æquale lateri AC, latuſque AB utrique commune: erit etiam [f] angulus ANB ipſi BCA, & angulus NBA ipſi ABC, latuſque NB ipſi BC vel CD æquale. Eodem modo in Δ^{lis} AKI & ABC æqualia erunt latera IK & BC. Quoniam itaque anguli NBA & ABC æquales ſunt oſtenſi, erunt quoque ab iiſdem ſubductis æqualibus ſeu ſemirectis GBA & ABK, reliqui NBO & PBC æquales. Similiter, cum anguli ANB & BCA ſint æquales, ſi ipſis addantur æquales ſeu ſemirecti INA & ACI, erunt & anguli ONB & BCP æquales. Hinc, cum Δ^{lorum} ONB & BCP anguli ad N & B ſint angulis ad C & B æquales, latuſque NB æquale lateri BC, erunt quoque [g] latera NO & OB lateribus

e ℘ 26 Primi Elem. Eucl.
f ℘ 4 Primi Elem. Eucl.
g ℘ 26 Primi Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

h ꝑ 15 Primi Elem. Eucl.
i ꝑ 32 Primi Elem. Eucl.
k ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.
l ꝑ 26 Primi Elem. Eucl.

CP & PB æqualia, anguluſque N O B ipſi BPC, nec non Δ^{lum} NOB ipſi Δ^{lo} BPC. Quare, angulo GNO ut & OGN, hoc eſt, [h] AGB, ſemirecto exiſtente, adeoque [i] angulo NOG vel NOB & conſequenter [k] BOE recto, angulus etiam BPC rectus erit. Ideo, quoniã anguli OBP & EBC recti ſunt, & ab iiſdem ſubducto communi EBP, anguli OBE & P B C relinquuntur æquales, & proinde bini anguli ad O & B Δ^{li} O B E æquales ſunt binis ad P & B Δ^{li} PBC, latuſque O B æquale BP (ut oſtenſum eſt) : erit quoque latus [l] O E ipſi P C, latusque E B ipſi



m ꝑ Conſtructionem.
n ꝑ 8 Primi Elem. Eucl.
o ꝑ 6 Primi Elem. Eucl.

B C æquale: adeò ut B E perpendiculari exiſtente ipſi B C uſque ad N I, illa quoque æqualis ſit futura ipſi B C, ac proinde □^{ti} B C D E angulus E cadet in rectam N I. Præterea, cum A M ipſi A C, hoc eſt, [m] ipſi I H æqualis ſit, & AB ipſi DH (ut ſupra oſtenſum) : erit & reliqua M B reliquæ I D æqualis. Eodem modo L I æqualis erit I D. Hinc, quoniam Δ^{li} NMB ſingula latera æqualia ſunt ſingulis lateribus Δ^{li} I C D, erit quoque [n] Δ^{lum} NMB ipſi Δ^{lo} ICD æquale. Item, cum NI æqualis ſit IC, & NO æqualis P C : erit reliqua OI, hoc eſt, [o] OB, reli-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

reliquæ I P æqualis. Eſt autem & O E æqualis oſtenſa ipſi P C, hoc eſt, [p] P K; & E B, hoc eſt, B C, æqualis ipſi I K. Quare Δ^{lum} O B E ipſi Δ^{lo} IKP [q] æquale erit. Deniq;, quoniam NO, OE utraque æqualis eſt oſtenſa ipſi P C, & propterea ipſæ inter ſe æquales ſunt; & N O [r] ipſi O G: erit etiam O E ipſi O G æqualis; quæ ſi auferantur ex æqualibus O I, OB, relinquunt E I æqualem G B, hoc eſt, LK. Unde cum IE ipſi LK, ED vel BC ipſi KI, & ID ipſi IL æqualis ſit: erit itidem [s] Δ^{lum} E I D ipſi Δ^{lo} I L K æquale.

p ꝑ 6 Primi Elem. Eucl.
q ꝑ 8 Primi Elem. Eucl.
r ꝑ 6 Primi Elem. Eucl.
s ꝑ 8 Primi Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Ex hac propoſitione conſtat, ſi duo Δ^{li} rectanguli latera utcunque cognita ſint, quo pacto tertium latus incognitum inveniendum ſit. Etenim, ſi ex.gr. A B ſit 3, & A C 4, ad inveniendum B C: addatur 9, $\square^{tum}$ ex A B ad 16, $\square^{tum}$ ex A C, & ſit 25, $\square^{tum}$ ex B C. Cujus $\surd$, utpote 5, dabit quæſitum latus B C.

Cognitis autem AB & BC, ad inveniendum A C, ſubducatur 9, $\square^{tum}$ ex AB, à 25, $\square^{to}$ ex BC, & relinquitur 16, pro $\square^{to}$ ex A C, cujus radix 4, eſt A C. Eodem modo, cognitis B C & A C, ut inveniatur A B, ſubtrahendum erit 16, $\square^{tum}$ ex A B, à 25, $\square^{to}$ ex B C, & ex reliquo 9, $\surd$, quæ eſt 3, erit latus A B.

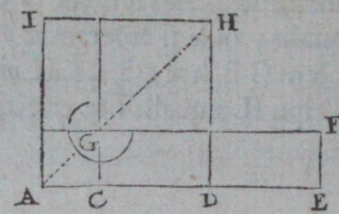
Similiter liquet, quâ ratione $\square^{tum}$ fieri poſſit, ut puta B C D E, quod ſit æquale duobus datis $\square^{tis}$ ABFG & ACHI ſimul ſumptis: nimirum ponendo A B latus unius ad rectos angulos ipſi A C lateri alterius. Quemadmodum etiam ex hac propoſitione manifeſtum eſt, quo pacto $\square^{torum}$ latera collocanda ſint, ad unum $\square^{tum}$ ex altero $\square^{to}$ tollendum, & oſtendendum reliquum $\square^{tum}$.

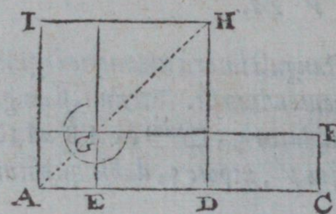
V.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales A D, D C, & ſuper utraque deſcribatur quadratum: excedet quadratum AH majoris A D quadratum G H minoris C D vel D E rectangulo A F, contento ſub aggregato & differentia earundem rectarum.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.





Quoniam enim 3 □^{la} IG, GD, & DF æqualia ſunt, quippe ejuſdem longitudinis & latitudinis: patet, ſi ex gnomone IGD auferatur □^{lum} IG, & ejus loco addatur □^{lum} DF, quòd □^{lum} AF ſit æquale gnomoni IGD. Quare cum hic gnomon ſit differẽtia, quâ □^{tum} AH ſuperat □^{tum} GH: excedet □^{tum} AH quadratũ GH rectangulo AF, contento ſub aggregato & differentia ipſarum AD, DC. Id quod cum eo convenit, quod ab Euclide in prop^{ne} 6ta libri 2^{di} Elementorum demonſtratum eſt, ubi docet: ſi CD & DE ſunt æquales, □^{lum} CAE unà cum □^{to} ex CD vel DE æquale eſſe □^{to} ex AD.

VI.

Si ex angulo B cujuſcunque trianguli ABC in latus oppoſitum AC, ceu baſin, demittatur perpendicularis BD, cadens extra vel intra triangulum ABC: erit differentia quadratorum, laterum AB, BC circa angulum B, æqualis differentiæ quadratorum à ſegmentis AD, DC, inter perpendicularem BD & baſis terminos A & C comprehenſis.

Demonſtratio.

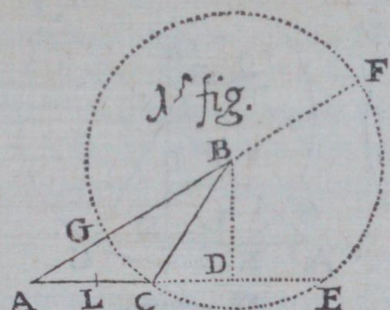
a p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.

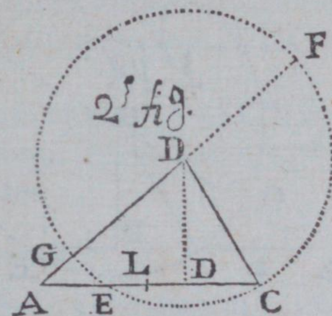
Quoniam enim [a] □^{tum} ex AB æquale eſt □^{tis} ex AD & DB, & □^{tum} ex BC æquale □^{tis} ex CD & DB: tantum excedet □^{tum} ex AB ipſum □^{tum} ex BC, quantum bina □^{ta} ex AD, DB excedunt bina ex CD, DB. Sed bina □^{ta} ex AD, DB ſuperant bina □^{ta} ex CD, DB, in quantum □^{tum} ex AD ſuperat □^{tum} ex CD. Quare & □^{tum} ex AB tantum excedet □^{tum} ex BC, quantum □^{tum} ex AD excedit □^{tum} ex CD. Quod erat demonſtrandum.

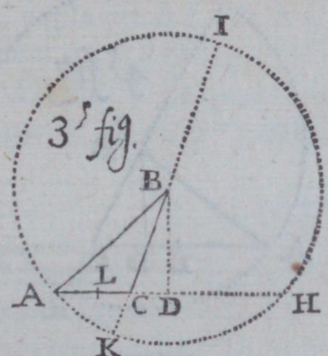
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

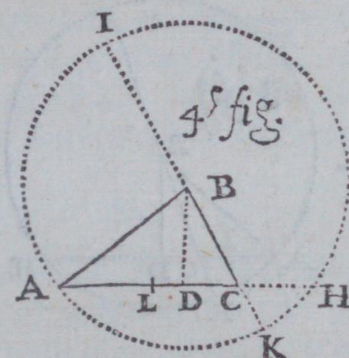
1 Corollarium.

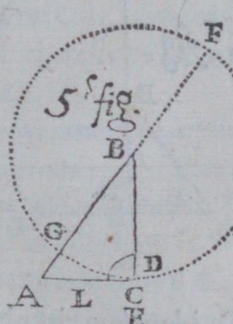
Hinc ſequitur, ſi E D ſumatur æqualis D C, quoniam [b] □tum ex AD ſuperat □tum ex D C, rectangulo CAE, contento ſub aggregato *[b] ꝑ præcedentẽ prop.*

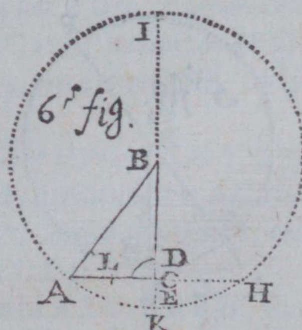








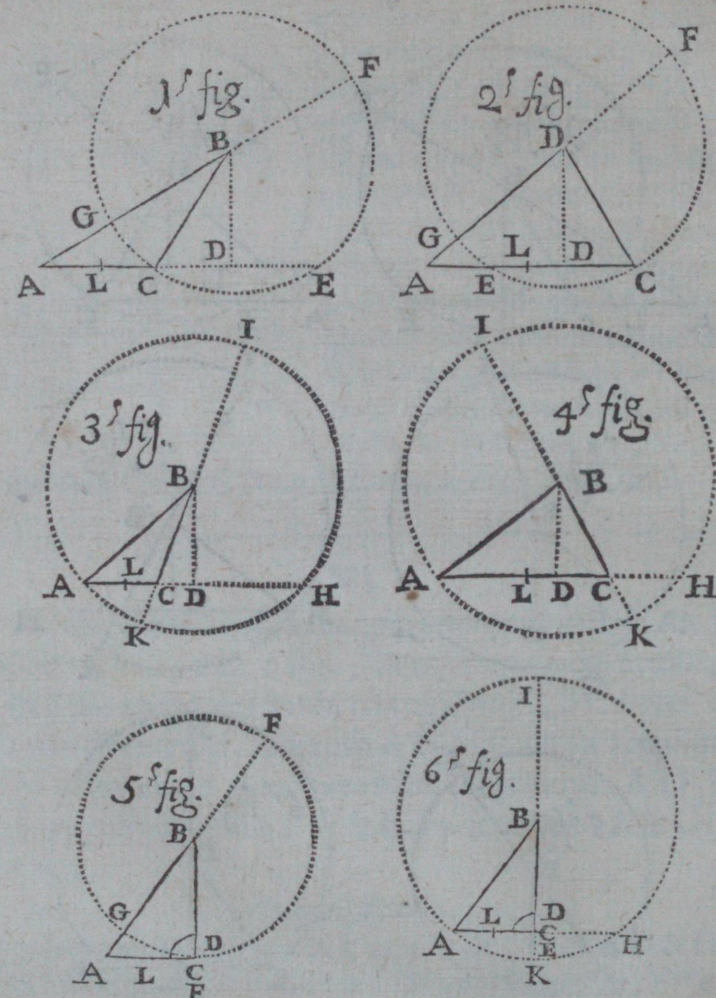




& differentiâ ipſarum A D, DC; atque etiam □tum ex A B excedat □tum ex B C rectangulo, comprehenſo ſub aggregato & differentiâ laterum A B, B C: Rectangulum C A E huic ▭lo eſſe æquale.

2 *Corollarium.*

Unde ulteriùs liquet, ſi ex B intervallo B C deſcribatur circulus, ſecans A B in G, eamq́ue productam in F, quoniam tum A F ſumma



eſt, & A G differentia ipſarum A B, B C, idemq́ue circulus tranſeat quoque per E: Quòd $\square^{lum}$ F A G ipſi $\square^{lo}$ C A E ſit æquale. Et ſi Δ^{lum} A B C fuerit rectangulum in C, quòd $\square^{lum}$ F A G æquale ſit $\square^{to}$ ex A C. Id quod ab Euclide etiam eſt oſtenſum 36ta prop^{ne} libr. 3^{tii} Elementorum.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

3 Corollarium.

Similiter patet, ſi ex B intervallo B A circulus deſcribatur, & A C, C B uſque ad circumferentiam producantur in H, I, & K, quoniam rurſus I C ſumma eſt, & C K differentia ipſarum A B, B C; atque etjam ▭^{lum} A C K, ut ſupra, (propter æqualitatem rectarum A D, D H) contentum ſub ſumma & differentia ipſarum AD, DC: Quòd ▭^{lum} I C K ſit æquale ▭^{lo} A C H.

Et ſi Δ^{lum} A B C ſit rectangulum in C, quòd ▭^{lum} I C K ſit æquale □^{to} ex A C. Id quod Euclides quoque demonſtravit 14^{tâ} prop^{ne} 2^{di} libri & 35 prop. 3 libri Elementorum.

4 Corollarium.

Unde tandem manifeſtum fit, diviſâ A C bifariam in L, quoniam tum A C dupla eſt A L, & A E dupla L D, adeoque ▭^{lum} C A E quadruplum ▭^{li} A L D: Quòd differentia □^{torum} ex AB BC, hoc eſt, ▭^{lum} FAG vel ICK ſit quadruplum ▭^{li} ALD. Id quod & à Pappo demonſtratum eſt prop^{ne} 120 libri 7 Collectionum Mathematicarum.

SCHOLIVM.

Ex hac propoſitione conſtat, quo pacto, cognitis tribus lateribus Δ^{li} *ABC,* *Inſpice 1*
inveniri poſſint ſegmenta baſis A D, D C, & perpendicularis B D. Etenim *figuram.*
ſi BD cadat extra ABC, & AB ſit, ex:gr:, 20, BC 13, & AC 11: ut inveniantur AD, DC, multiplicanda erit AF 33 per A G 7, & productum 231, hoc eſt, ▭ *FAG vel CAE, dividendum per AC 11, & habebitur AE 21. Ex qua ſubductâ A C 11, reſtabit CE 10, hoc eſt, 5, pro ED vel DC. Cui ſi addatur AC 11, fiet AD 16.*

Vel etiam hoc modo: multiplicando ſcilicet IC 33 per CK 7, & productum 231, hoc eſt, aream ▭^{li} *I C K vel A C H, dividendo per A C 11, orieturq;* *Inſpice 3*
C H 21. Cui addendo A C 11, fiet A H 32. Hujus ſemiſſis 16, erit A D vel *figuram.*
DH. Ex qua ſubductâ AC 11, relinquitur C D 5.

At verò perpendiculari B D cadente intra A B C, ſi A B ſit, verb: gr: 15,
B C 13, & AC 14: ad inveniendas A D & DC multiplicetur AF 28 per AG *Inſpice 2*
2, & fit 56, ▭ *FAG vel CAE. Quod diviſum per AC 14, dat AE 4. Hæc* *figuram.*
autem ex AC 14 ſubducta, relinquit EC 10, hoc eſt, 5, pro ED vel DC. Quâ ex AC 14 ſublatâ, reſtabit AD 9.

Vel etiam ſic: Multiplicetur I C 28 per CK 2, & fit ▭ *ICK vel A C H 56. Quod*

Inſpice 4 figuram. 56. *Quod diviſum per* A C 14, *dat* C H 4. *Huic ſi addatur* A C 14, *fiet* A H 18, *cujus ſemiſſis* 9 *erit ipſa* A D *vel* D H. *Quæ ex* A C 14 *ſubducta relinquit* D C 5.

E quibus facilè porrò perpendicularis B D *inveniri poteſt, quemadmodum in ſcholio prop*[nis] 4 *hujus eſt oſtenſum, vel breviùs, hoc modo: Quoniam differentia quadratorum ex* CD, CB, *per præced. prop. eſt æqualis rectangulo contento ſub aggregato & differentia ipſarum* C D, C B; *atque etiam ſubducto* □ C D *à* □ CB *per* 4[tam] *hujus relinquatur* □ BD: *Erit* ▭[lum] *comprehenſum ſub aggregato & differentia ipſarum* C D, C B *æquale* □[to] *ex* B D. *Quare ſi multiplicetur* 18, *ſumma ipſarum* C D, C B, *per* 8, *earundem differentiam, erit* 12, √ *nimirum producti* 144, *ipſa longitudo* BD.

Hìc quoque non ineptè oſtendi poteſt, ſi △[li] *rectanguli* A B C *cognoſcatur unum latus circa rectum, ut* AC, *& aggregatum aut differentia alterius lateris* B C *& Hypotenuſæ* A B, *Quo pacto latera* A B, B C *ſeorſim ſint invenienda.*

Si enim A C *ſit, ex: gr:,* 8, *& ſumma ipſarum* AB, BC, *hoc eſt,* AF *vel* I C

p 2 & 3 Corollarium. 32: *Dividatur* 64, □ A C, *hoc eſt,* ▭ F A G *vel* ICK, *per* A F *vel* IC 32, *orieturq́;* AG *vel* CK 2, *differentia ipſarum* A B, BC. *Hinc ſi ex* AF 32 *auferatur* AG 2, *relinquetur* GF 30. *Cujus ſemiſſis* 15 *eſt ipſa* GB, BF, *vel* B C. *Huic ſi addatur* AG 2, *fit* AB 7. *Vel etiam ipſi* IC 32 *addendo* C K 2, *& habetur* I K 34, *cujus ſemiſſis* IB *vel* B K 17 *erit ipſa* A B. *E qua ſubducta* CK 2 *relinquit* C B 15.

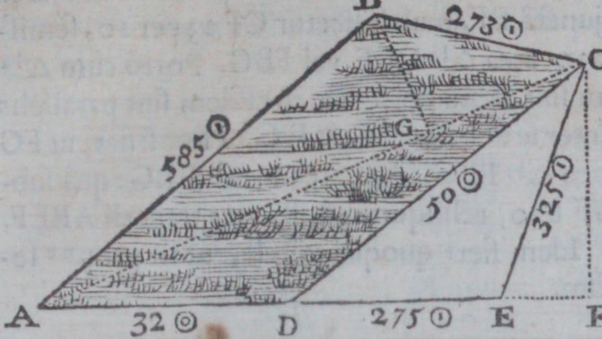
At verò exiſtente A C 8, *&* A G *vel* C K 2, *ut inveniantur* A B *&* B C: *dividatur rurſus* 64, □ AC, *hoc eſt,* ▭ F A G *vel* ICK, *per* A G *vel* CK 2, *orieturq́;* AF *vel* IC 32. *E qua ſubductâ* A G 2, *reſtabit* GF 30. *Cujus ſemiſſis* 15, *erit ipſa* G B, B F, *vel* BC. *Huic ſi addatur* AG 2, *fiet* AB 17.

Vel etiam ipſi IC 32 *addendo* C K 2, *erit ſumma* I K 34, *cujus ſemiſſis* 17 *erit ipſa* I B, B K, *vel* A B. *E qua ſublatâ* C K 2, *remanet* 15 *pro* B C.

VII.

Paludis vel ſtagni quadrilateri A B C D cognitis lateribus A B 58, 5①, B C 27, 3①, C D 50⓪, & A D 32⓪; productóque latere A D ad E; ita ut D E ſit 27, 5①, & EC 32, 5①: invenire aream ABCD.

Quæ-

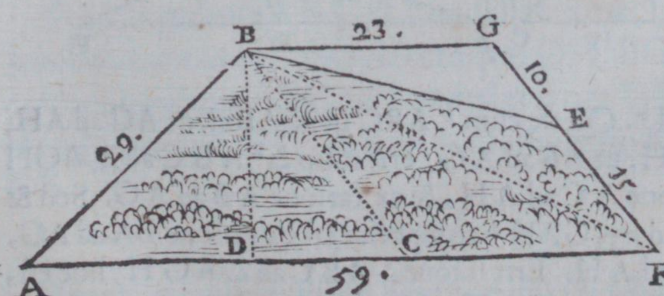


Quæratur, ut in præcedenti propoſitione eſt oſtenſum, ex tribus $\triangle^{li}$ D C E cognitis lateribus, ſegmentum externum E F, ut & perpendicularis CF. Fitque EF 125①, & F C 30⓪. Tum junctâ A C, multiplicetur A D 32⓪ per 15⓪, ſemiſſem nempe ipſius FC: & prodibit [a] 480⓪, area $\triangle^{li}$ A C D. Deinde additis A D 32⓪, D E 27, 5①, & E F 12, 5①, fit ſumma A F 72⓪: cujus $\square^{to}$, utpote 5184⓪, ſi addatur 900⓪, □ FC, habebitur 6084⓪, [b] □ AC. Unde radix, ut 78⓪, erit ipſa A C. Jam quæratur [c] per tria latera $\triangle^{li}$ A B C perpendicularis B G, fitque B G 16, 38②. Cujus ſemiſſis ut 8, 19 ② ſi multiplicetur per AC 78⓪, exſurget 638, 82②, area $\triangle^{li}$ ABC. Quæ addita ad 480⓪, aream ſc. $\triangle^{li}$ A C D, dabit 1118, 82②, aream totius quadrilateri ABCD, utputa 1118 □ decempedarum, & 82 □ pedum. Quæ erat invenienda.

[a] ꝑ vulgarem regulam, inveniendi areã trianguli.
[b] ꝑ 4 hujus, vel ꝑ 47 Primi Elem. Eucl.
[c] ut in præced. prop. eſt oſtenſum.

VIII.

Latifundii quadrilateri A B E F, menſuranti invii, cognitis lateribus A B 29, AF 59, & FE 15 perticarum, productóque latere FE ad G, ita ut BG æquidiſtet ipſi AF, invenire aream ABEF, ſi EG ſit 10, & BG 23 perticarum.



Ductâ B C parallelâ G F, erit B G [a] æqualis C F. Quare, ſi BG 23 auferatur ex A F 59, reſtabit C A 36, cumque B C ſit æqualis G F 25: patet, ſi, ut in 6ta propoſitione per 3^{a} latera $\triangle^{li}$ A B C quæratur perpendicularis B D, ipſam fore 20. Cujus ſemiſſis 10 ſi multiplicetur

[a] ꝑ 34 Primi Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

b ꝑ vulgarem regulam inveniendi aream trapezii cũ duobus lateribus parallelis.

c ꝑ vulgarem regulam inveniendi aream trianguli.

d ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.

per 82, ſummam laterum parallelorum BG, A F, [b] prodibit 820, area trapezii ABGF. Tum junctâ BF, multiplicetur CF 23 per 10, ſemiſſem ipſius BD, & [c] fit 230, area △[li] CBF vel FBG. Porrò cum △[la] FBG & EBG ejuſdem ſint altitudinis, ſeu in eiſdem ſint parallelis CB, FG, ac proinde [d] inter ſe ut baſes FG & EG: Hinc ſi fiat, ut FG 25 ad EG 10, ſic 230 area △[li] FBG, ad 92 aream △[li] EBG: quâ ſubductâ ex tota area ABGF 820, relinquitur 728, area trapezii ABEF. Quæ erat invenienda. Idem fieri quoque poteſt, ut in prop[ne] ſequenti 10[ma] eſt oſtenſum.

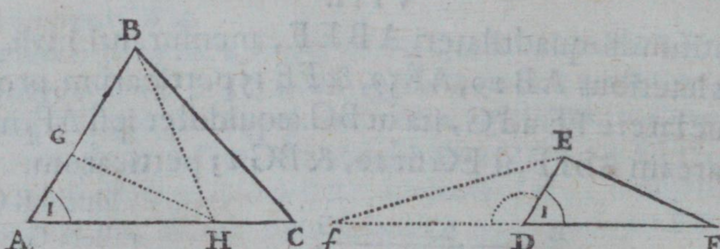
IX.

Triangula ABC, DEF æqualem angulum 1 habentia inter ſe ſunt, ut rectangula BAC, EDF, contenta ſub lateribus BA, AC & ED, DC circa æqualem angulum.

Demonſtratio.

a ꝑ 4 Primi Elem. Eucl.

Sumptis enim AG, AH æqualibus DE, DF, agantur GH, HB, eritque [a] △ AGH æquale △[lo] DEF. Eſt autem ratio △[li] ABC ad △ AGH compoſita ex ratione △[li] ABC ad △ ABH, & ex ratione △[li]



b Eſt enim ratio extremorum cõpoſita ex rationibus intermediis.

c ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.

d ꝑ 23 Sexti Elem. Eucl.

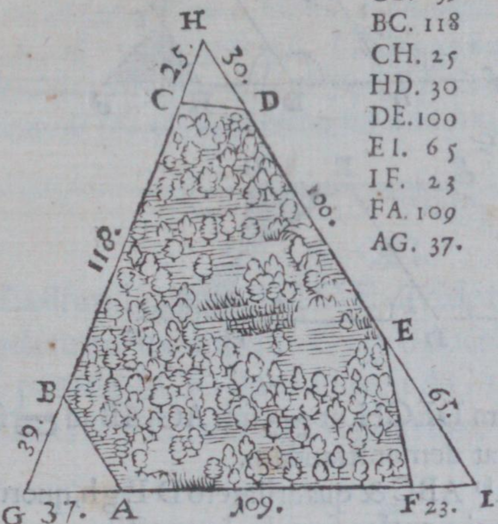
ABH ad △ AGH [b]. Quare cum [c] ABC ſit ad ABH, ut AC ad AH; & ABH ad AGH, ut AB ad AG: erit ratio △[li] ABC ad △ AGH compoſita ex ratione AC ad AH, & ex ratione AB ad AG. Sed & ratio ▭[li] BAC ad ▭ GAH [d] compoſita eſt ex ratione BA ad AG, & ex ratione AC ad AH. Erit itaque △ ABC ad △ AGH, hoc eſt, DEF, ut ▭ BAC ad ▭ GAH vel EDF. Quod erat demonſtrandum.

Idem patet in △[lis] ABC, DEf, quorum anguli ad A & D duobus ſimul

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſimul rectis ſunt æquales: quoniam, *f* D æquali aſſumptâ & in directum ipſi D F, △ *f* D E ipſi △ DEF e eſt æquale, ut & ▭ *f* DE ipſi ▭ EDF. *e p 38 Primi Elem. Eucl.*

SCHOLIUM.



GB. 39
BC. 118
CH. 25
HD. 30
DE. 100
EI. 65
IF. 23
FA. 109
AG. 37.

Hinc liquet, quâ ratione inveniri queat area ſaltus aut ſtagni, quod triangulo includi poteſt. Vt ex: gr: ad inveniendam aream hexagoni ABCDEF, triangulo G H I incluſi, cujus omnes lineæ, in margine notatæ, cognitæ ſunt. Quæratur 1^{mum} *per tria latera f area* △^{li} *G H I* 14196. *Tum fiat, ut* 30758, ▭ *HGI, ad* 1443, ▭ *B G A, ita* 14196, *ad* 666, *aream* △^{li} *GBA. Rurſus fiat, ut* 35490, ▭ *G H I ad* 750, ▭ *C H D, ita* 14196 *ad* 300, *aream* △^{li} *CHD; ac denique ut* 32955, ▭ *G I H ad* 1495, ▭ *F I E, ita* 14196 *ad* 644, *aream* △^{li} *FEI. Vnde additis* 666, 300, & 644, *ſumma* 1610 *ſubtrahatur ex* 14196; & *relinquetur* 12586, *area hexagoni ABCDEF.* *f ut in 7 prop. hujus.*

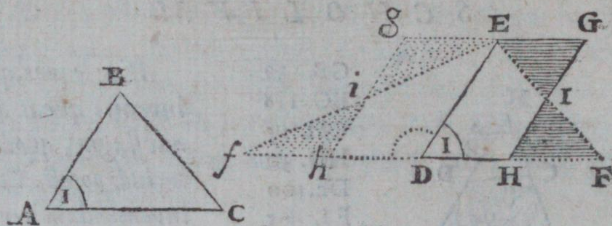
X.

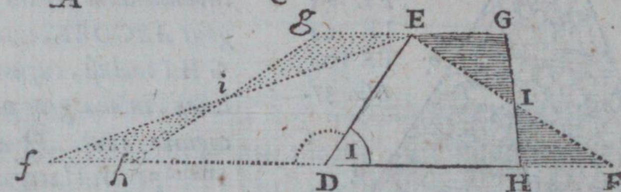
Si triangulum A B C & quadrilaterum D E G H æqualem habeant angulum I, lateráque DH, EG ſint parallela: erit triangulum ABC ad quadrilaterum DE GH, ſicut rectangulum ſub A C, A B ad rectangulum ſub D H, E G & DE.

Demonſtratio.

Sumptâ HF æquali EG in directum ipſi DH, jungatur E F, ſecans H G in I: eritque △ D E F æquale quadrilatero D E G H, propter æqualia △^{la} EGI & HFI a. Hinc, cum D F ſit ſumma ipſarum DH, *a p 29 & 26 Primi Elem. Eucl.*

EG, & per præcedentem propoſitionem △ ABC ſit ad △ DEF, hoc eſt, ad quadrilaterum DEGH, ſicut ▭ CAB ad ▭ FDE: patet,



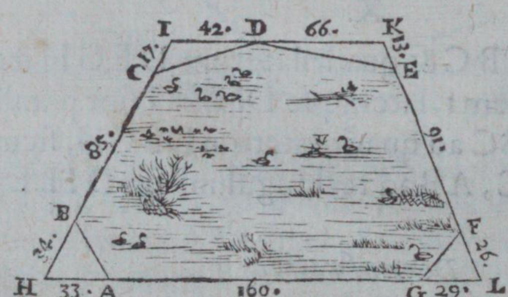


△ ABC eſſe ad quadrilaterum DEGH, ut ▭ ſub AG, AB ad ▭ ſub DH, EG & DE. Quod erat demonſtrandum.

Idem ſimiliter patet in $\triangle^{lo}$ ABC & quadrilatero DEgh, quorum anguli ad A & D ſimul ſumpti æquales ſunt duobus rectis.

SCHOLIUM.

Hinc manifeſtum eſt, quo pacto area ſaltus ſtagnivé inveniri queat, quod quadrilatero includi poteſt, habente duo latera parallela. Si enim, verbi gr.,



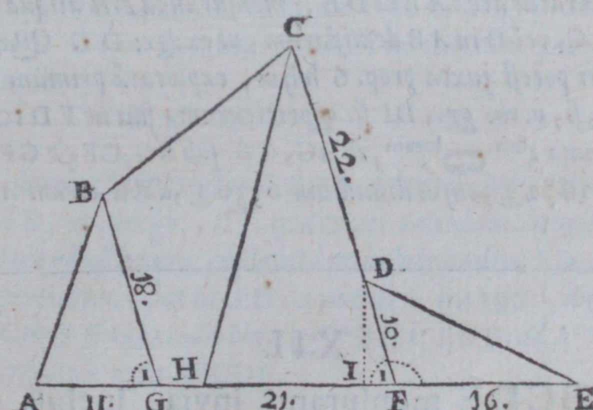
HB. 34
BC. 85
CI. 17
ID. 42
DK. 66
KE. 13
EF. 91
FL. 26
LG. 29
GA. 160
AH. 33.

invenienda ſit area heptagoni ABCDEFG, comprehenſi quadrilatero HIKL, cujus latera IK, HL ſunt parallela, & ſegmenta, ut in margine, cognita: quæ-

quæratur primò, ut in 8va prop^{ne} eſt oſtenſum, area trapezii HIKL 19800. Tum fiat, ut 44880, ▭ ſub HL, IK & HI, ad 1122, ▭ ſub HA, HB, ita 19800 ad 495, aream △^{li} HBA. Deinde, ut 44880, ▭ ſub HL, IK & HI, ad 714, ▭ ſub CI, ID, ita 19800 ad 315, aream △^{li} CID. Rurſus, ut 42900, ▭ ſub HL, IK & LK, ad 858, ▭ ſub DK, KE, ita 19800 ad 396, aream △^{li} DKE. Et denique ut 42900, ▭ ſub HL, IK & LK, ad 754, ▭ ſub GL, LF, ita 19800 ad 348, aream △^{li} GFL. Vnde additis 495, 315, 396, & 348, ſi ſumma 1554 ſubducatur ex 19800, relinquetur 18246, area heptagoni ABCDEFG, quæſita.

XI.

Latifundium ABCDE dividere bifariam rectâ CH, prodeunte ex angulo C; productâ CD ad F, ductâque BG parallelâ CF: datis autem AG 11, GB 18, GF 21, FD 10, DC 22, & FC 16 decempedarum.



Conſtructio.

Ex 1248, ſummâ rectangulorum AGB ex BG, CF & GF, ſubtrahatur 160, ▭ DFE, ac reliqui 1088 ſemiſſis 544 dividatur per CF 32, orietur HF 17 decempedarum.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.

Per prop. præced. areæ ABG, GBCF, FDE, ut & area HCF inter ſe ſunt, ut $\square^{la}$ ſub AG, GB, ſub BG, CF & GF, ſub DF, FE, & ſub HF, FC. Hinc ſi CH dividat aream ABCDE bifariam, erunt bina rectangula ſub HF, FC & ſub DF, FE dimidium trium prædictorum ſub AG, GB, ſub BG, CF & GF, & ſub DF, FE, hoc eſt, æqualia erunt ſemiſsi $\square^{li}$ ſub AG, GB, ſemiſsi $\square^{li}$ ſub BG, CF & GF, & ſemiſsi $\square^{li}$ ſub DF, FE. A quibus ſi utrinque auferatur □ ſub DF, FE, erit reliquum □ ſub HF, FC æquale ſemiſsi rectangulorum ſub AG, GB, & ſub BG, CF & GF, dempto ex eiſdem dimidio $\square^{lo}$ ſub DF, FE. E quibus patet, additis $\square^{lis}$ ſub AG, GB, & ſub BG, FC & GF, ſi ex ſumma auferatur □ ſub DF, FE, ſemiſſem reliqui fore □ ſub HF, FC. Id quod diviſum per CF, unum latus, dat alterum HF. Quod quærebatur.

SCHOLIUM.

Porrò ſi quæratur area ABCDE, menſuranda erit aliqua perpendicularium ex B, C, vel D in AE demiſſarum, ut ex: gr: DI. Quæ & per calculum obtineri poteſt juxta prop. 6 hujus, exploratâ primùm longitudine DE. Quare, ſi, verb. gr., DI ſit 9 perticarum, ſiat ut FD 10, ad DI 9, ita 1408, ſumma 3um $\square^{lorum}$ *ſub AG, GB, ſub BG, CF & GF, & ſub DF, FE, ad* 4^{tum} *12672①, cujus dimidium 6336①, dabit aream ABCDE.*

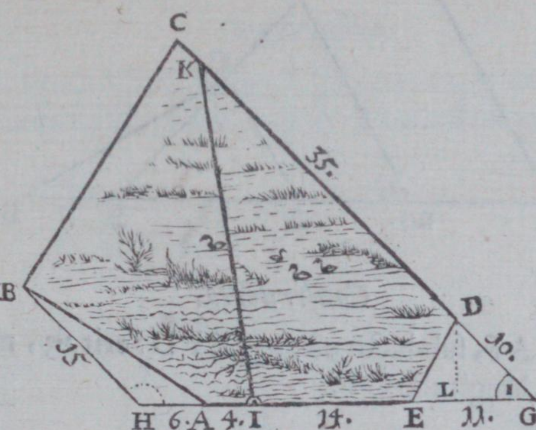
XII.

Area ABCDE menſuranti invia, incluſa trapezio HBCG, cujus latera HB & GC ſunt parallela, dividenda eſt bifariam, rectâ IK, prodeunte ex dato puncto I in latere AE. Jam quæritur, ſi BH ſit 15, HA 6, AI 4, IE 14, EG 11, GD 10, & DC 35 pertic. ſeu decempedarum, quanta ſit, futura CK?

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio.

Subducto 90, $\square^{lo}$ BHA, ex 2210, ſummâ $\square^{lorum}$ EGD, & ſub BH, CG & HG, reliqui 2120 ſemiſsis 1060 ſi dividatur per IG 25,



orietur GK $42\frac{2}{5}$ ſeu 424①. Quæ ex tota GC 45⓪ ablata, relinquit CD 26①. Cujus demonſtratio fit ad modum prop^{nis} proximè præcedentis.

SCHOLIVM.

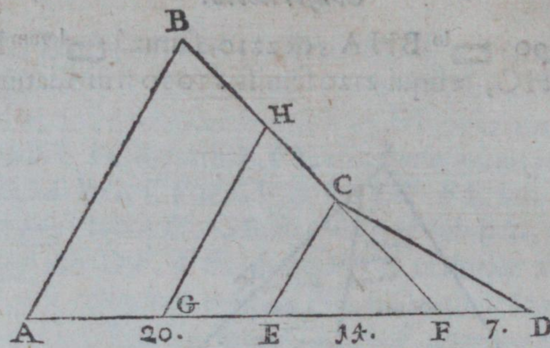
Porrò ad inveniendam aream ABCDE, metienda erit una perpendicularium ex B vel D, ut, ex: gr:, DL. quæ & per calculum obtineri poteſt, ut in 6ta *propoſitione eſt oſtenſum, exploratâ priùs longitudine ED. Hinc, ſi DL ſit ex: gr: 6 pertiarum: ſiat ut GD 10 ad DL 6, ita 1900, differentia, quâ* $\square$ *ſub BH, CG & HG excedit bina* $\square^{la}$ *BHA, EGD, ad* 4^{tum} 1140. *Cujus ſemiſſis 570, erit area ABCDE.*

XIII.

Latifundium quadrangulum ABCD, cujus latus BC eſt productum ad F, in eoque ducta CE parallela ipſi AB, dividendum eſt bifariam rectâ GH ipſi AB parallelâ: Quæritur punctum G, ubi illa incidet in rectam AD, ſi AE ſit 20, EF 14, & FD 7 perticarum?

Con-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Conſtructio.

Ex 1156, □ AF, ſubducto 98, ▭ EFD: erit 23, radix ex 529, ſemiſſe reliqui, longitudo GF.

Demonſtratio.

Per 19 prop: 6ti lib: Elem. Euclidis △ ABF eſt ad △ ECF, ut □ AF ad □ EF. Eſt autem [a] △ ECF ad △ FCD, ut EF ad FD, hoc eſt, aſſumptâ communi altitudine EF, ut □ ex EF ad ▭ EFD. Unde & [b] △ ABF ad △ FCD erit, ut □ ex AF ad ▭ EFD. Porrò [c] △ ABF eſt quoque ad △ GHF, ut □ ex AF ad □ ex GF. Quare △la ABF, GHF, & FCD inter ſe erunt, ut □ta ex AF, GF, & ▭ EFD inter ſe. Eſt autem per conſtructionẽ □ ex GF dimidium differentiæ, quâ □ ex AF excedit ▭ EFD. Unde & △ GHF dimidium erit differentiæ, quâ △ ABF excedit △ FCD. Quare ſi illîc ſemel & hîc bis addatur △ FCD, erunt △la GHF & FCD ſimul ſumpta, hoc eſt, area GHCD, dimidium △lorum ABF, & FCD ſimul ſumptorum, hoc eſt, dimidium quadranguli ABCD; adeóque recta GH dividens ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

a p 1 Sexti Elem. Eucl.
b p 22 Quinti Elem. Eucl.
c p 19 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex oſtenſis patet, △ ABF eſſe ad △ FCD, ut □ AF ad ▭ EFD.

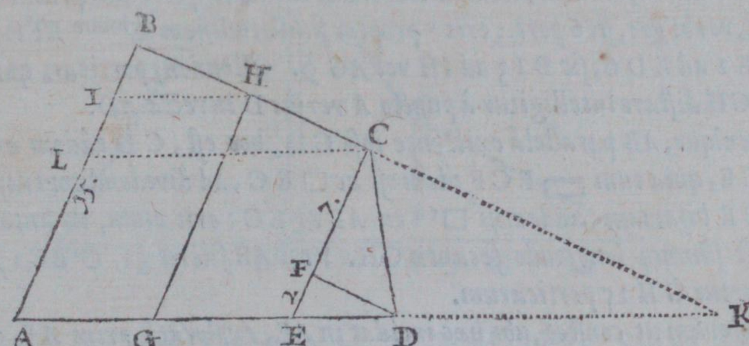
XIV.

Fundus quadrangulus ABCD, in quo CE parallela ducta eſt

eſt ipſi A B, & D F ipſi B C, dividendus eſt bifariam rectâ GH ipſi A B parallelâ. Quæritur, quâ ratione id fieri debeat, ut & quanta futura ſit longitudo lineæ G H, ſi A B ſit 15, E F 2, & F C 7 perticarum.

Conſtructio.

Additis 225, □ AB, & 63, ▭ ECF, erit 12, √ ex ſemiſſe ſummæ, longitudo lineæ G H. Hinc ſi ab A ad I menſurentur 12 perticæ, &



ducatur IH ipſi AD parallela, donec occurrat ipſi BC in H: erit HG, ducta ex H ipſi AB parallela, ſecans quæſita.

Demonſtratio.

Etenim productis AD, BC donec concurrant in K, erit [a] △ A B K ad △ E C K, ut □ A B ad □ EC. Eſt autem [b] △ E C K ad △ D C K, ut EK ad DK, vel EC ad CF, hoc eſt, aſſumptâ communi altitudine EC, ut □ EC ad ▭ ECF. Erit igitur [c] △ ABK ad △ DCK, ut □ A B ad ▭ ECF. Sed ut △ ABK eſt ad △ G H K, ita quoque [d] eſt □ A B ad □ GH. Unde $\triangle^{la}$ ABK, GHK, & D C K inter ſe erunt, ſicut $\square^{ta}$ ex AB, GH, & ▭ ECF inter ſe. At verò per conſtr. □ G H dimidium eſt $\square^{ti}$ AB & $▭^{li}$ ECF. Quare etiam △ G H K dimidium erit $\triangle^{lorum}$ A B K & D C K. Jam cum bina hæc bis contineant △ D C K & ſemel quadrangulum A B C D, ſed G H K ſemel tantùm idem △ DCK unà cum trapezio GHCD: patet △ DCK ſemel, unà cum trapezio GHCD, dimidium eſſe ejuſdem $\triangle^{li}$ DCK bis ſumpti, unà cum quadrangulo A B C D; adeóque ſi illîc ſemel & hîc bis auferatur

a p 19 Sexti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 22 Quinti Elem. Eucl.
d p 19 Sexti Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

△DCK, reliquum prius GHCD dimidium eſſe reliqui poſterioris ABCD: ac proinde lineam GH ſecare quadrangulum ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex demonſtratis patet: △ ABK eſſe ad △ DCK, ut □ AB ad ▭ ECF.

SCHOLIVM.

Porrò, ut inveniatur, ubinam GH cadat in AD, exploranda priùs erit ED, quæ ſi, verb: gr:, ſit 6 pert.; erit [e] *propter ſimilitudinem △lorum EFD, IBH, ut FE 2 ad ED 6, ſic BI 3 ad IH vel AG 9. Oſtendens perticas, quibus ſecans GH diſtare intelligitur à puncto A verſùs D in recta AD.*

e p 4 Sexti Elem. Eucl.

Denique, AB parallelâ exiſtente ipſi CD, hoc eſt, CD eâdem exiſtente quæ CE, quia tum ▭ ECF idem eſt ac □ EC, ad dividendum trapezium ABCE bifariam, addemus □ta ex AB & EC: erit enim, ut ante, √ ex ſemiſſe ſummæ longitudo ſecantis GH. Vt ſi AB fuerit 31, & EC 17 pert., invenietur GH 25 perticarum.

Cæterùm ut conſtet, ubi hæc incidat in AE, exploratâ prius AE, quæ ſit, verb: gr:, 21 pert.; ſubtrahemus GH, hoc eſt, AI 25, ex AB 31, & reſtabit IB 6; nec non EC, hoc eſt, AL 17, ex AB 31, & reſtabit LB 14. Tum fiat propter △la ſimilia BLC & BIH, ut BL 14 ad LC, hoc eſt, AE 21, ſic BI 6 ad IH vel AG 9. Eodem modo ſi GH dividat ABCE, ut ante, erit □ ex GK ſemiſſis □torum ex AK & EK.

XV.

Agrum quadrangulum ABCD, in quo BE, CF perpendiculares ſunt ipſi AD, & BC producta ad G, dividere bifariam rectâ HI ad AD perpendiculari, & invenire in quod punctum ipſius AD incidat, ſi AE ſit 13, EF 9, FG 5, & GD 8 perticarum.

Conſtructio.

Subducto 40, ▭ FGD, ex 378, ▭ AGE: erit 13, √ ex 169, ſemiſſe reliqui, longitudo HG.

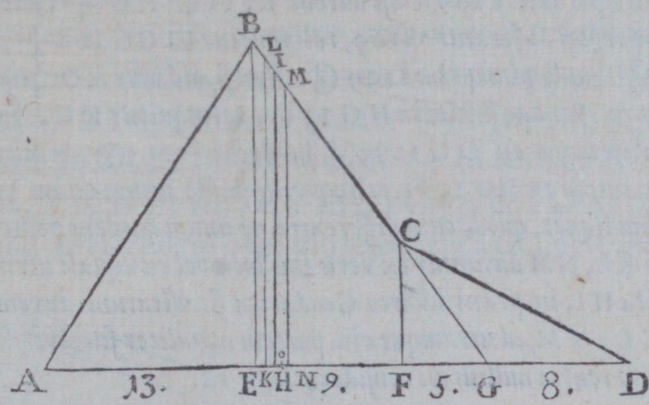
De-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.

Per 1mam prop. 6 lib. Elem. Eucl. △ ABG eſt ad △ EBG, ut AG ad EG, hoc eſt, aſſumptâ communi altitudine EG, ut ▭ AGE ad □ EG. Eſt autem [a] △ EBG ad △ HIG, ut □ EG ad □ HG. Quare

[a] p 19 Sext Elem. Eucl



[b] & △ ABG ad △ HIG erit, ut ▭ AGE ad □ HG. Sed ut △ HIG eſt ad △ GCD, ita eſt, per coroll. 13tiæ propnis hujus, □ HG ad ▭ FGD. Unde conſtat △la ABG, HIG, & GCD inter ſe eſſe, ſicut ▭ AGE, □ HG, & ▭ FGD inter ſe ſunt. Jam verò per conſtructionem □ HG eſt ſemiſſis differentiæ, quâ ▭ AGE ſuperat ▭ FGD. Quare & △ HIG ſemiſſis erit differentiæ, quâ △ ABG ſuperat △ GCD. Hinc ſi illîc ſemel & hîc bis addatur △ BCD, erunt bina △la HIG, GCD, hoc eſt, area HICD, ſemiſſis binorum △rum ABG, GCD, hoc eſt, ſemiſsis quadranguli ABCD: ac proinde linea HI ſecans ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

[b] p 22 Quinti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex demonſtratis patet: △ ABG eſſe ad △ HIG, ut ▭ AGE ad □ HG: itemque [c] ABG ad GCD, ut ▭ AGE ad ▭ FGD,

[c] p 22 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Quoniam in his regionibus foßis communiter agri diſtingui ſolent, hinc ſi ad diſtinguendas prædictas æquales partes, foßa communis fodienda ſit, puta, KLMN datæ latitudinis, verb: gr:, 1 perticæ ſeu decempedæ; ita ut abſciſſæ

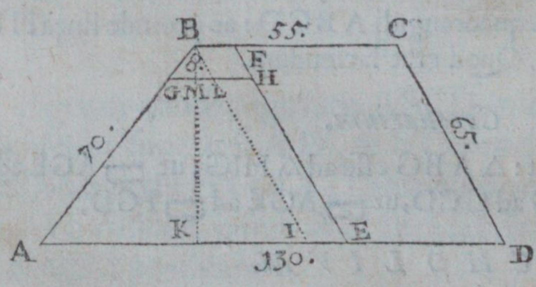
 partes

partes A B L K, & NMCD ſint æquales: Sciendum eſt, quòd, ſubductis hiſce partibus æqualibus ex æqualibus ABIH & H I C D, reliquæ partes KLIH & HIMN quoque ſint æquales, idcirco etiam ut in Coroll. præced. prop. □ HG dimidium ſit futurum □torum K G & N G. Quare, ſi ad inveniendas K H & HN, KN in O biſariam ſecetur, ac inde quoque [e] □ta KO & OG ſimul ſint dimidium □torum KG & N G: conſtat bina □ta K O & O G æqualia eſſe □to H G, adeóque valere 169. Eſt autem KI 1, & K O $\frac{1}{2}$, adeóque □ KO $\frac{1}{4}$. Hoc ergo ſi auferatur ex 169, relinquetur □ OG 168 $\frac{3}{4}$, hoc eſt, OG √ 168 $\frac{3}{4}$. paulò plus quàm 1299 ②. Cui ſi addatur K O $\frac{1}{2}$ ſeu 5 ①, ſit K G 1349 ②. Ex hac ſubductâ H G 13 ⓪, relinquitur K H, paulò plus quàm 49 ②: itemque ex O G 1299 ② ſubductâ ON 5 ①, remanet N G 1294 ②. Hæc autem ex HG 13 ⓪, relinquetur paulò minus quàm 51 ②, pro HN. Ex quibus liquet, quòd, cum differentia ne unum quidem pollicem conſiciat, ſi lineæ KL, NM ducuntur ex veris ſuis locis vel ex æquali utrinque latitudine à recta H I, in praxi idcirco Geodætica ſit uſitatum, inventâ rectâ H I, rectas K L, N M ad utramque ejus partem æqualiter ſumere, ſiquidem tam exigua differentia nullius ibi conſiderationis eſt.

[e] *p 10 Secundi Elem. Eucl.*

XVI.

Trapezium ABCD, cujus latera B C & A D ſunt parallela, dividere, ita ut, dempto communi itinere GBFH latitudinis BM 8 pedum, parallelogrammum E F C D ſit æquale trapezio AGHE; & invenire A E vel E D, diſtantiam ſecantis F E ab angulo A vel D, ſi A B ſit 70, B C 55, CD 65, & AD 150 pedum.



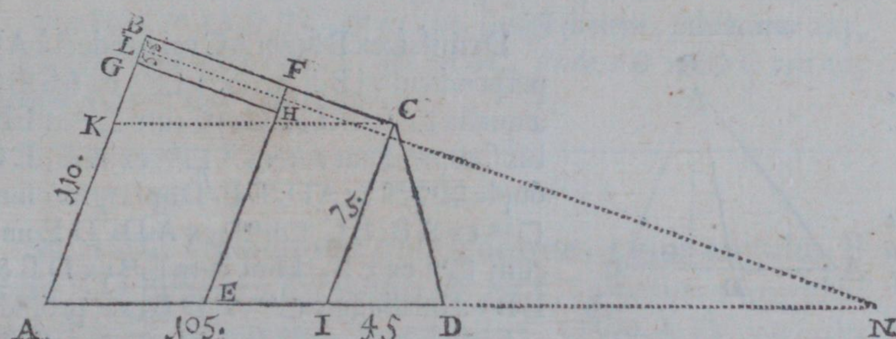
Ductâ BI parallelâ C D, quæratur ut in 8va prop. hujus latitudo B K 56. Tum fiat, ut BK 56 ad A I 75, ita B M 8 ad G L 10 $\frac{5}{7}$. Quæ addita ſummæ ipſarum BC, AD, 185, dat 195 $\frac{5}{7}$, ſummam ipſarum G H, F C, & AD. Hinc, cum partes AGHE & EFCD ponantur æquales, ac proinde B K 56, latitudo partis E F C D, ſit ad MK 48, latitudinem partis AGHE, ſicut ſumma ipſarum G H, A E ad

ad ſummam ipſarum FC, ED: patet, ſi fiat ut 104, ſumma ipſarum BK, MK, ad MK 48, ita 195 $\frac{5}{7}$ ad 90 $\frac{3}{91}$, ſummam ipſarum FC, ED. Unde FC vel ED erit 45 $\frac{15}{91}$ pedum, adeóque AE 84 $\frac{76}{91}$ pedum. Quod erat inveniendum.

XVII.

Trapezium ABCD, in quo CI ducta eſt parallela lateri AB, dividere; ita ut, dempto communi itinere ſeu parallelogrammo GBFH, cujus latus GB ſit 10 pedum, partes AGHE & EFCD ſint æquales, & invenire punctum E in recta AD, in quod incidit recta ſecans EF ipſi AB parallela, ſi AB ſit 110, AI 105, IC 75, & ID 45 pedum.

Ad quod inveniendum operatio inſtituenda eſt, ut ſequitur.



Add. { AB. 110
IC. 75
ſumma. 185
per AI. 105
925
185
ABCI. 19425
add. ICD. 3375
ſumma ABCD. 22800
ſemiſſis ALME. 11400

Mult. IC. 75
per ID. 45
375
300
ICD. 3375

Ex AB. 110
ſubtr. IC vel AK. 75
rel KB. 35 —— KC vel AI 105 —— AL. 105 | AN. 315

ſubt. { AB. 110
LB. 5

per AL. 105
1575
315
ALN. 33075
ſubt. ALME. 11400
EMN. 21675 | □ EN. 65025

Mult. KC 105
per KB. 35
525
315
KBC. 3675 — □ KC. 11025
vel, KB. 35 —— KC. 105 —— EMN. 21675 | □ EN. 65025

KC. 105
105
525
105
□ KC. 11025

Unde

Unde extractâ radice, invenietur EN 255. Quæ ſubducta ex AN 315, relinquit AE 60. Oſtendens quot pedes ſecans EF cadit à puncto A verſus punctum D, ſuper latere AD.

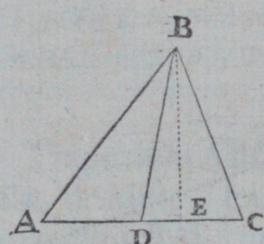
XVIII.

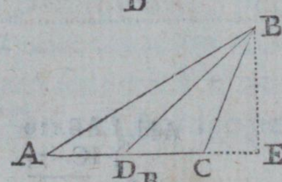
122 prop. 7 libri Pappi Alexandrini.

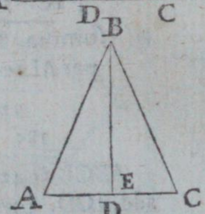
Si ex angulo B cujuſcunque trianguli ABC ad punctum medium D lateris oppoſiti AC recta linea ducatur BD, erunt quadrata laterum AB, BC circa angulum B dupla quadratorum, quorum unum ſuper ducta BD, & alterum ſuper AD vel DC ſemiſſe oppoſiti lateris AC deſcribitur.

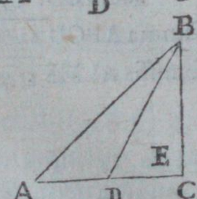
Demonſtratio.

a ℘ 4 hujus vel 47 Primi Elem. Eucl.
b ℘ 9 aut 10 Secundi Elem. Eucl.
c ℘ 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.









d ℘ 12 Secundi Elem. Eucl.

Demiſsâ ex B ſuper AC vel productâ AE perpendiculari BE, erunt [a] $\square^{ta}$ ex AB, BC æqualia $\square^{tis}$ ex AE, EC unà cum $\square^{to}$ ex EB, bis ſumpto. Sunt autem [b] $\square^{ta}$ ex AE, EC dupla $\square^{torum}$ ex AD, DE. Dupla igitur ſunt $\square^{ta}$ ex AB, BC $\square^{torum}$ ex AD, DE unà cum $\square^{to}$ ex EB. Hinc cum $\square^{ta}$ ex DE & EB [c] æqualia ſint $\square^{to}$ ex DB, ac proinde eorum duplum æquale duplo $\square^{to}$ ex DB: patet, $\square^{ta}$ ex AB, BC quadratorum ex AD, DB eſſe dupla. Quod erat propoſitum.

Idem intellige, ſi latera AB, BC ſint æqualia, & perpendicularis BE cadat in punctum D: quandoquidem $\square^{a}$ ex AD, DC tum æqualia ſunt, & eadem, ut dictum eſt, unà cum $\square^{to}$ ex DB bis ſumpto æqualia $\square^{tis}$ ex AB, BC, adeoque hæc dupla $\square^{torum}$ ex AD, DB.

Simile fit, ſi perpendicularis BE cadit in punctum A vel C. Quo caſu $\square^{tum}$ ex AB [d] æquale erit $\square^{tis}$ ex AD, DB unà cum duplo ▭^{lo} ADC, hoc eſt, duplo $\square^{to}$ ex DC. Quibus ſi utrinque addatur commune $\square^{tum}$

□[tum] ex BC: erunt □[ta] ex A B, B C æqualia 3[bus] □[tis] ex A D, DB, & BC, unà cum duplo □[to] ex DC. Sunt autem □[ta] ex BC, DC [e] æqualia □[to] ex D B. Quocirca □[ta] ex AB, BC æqualia erunt □[tis] ex A D, DC, hoc eſt, duplo □[to] ex A D vel D C, unà cum duplo □[to] ex D B. Ut erat propoſitum. Hinc ſi ex angulo B, &c. Quod erat demonſtrandum.

e 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi tria latera △[li] A B C cognita fuerint, quo pacto recta BD inveniri poſſit. Si enim AB, ex.gr., ſit 19, BC 17, & AC 20, addatur 361, □ AB, ad 289, □ BC, & ſummæ 650 dimidium 325 erit ſumma □[torum] ex AD & DB. E qua ſubducto 100, □ AD vel D C, reſtabit 225, □ BD. Vnde BD erit 15.

Eodem modo, ſi AB, BD, & BC cognitæ ſint, & quæratur AC: addantur 361 & 289, □[ta] AB & B C, & ex 325, ſemiſſe ſummæ, ſubducatur 225, □ B D, & relinquetur 100, □ AD vel DC. Vnde AD vel D C erit 10, adeóque AC 20. Quæ quærebatur.

XIX.

Sit A B C triangulum quodcunque, cujus angulus B rectâ B D bifariam ſit diviſus, & ex C, alterutro angulorum A vel C deſcripto, intervallo C D vel A D, circulo DEF, ſecante rectam B D vel productam in E: dico B D ad BE eſſe, ſicut AD ad DC, vel AB ad BC.

Demonſtratio.

Si AB, BC æqualia ſint, patet B D, latus AC bifariam & ad rectos angulos ſecare; itemque circulum D E F tangi à recta B D in puncto D: adeoque B D hoc caſu ſumendam eſſe pro duabus rectis æqualibus.

At verò AB, B C inæqualibus exiſtentibus, demittatur ex C ſuper B D vel productam perpendicularis CH, quæ producta occurrat ipſi A B vel productæ in I, jungaturque IE.

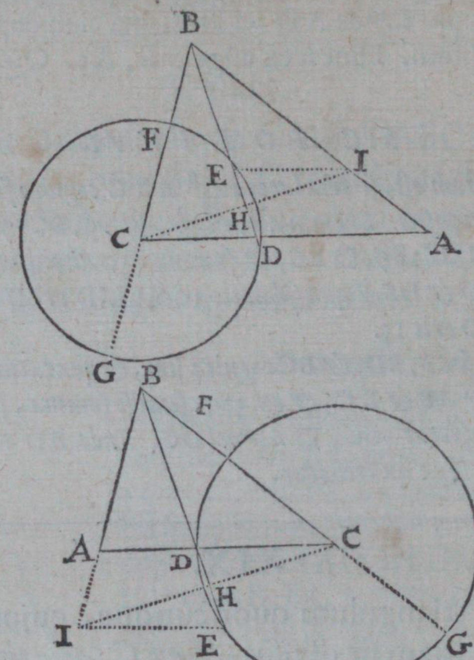
Quoniam itaque ex hypotheſi anguli ad B △[lorum] C B H & I B H ſunt æquales, & anguli ad H ex conſtructione recti, itemque latus BH utrique △[lo] commune: [a] erunt & reliqua latera B C, C H reliquis

a 26 Primi Elem. Eucl.

b p 15 Primi Elem. Eucl.

c p 3 Tertii Elem. Eucl.

quis BI, IH æqualia. Hinc cum [b] anguli DHC & EHI △lorum DCH & IEH ſint æquales, & CH æqualis HI, itemque DH [c] æqualis HE,



d p 4 Primi Elem. Eucl.

e p 27 Primi Elem. Eucl.

f p 4 Sexti Elem. Eucl.

g p 16 Quinti Elem. Eucl.

erit quoque [d] DC æqualis IE, & angulus DCH angulo EIH æqualis, ac proinde [e] IE ipſi AC parallela, adeoque △ BEI ſimile △ BDA. Unde erit [f] ut BE ad EI, hoc eſt, CD, ita BD ad DA: nec non BE ad BI, hoc eſt, CB, ita BD ad BA, hoc eſt, permutando [g] BE ad BD, ſicut CD ad DA, vel ut CB ad BA. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

Hinc patet, cognitis CB, BD, & CD, facilè inveniri BA & AD.

Si enim, verb, gr., CB ſit 42, BD 45, & CD 39: Addatur CD vel CG 39 ad CB 42, & ſit GB 81; Deinde ſubductâ CD vel CF 39 ex CB 42, reliqua FB 3 multiplicetur per GB 81, fietq; 243, ▭ GBF vel DBE. Quod diviſum per DB 45 dat BE $5\frac{2}{5}$. *Hinc fiat ut BE* $5\frac{2}{5}$ *ad BD 45, ita CD 39 ad DA 325, & CB 42 ad BA 350.*

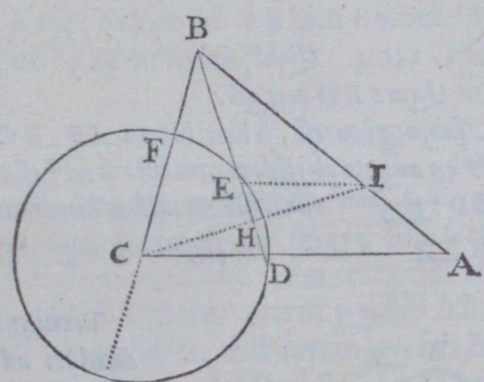
No-

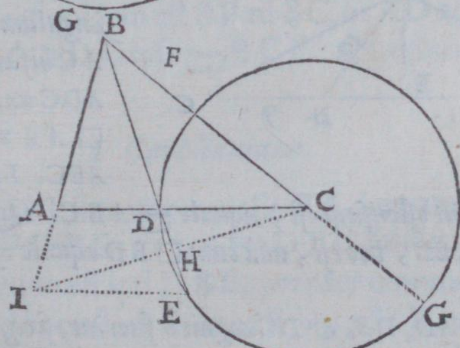
NOTA, eodem modo hîc procedi, ac ſi per tria latera △li CBD, ut in 6ta hujus, quæratur B E, quæ ſumma eſt vel differentia ſegmentorum baſis BH, HD; ac tum fieret, ut BE 5 $\frac{2}{5}$ ad EI vel CD 39, ita BD 45 ad DA 325; ac rurſus ut BE 5 $\frac{2}{5}$ ad BI vel BC 42, ita BD 45 ad BA 350.

XX.

Si ex angulo B trianguli cujuſcunque A B C ad latus oppoſitum AC ducatur recta linea BD, angulum B bifariam ſecans: erit rectangulum ſub lateribus AB, BC, dictum angulum B comprehendentibus, æquale rectangulo ſub ſegmentis AD, DC oppoſiti lateris A C unà cum quadrato ſecantis B D.

Demonſtratio.





Per præced. prop. EB eſt ad BD, ſicut CD ad DA, vel CB ad BA. Sed ut E B ad B D, ita quoque eſt [a] aſſumptâ communi altitudine BD, *a p 1 Sexti Elem. Eucl.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

B D, ▭ EBD, hoc eſt, ▭ GB F ad □ B D. Similiter etiam C D eſt ad DA, ſumendo C D communem altitudinem, ut □ CD ad ▭ C D A. Quocirca erit ut ▭ G B F ad □ B D, ita □ C D ad ▭ C D A: adeoque per 12 prop. 5ti Elem. Eucl: ut ▭ GBF unà cum □ C D vel C F, hoc eſt [b], □ C B, ad □ B D unà cum ▭ CDA, ita □ C D ad ▭ C D A, hoc eſt (ut dictum fuit) ut C D ad DA, vel CB ad B A. Sed ut C B ad B A, ita quoque eſt [c], aſſumptâ communi altitudine C B, □ C B ad ▭ C B A. Unde erit, ut □ CB ad □ B D unà cum ▭ C D A, ita idem □ C B ad ▭ C B A. Æquale igitur eſt [d] □ B D unà cum ▭ C D A ipſi ▭ C B A. Quod erat demonſtrandum.

b p 6 Secundi Elem. Eucl.

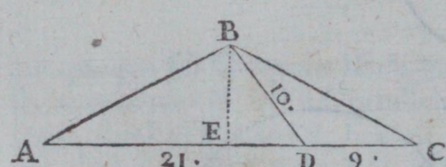
c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 9 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Hinc liquet, cognitis tribus △li A B C lateribus, quâ ratione inveniri poſſit longitudo rectæ BD. Etenim ſi AB ſit 45, BC 80, & A C 100; & AC 100 dividatur in ratione A B ad B C ſeu 9 ad 16: fiet A D 36, & DC 64, adeóque ▭ ADC 2304. Quod ſubductum ex 3600, ▭ ABC, relinquit 1296, □ BD. Quare B D erit 36.

Non ineptè hîc ſubjungi poteſt, ſi duo latera AB, B C trianguli A B C æqualia fuerint, & ex angulo ab iiſdem contento B ad baſin AC utcunque ducatur recta linea BD: ▭lum ABC, ſub æqualibus lateribus AB, BC comprehenſum æquale eſſe ▭lo A D C, ſub ſegmentis baſis A C, unà cum □to ductæ B D.



Etenim ductâ BE perpendiculari ad A C, ſecabit ipſa angulum A B C, ut & baſin A C bifariam: eritque [e] ▭ ADC unà cum □ ED æquale □ A E vel E C, hoc eſt, ▭ AEC. Eſt autem ▭ A E C unà cum □ E B, ut oſtenſum eſt, æquale ▭ A B C. Quare ▭ A D C unà cum □tis ex ED, EB, hoc eſt, unà cum □ B D æquale eſt ▭ ABC. Quod erat propoſitum.

e p 5 Secundi Elem. Eucl.

Vnde liquet, ſi AD, DB, & DC cognitæ fuerint, ſitq; AD 21, D B 10, & DC 9, quo pacto facilè ſit invenire A B vel B C: nimirum, addendo tantùm, 189, ▭ ADC, ad 100, □ B D, & ex ſumma 289, ▭ A B C, extrahendo √, fiet AB vel BC 17. Item ſi cognoſcantur AD, DC, ut & AB vel BC, quo pacto inveniri poſſit BD: videlicet, ſubtrahendo tantùm 189, ▭ ADC,

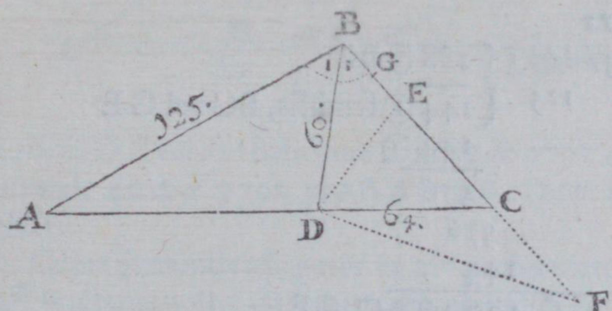
ex

ex 289, ▭ A B C, & ex reliquo 100, ſeu □ B D, extrahendo radicem, habebiturq; BD 10.

XXI.

Iiſdem poſitis, ſi fiat ut A B ad B D, ita B D ad B E, jungaturque D E: dico rectangulum B C E æquale eſſe quadrato ex D C.

Demonſtratio.



Quoniam enim, per præcedentem propoſitionem, ▭ ABC æquale eſt ▭ ADC unà cum □ BD, hoc eſt, ▭^{lo} ABE: patet, ▭^{lum} ABC, dempto ▭^{lo} ABE, hoc eſt, ▭^{lum} ſub AB, EC, æquale eſſe ▭^{lo} ADC. Unde erit [a] ut AB ad DC, ita AD ad EC. Sed ut AB ad DC, ita [b] eſt ▭ ſub AB, DC ad □ DC: itemque ut AD ad EC, ita ▭ ſub AD, BC ad ▭ BCE. Quare [c] erit ut ▭ ſub AB, DC ad □ DC, ita ▭ ſub AD, BC ad ▭ BCE. Eſt autem ▭ ſub AB, DC æquale ▭^{lo} ſub AD, BC: (ſiquidem eſt AB ad BC, ut AD ad DC). Æquale igitur quoque erit [d] □ DC ipſi ▭ BCE. Quod erat demonſtrandum.

a ꝑ 16 Sexti Elem. Eucl.
b ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.
c ꝑ 11 Quinti Elem. Eucl.
d ꝑ 14 Quinti Elem. Eucl.

1 Corollarium.

Hinc ſequitur, ſi BF ſumatur æqualis BA, jungaturque DF: △^{lum} FBD ſimile eſſe △^{lo} DBE; ut & △^{lum} DEC ſimile △^{lo} DBC. Siquidem FBD [e] ſimile eſt ipſi DBE, propter communem angulum ad B, & quòd FB, hoc eſt, AB, ſit ad BD, ut DB ad BE. At verò DEC ſimile ipſi DBC, quoniam, præter communem angulum ad C, BC eſt ad CD, [f] ut DC ad CE: quippe oſtenſum eſt, ▭ BCE eſſe æquale □ DC.

e ꝑ 6 Sexti Elem. Eucl.
f ꝑ 17 Sexti Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

2 *Corollarium.*

Similiter inferri poteſt; ſi circa △ DEF circulus deſcribatur, eundem [g] tangi à recta BD in D; ut & ſi alius deſcribatur circa DBE, ipſum tangi ab AC in D.

g p. 37 Tertii Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Hinc ſi AB, BD, & DC cognitæ fuerint, & AB ſit 125, BD 60, & DC 64: facile ex iis invenietur BC, ut ex operatione ſequenti conſtat.

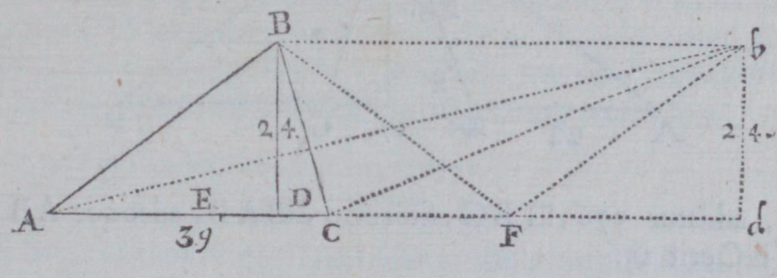
xx
Divid. □ BD, hoc eſt, ▭ FBE 36000 ① { 288 ① BE
per FB vel BA. 125 { 144 ① ſemiſſis, BG vel GE
144 ①
576
576
144
Add. { 207|36 ② □ GE
4096| □ DC ſeu ▭ BCE }
ſumma 43|03 36 ② □ GC, per 6. 2[di] Elem. Eucl.
radix 6|5 6 ① GC
add. 1|4 4 ① BG
ſumma 8 0 AB.

XXII.

Cognitis trianguli ABC baſi AC 39, & perpendiculari BD 24, nec non ratione lateris AB ad latus BC 8 ad 5, invenire AB & BC.

Diviſâ AC 39 in E in ratione 8 ad 5, fiet AE 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipſarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde, cum rectanguli △[li] DBF duo latera DB, BF cogni-

cōgnita ſint, faciantque 24 & 40 : erit tertium latus D F per 4^{tam} $prop^{nem}$ hujus 32. Quæ ſubducta ex tota AF 64, ut & eidem addita, dat A D 32, & A *d* 96, ad quorum $\square^{ta}$ ut 1024 & 9216 ſi addatur



576, □ D B vel *d b*: habebuntur 1600 & 9792, $\square^{ta}$ ex AB & A *b*, ac proinde 40 & $\sqrt{}$ 9792, pro A B & A *b*. Unde B C erit 25, & *b* C $\sqrt{}$ 3825.

Cujus demonſtratio patet ex 2do problemate propoſitionum libri 2^{di} tractatus noſtri de *Locis Planis Apollonii*: ubi ſimul innoteſcit, cognitis, baſi & perpendiculo $\triangle^{li}$, nec non ratione laterum reliquorum, duplicem hæc admittere ſolutionem: nimirum, AB fore vel 40 vel $\sqrt{}$ 9792, & B C vel 25 vel $\sqrt{}$ 3825, hoc eſt, conſtituunt vel acutangulum vel obtuſangulum triangulum, ſine aliqua datorum immutatione.

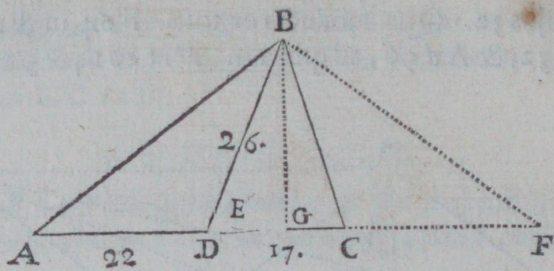
XXIII.

In triangulo A B C ductâ utcunque rectâ B D, dantur BD 26, AD 22, & DC 17, & quæruntur AB & BC, ſi inter ſe ſint, ut 8 ad 5?

Diviſâ A C, ut ante, in E; ita ut A E ad EC ſit, ut 8 ad 5 : erit A E 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipſarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde ſubductâ A D 22 ex AE 24, reſtabit D E 2, cui additâ E F 40, habebitur D F 42. Cognita itaque ſunt 3^{a} latera $\triangle^{li}$ D B F. Hinc ſi per ipſa, juxta 6^{tam} hujus, quæratur DG, ut & perpendicularis BG: invenietur D G 10, & B G 24. De-

 nique

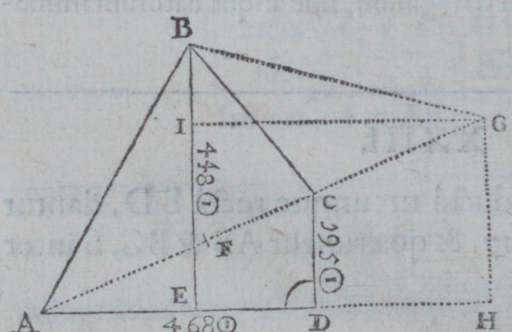
nique additis AD 22 & DG 10, ſi □to ſummæ AG 32, quod eſt



1024, addatur 576, □ BG, fit 1600, □ AB, adeoque AB 40. Unde BC erit 25.

XXIV.

Aliquis habet agrum ABCD, cujus angulus D eſt rectus, & AD eſt 468①, DC 195①, itemque recta BE ex angulo B perpendicularis ipſi AD eſt 448①. Quæritur, ſi AB ſit ad BC, ut 8 ad 5, quanta ſit futura area ABCD; ut & quantitas laterum AB, BC?



Inventâ AC 507①, per 4tam hujus, ſecetur ipſa in F, ut ante, ita ut AF ad FC ſit, ut 8 ad 5: fietque AF 312①, & FC 195①. Tum fiat, ut 117①, differentia ipſarum AF, FC, ad AF 312①, ita FC 195① ad FG vel GB 52⓪. Cui additâ AF 312①, habebitur AG 832①. Deinde fiat propter ſimilitudinem triangulorum ACD & AGH, ut AC 507① ad AG 832①, ita AD 468① ad AH 768①, & CD 195① ad GH 32⓪. Porrò ſubductâ GH ſeu IE 32⓪ ex BE 448①, reſtabit IB 128①, cujus □tum 16384② ſubductum ex 2704⓪, □ BG, relinquet 254016②, □ IG: unde IG vel EH erit 504①, quâ ſubductâ ex AH 768①,

768①, reſtabit A E 264①. Cujus $\square^{\text{tum}}$ 69696② additum ad 200704②, □ E B, dat 2704⓪, □ A B; adeoque A B 52⓪. Unde B C erit 325①. Denique ad inveniendam aream ABCD, multiplicetur B E 448① per 132①, ſemiſſem ipſius A E, fietque 59136②, area $\triangle^{\text{li}}$ A B E. Similiter 643①, ſumma ipſarum B E, C D, per 102①, ſemiſſem ipſius ED, multiplicata, dabit 65586②, aream trapezii E B C D. quæ addita ad aream $\triangle^{\text{li}}$ præcedentem 59136② dabit aream totius trapezii A B C D 1247, 22②, hoc eſt, 1247 $\square^{\text{tarum}}$ decempedarum, & 22 $\square^{\text{torum}}$ pedum. Quod erat faciendum.

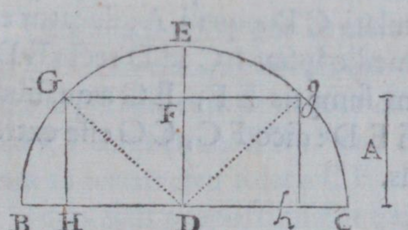
XXV.

E ſerie trium proportionalium datâ mediâ A, & aggregato extremarum B C: invenire extremas,

Vel:

Datam rectam B C ita ſecare in H, ut rectangulum ſub ſegmentis B H, H C ſit æquale quadrato rectæ datæ A. Quæ ſemiſſe rectæ ſecandæ BC non ſit major.

Conſtructio.



Deſcripto ſuper B C ſemicirculo BEC, erigatur ex puncto medio D eidem perpendicularis DE, in quâ ſumptâ DF æquali A, ducatur per F ipſi BC parallela GF g, ſecans hinc inde circumferentiam in punctis G, g. Ex quibus ſi demittantur GH, g h, perpendiculares in B C, hoc eſt, parallelæ ipſi DE: Dico BH & H C extremas eſſe, vel etiam $▭^{\text{lum}}$ ſub BH, H C contentum æquale eſſe $\square^{\text{to}}$ ex H G vel A. Cujus demonſtratio patet ex corollario $8^{\text{væ}}$ prop^{nis} lib. 6 Elem. Euclidis, quod docet BH, HG, & HC eſſe 3 proportionales.

Similiter liquet rectam A non majorem dari debere ſemiſſe datæ B C, quandoquidem □ BD vel DC maximum eſt ▭, quod ſub ſegmentis rectæ BC comprehendi poteſt.

Item, Problema admittere duplicem ſolutionem, hoc eſt, rectam

BC

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

B C ſimul in duobus punctis H & *h* ſecari, ita ut linea A ſit media proportionalis inter bina ejus ſegmenta B H, H C vel B *h*, *h* C; vel etiam □[tum] ex A æquale eſſe ▭[lo] BHC vel B *h* C.

SCHOLIVM.

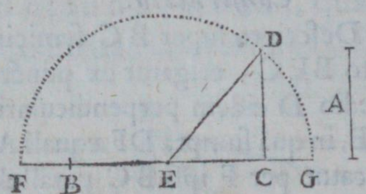
Hinc ſi A & B C cognitæ fuerint, ſitq́ A 12, & B C 26: ad inveniendas BH, HC, auferatur 144, □ HG vel A, ex 169, □ GD vel B D, & ex reliquo 25, ſeu □ HD, extrahatur radix, erit H D 5. Quæ ex B D 13 ſubducta relinquit B H 8, & ipſi D C 13 addita dat HC 18. Ita ut BH, HC ſint 8 & 18, vel etiam 18 & 8.

Eodem modo cognitâ areâ ▭[li] B H C 144, & ſummâ laterum B H, HC, hoc eſt, BC 26, inveniuntur ſingula.

XXVI.

E ſerie trium proportionalium datâ mediâ A, & differentiâ extremarum BC: invenire extremas.

Conſtructio.



Erectâ ex C ſuper B C perpendiculari C D æquali A, ducatur ex E medio ipſius BC ad D recta E D; tum ſumptis E F, E G æqualibus ipſi E D: dico F C, C G eſſe extremas.

Demonſtratio.

Quoniam enim [a] F C, C D, & C G ſunt 3 proportionales, & per conſtructionem F E eſt æqualis E G, ut & B E æqualis EC: erit quoque F B æqualis C G, adeoq́ue B C differentia, quâ F C excedit CG, inter quas C D, hoc eſt, A, media eſt proportionalis. Quod erat faciendum.

[a] ꝑ *Coroll. 8va Sexti Elem. Eucl.*

SCHOLIVM.

Hinc ſi A & BC cognitæ fuerint, ſitq́ A 12, & BC 10: facile eſt invenire F C & C G. Etenim addendo 25, □ EC, ad 144, □ C D, ſit 169, □ E D. Cujus radix, puta 13, erit ipſa ED, EF, vel E G. Hinc ſi ad F E 13 addatur

EC

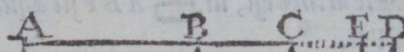
EC 5, erit FC 18; at verò ſi ab EG 13 auferatur EC 5, fiet CG 8.

Eodem modo, quoniam [b] ▭ *FCG æquale eſt* □[10] *ex CD vel A: patet, quo pacto, cognitâ areâ* ▭[11] *FCG 144, & differentiâ laterum FC, CG, hoc eſt, BC 10, inveniantur ſingula.* b p14 Secundi, vel 17 Sexti Elem. Eucl.

XXVII.

E ſerie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & aggregato mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.

Conſtructio.



Poſitis AB, BC in directum, producatur AC ad D, donec CD ſit æqualis CB; dividaturque AD per 25 prop. hujus in E, ita ut ▭ AED ſit æquale □ CD, hoc eſt, ut CD ſit media proportionalis inter AE & ED. Dico CE eſſe mediam, & ED alteram extremam.

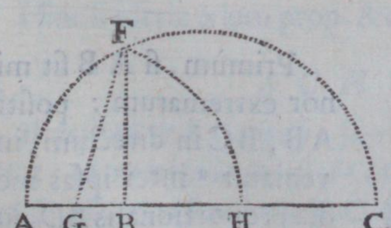
Demonſtratio.

Quoniam enim per conſtructionem AE eſt ad CD, ſicut CD ad ED: erit quoque dividendo [a] AB unà cum CE ad CD, ſicut CE ad ED. Hinc cum ſit ut tota AB unà cum CE ad totam CD, ut ablata CE ad ablatam ED: [b] erit & reliqua AB ad reliquam CE, ſicut tota ad totam, ſeu ablata CE ad ablatam ED. Quare AB, CE, & ED tres ſunt proportionales quæſitæ. Quod erat faciendum.

a p 17 Quinti Elem. Eucl.

b p 19 Quinti Elem. Eucl.

Aliter.



Poſitis, ut ante, AB & BC in directum, inveniatur [c] inter ipſas media proportionalis BF, agaturque ex G, medio ipſius AB, recta GF. Quâ poſitâ à G ad H, dico BH eſſe mediam, & HC eſſe alteram extremam.

c p 13 Sexti Elem. Eucl.

Quoniam enim [d] ▭ AHB unà cum □ GB æquale eſt □ GH, hoc eſt, GF: erit etiam, auferendo utrin-

d p 6 Secundi Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

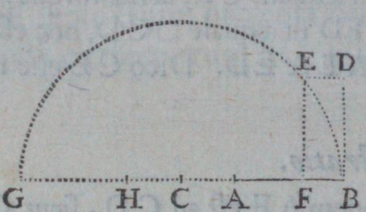
e p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
f p 17 Sexti Elem. Eucl.
g p 16 Sexti Elem. Eucl.
h p 17 Quinti, & corol. 4ta Quinti Elem. Eucl.

utrinque □ GB, reliquum ▭ AHB æquale reliquo □to ex B F e. Eſt autem f □BF ſimiliter æquale ▭ A B C, Quocirca ▭ A H B æquale eſt ▭ ABC, ac proinde g AH ad AB, ſicut BC ad B H, hoc eſt, dividendo & convertendo h AB ad BH, ut BH ad HC.

SCHOLIVM.

Hinc ſi cognitæ fuerint A B, B C, & A B ſit 4, at B C 15: ut inveniantur BH, HC, multiplicetur 15 per 4, fit 60, ▭ ABC vel □ BF. Cui ſi addatur 4, □ GB, erit ſumma 64, □ GF: adeòq; GF vel GH 8. E qua ſubductâ GB 2, relinquitur B H 6. Vnde HC erit 9.

Vbi porrò notandum, quo pacto per primum modum data recta AB ſecari poßit in F extremâ ac mediâ ratione, aliter quàm ab Euclide eſt oſtenſum propne 1ma lib. 2di, aut 31 prop. 6ti lib. Elem. hoc eſt, ut ▭ A B F ſit æquale □ AF; vel ut AB ſit ad A F, ſicut AF ad F B.

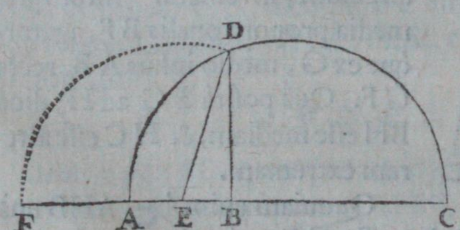


Etenim productâ A B, in eâq; aſſumptâ AC æquali ſemißi ipſius AB, deſcribatur centro C intervallo C B ſemicirculus B E G. Deinde erectâ ex B ſuper A B perpendiculari B D æquali A B, ductâq; ex D ipſi parallelâ D E, ſecante circumferentiam in E: demittatur ex E ſuper A B perpendicularis E F. Cujus demonſtratio manifeſta eſt ex demonſtratione 1mi modi ſumendo C H æqualem C A.

XXVIII.

E ſerie trium proportionalium datâ unâ extremarum A B, & differentiâ mediæ & alterius extremæ B C: invenire mediam & extremam.

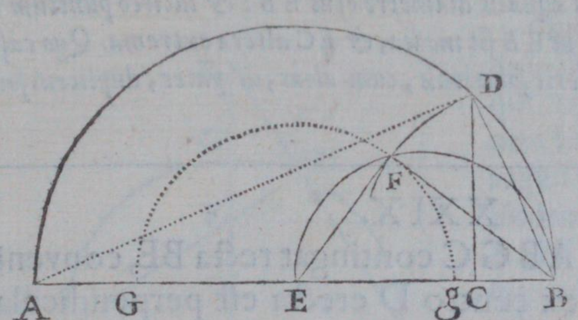
a p 13 Sexti Elem. Eucl.



Primùm, ſi A B ſit minor extremarum: poſitis A B, B C in directum, inveniatur a inter ipſas media proportionalis BD, ductâque ex E, medio ipſius AB, rectâ E D, ſumatur ei æqua-

æqualis EF. Dico BF eſſe mediam, & FC alteram ſeu majorem extremam.

Quoniam enim [b] ▭ BFA unà cum □ EB æquale eſt □ EF, hoc eſt, ED: erit quoque (auferendo utrinque □ EB) reliquum ▭ BFA æquale reliquo □ BD [c]. Eſt autem [d] □ BD etiam æquale ▭ ABC. Æquale igitur erit ▭ BFA ipſi ▭ ABC. Unde erit [e] ut AB ad FA, ſic BF ad BC, hoc eſt, per compoſitionem rationis contrariam [f], AB ad BF, ſicut BF ad FC. Quod eſt primum.



Deinde ſi AB ſit major extremarum, ſumptâ in eadem BC, [g] inveniatur inter AC & CB media proportionalis CD, jungaturque BD. Tũ deſcripto ſuper EB ſemicirculo EFB, & in eo [h] collocatâ BF æquali BD, agatur FE. Quæ ſi utrinque ponatur ab E ad G: Dico AB ad GB eſſe, ſicut GB ad GC; vel etiam AB ad *g*B, ſicut *g*B ad *g*C.

Ad quod demonſtrandum, jungatur AD. Quoniam itaque [i] FB ſemicirculum ex E, qui per puncta G, F, *g* tranſit, tangit in F: [k] erit ▭ GB*g* æquale □ FB, vel BD. Eſt autem [l] □ BD etiam æquale ▭ ABC (ſiquidem [m] AB eſt ad BD, ſicut BD ad BC). Æqualia igitur ſunt ▭ GB*g* & ▭ ABC [n]. Unde erit ut AB ad B*g*, ſic GB ad BC, hoc eſt, per converſionem rationis [o] AB ad A*g*, hoc eſt, GB, ſic GB ad GC: vel etiam [p], ex AB & B*g* auferendo GB & BC, ut tota AB ad totam B*g*, ita reliqua AG, hoc eſt, B*g*, ad reliquam *g*C. Quod erat ſecundum.

Hinc ſi è ſerie trium prop. &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Hinc ſi AB & BC cognitæ fuerint, & AB minor extremarum ſit 4, at BC 3: ad inveniendas BF & FC, multiplicetur 4 per 3, & ſit 12, ▭ *ABC vel* □ *BD. Cui ſi addatur 4,* □ *EB, erit ſumma 16,* □ *ED. Hujus radix 4, erit ED vel EF. Cui additâ EB 2, habebitur FB 6. Vnde FC erit 9.*

At verò ſi AB, major extremarum, ſit 9, & BC 2: ad inveniendas GB

b p 6 Secundi Elem. Eucl.
c p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
d p 17 Sexti Elem. Eucl.
e p 16 Sexti Elem. Eucl.
f Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
g p 13 Sexti Elem. Eucl.
h p 1 Quarti Elem. Eucl.
i p 16 & 31 Tertii Elem Eucl.
k p 36 Tertii Elem.
l p 17 Sexti Elem. Eucl.
m p corol. 8væ Sexti Elem. Eucl.
n p 16 Sexti Elem. Eucl.
o p corol. 19næ Quinti Elem Eucl.
p 19 Quinti Elem. Eucl.

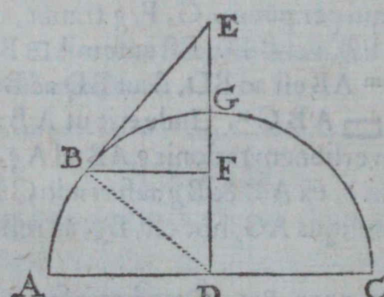
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

& GC; veletiam g B & g C, multiplicetur rurſus AB 9 per BC 2, & ſit 18, ▭ ABC vel □ BD ſeu BF. Quod ſubductum ex 2025②, □^{to} ex EB, relinquit 225②, □ EF. Cujus √, ut 15①, erit ipſa EF, EG, vel Eg. Huic ſi addatur EB 45①, erit GB 60① ſeu 6. Vnde GC erit 4. Vel etiam ſubtrahendo Eg 15① ex EB 45①, reſtabit g B 30① ſeu 3 : ac proinde g C 1.

Hîc porrò notandum: CB in 2do caſu majorem eſſe non poſſe 4^{tâ} parte ipſius AB, quandoquidem Problema aliàs eſt impoſſibile, & BD, hoc eſt, BF, in ſemicirculo EFB collocari nequit. Exiſtente enim CB quartâ parte ipſius AB, erit FB, hoc eſt, DB æqualis diametro ejus EB : & idcirco punctum F incidet in punctum E; ita ut EB ſit media, & EC altera extrema. Quo caſu Problema unius tantùm erit ſolutionis, cum aliàs, ut patet, duplicem ſortiatur.

XXIX.

Si ſemicirculum ABGC contingat recta BE, conveniens cum DE, quæ ex centro D erecta eſt perpendicularis ſuper diametrum AC: dico, ſi ex puncto contactus B agatur BF parallela AC, rectas DF, DG, & DE eſſe tres proportionales.



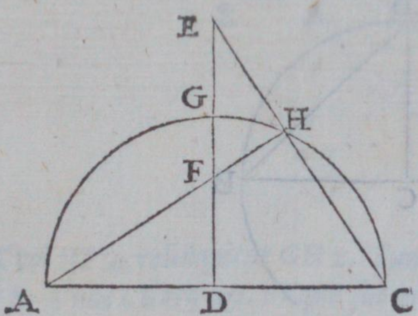
Id quod, ductâ BD, manifeſtum eſt, quippe quæ per 18 prop. 3^{tii} lib. Elem. Euclidis ipſi BE eſt perpendicularis. Unde per Corollarium 8^{væ} prop^{nis} 6^{ti} lib. Elem. Eucl. FD erit ad DB, hoc eſt, DG, ſicut DB ſeu DG ad DE. Quod erat demonſtrandum.

XXX.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XXX.

Si in ſemicirculo AGHC ex A ad circumferentiam utcunque ducatur recta AH, ſecans perpendicularem DE in F: dico, ſi ex C per H recta agatur occurrens ipſi DE in E, rectas DF, DG, & DE eſſe tres proportionales.



Demonſtratio.

Quoniam enim △[la] AHC & CDE rectangula ſunt, atque angulum ad C communem habent: erunt & reliqui anguli HAC & E [a] æquales. Eodem modo, quoniam △[lum] ADF rectangulum eſt, ejuſque angulus DAF æqualis oſtenſus angulo E rectanguli △[li] CDE: erit item tertius tertio æqualis: ac proinde [b] FD ad DA, hoc eſt, DG, ſicut DC, hoc eſt, DG, ad DE. Quod erat demonſtrandum.

a p 32 Primi Elem. Eucl.

b p 4 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex hac & antecedenti propoſitione manifeſtum eſt: ſi recta AH ducatur per punctum F, in quo recta BF occurrit perpendiculari DE, tangentem BE & productam CHE in idem punctum ipſius DE convenire.

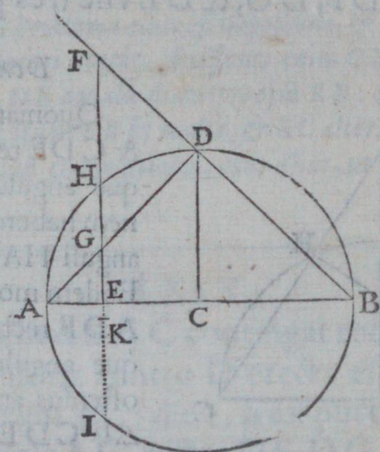
XXXI.

Si in ſemicirculo AHDB, ex diametri terminis A & B ad verticem D agantur rectæ AD, BD, quarum una BD ſurſum producatur: dico, ſi ex quolibet puncto inter A & centrum C perpendicularis erigatur ſuper AB, huic productæ occurrens in F, rectas EG, EH, & EF eſſe 3 proportionales.

 De-

Demonſtratio.

Junctâ CD, quoniam, propter △lorum ACD, AEG ſimilitudinem, AC eſt ad CD, ſicut AE ad EG; ſint autem AC & CD æquales: erunt quoque AE & EG æquales. Eodem modo ob ſimilitudinem



a p 14 Secundi, vel 36 Tertii Elem. Eucl. *b p 17 Sexti Elem. Eucl.*

△lorum BCD, BEF æquales erunt BE & EF. Æquale igitur eſt ▭ AEB ipſi ▭ GEF. Eſt autem [a] ▭ AEB æquale □ EH. Quare & ▭ GEF ipſi □ EH æquale erit: ac proinde [b] GE ad EH, ſicut EH ad EF. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc ſequitur, ſi HK ſumatur æqualis HF, eſſe quoque EF, FH, & GK tres proportionales.

c p corol. 19næ Quinti Elem. Eucl. *d p 19 Quinti Elem. Eucl.*

Cum enim EF ad EH ſit, ut EH ad EG: erit quoque, per converſionem rationis, [c] EF ad FH, ut EH ad HG. Hinc, cum tota EF ſit ad totam FH, ſicut ablata EH ad ablatam HG: erit etiam [d] tota EF ad totam FH, ſicut reliqua FH ad reliquam GK.

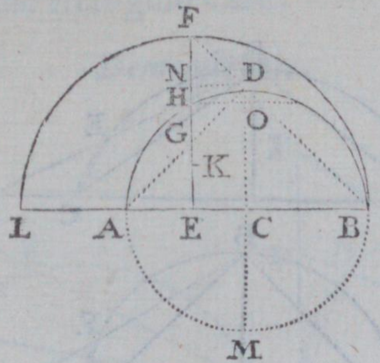
SCHOLIUM.

Ex oſtenſis patet, quâ ratione hujuſmodi Problema ſolvi poſſit: Deſcriptis ſuper recta LAB duobus ſemicirculis AHDB & LFB ſeſe contingentibus in B, & ex centro majoris E erectâ ſuper LAB perpendiculari EHF: invenire utriuſque diametrum, ſi LA ſit 6, & FH 4.

Etc-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Etenim L E æquali exiſtente ipſi E F, & A E ipſi G E : erit & L A æqualis G F. Hinc ſi ex G F 6 auferatur H F 4, remanebit G H 2. Quâ ſubductâ ex



H K vel H F 4, relinquitur G H 2. Tum fiat ut G K 2 ad H F 4, ita H F 4 ad E F 8. Vnde L B erit 26. Ex qua ſubductâ L A 6, reſtabit A B 10. Quæ etiam hoc pacto inveniri poteſt.

Subtractâ F N 3, ſemiſſe ſc. ipſius F G ſeu L A, ex F H 4, relinquitur N H vel D O 1. Tum diviſo 9, $\square^{to}$ *ex H O, N D, vel F N, per D O 1, oritur O M 9. Cui ſi addatur O D 1, erit M D vel A B 10, ut ſupra.*

XXXII.

Si in circuli ſegmento A B C à vertice B ad baſin productam A C utcunque ducatur recta B D. Dico, ſi agantur A B, B C, & C E, triangulum B C E ſimile eſſe triangulo B D C, nec non triangulum A B D ſimile triangulo E C D.

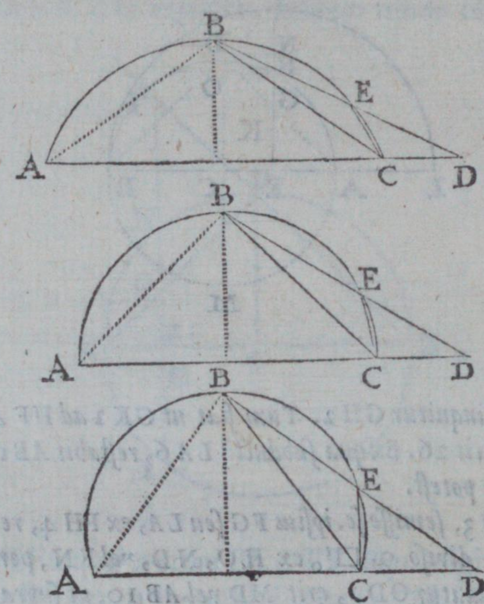
Demonſtratio.

Cum enim anguli C A B & B C A ſint æquales, quorum angulus C A B unà cum oppoſito B E C [a] eſt æqualis duobus rectis, nec non angulus B C A unà cum angulo ſibi deinceps B C D [b] ſit æqualis duobus rectis: patet angulos B E C & B C D in $\triangle^{lis}$ B C E & B D C æquales eſſe. Hinc cum angulus C B D iiſdem $\triangle^{lis}$ ſit communis, erit & tertius B C E [c] æqualis tertio D : adeoque $\triangle^{lum}$ B C E ſimile $\triangle^{lo}$ B D C [d].

a p 22 Tertii Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.
c p 32 Primi Elem. Eucl.
d p 4 Sexti, & 1 def Sexti Elem. Eucl.

Porrò,

Porrò, quoniam, ut ſupra, angulus CAB unà cum angulo BEC eſt æqualis duobus rectis, nec non angulus CED unà cum eodem angulo BEC duobus rectis æqualis: erit angulus CAB æqualis an-



gulo CED. Quare, cum præterea angulus D poſterioribus $\triangle^{lis}$ ſit communis, erit pariter $\triangle$ ABD ſimile $\triangle^{lo}$ ECD. Quod utrumque erat demonſtrandum.

Corollarium.

Ex ſimilitudine $\triangle^{lorum}$ BCE, BDC patet: EB eſſe ad BC, ut BC ad BD.

SCHOLIVM.

Hinc liquet, cognitis BC *&* BE, *quo pacto inveniri poſſit* ED. *Si enim, ex:gr:,* BC *ſit 6, &* BE *4: fiat ut* BE *4 ad* BC *6, ita* BC *6 ad* BD *9. E qua ſubductâ* BE *4, relinquitur* ED *5.*

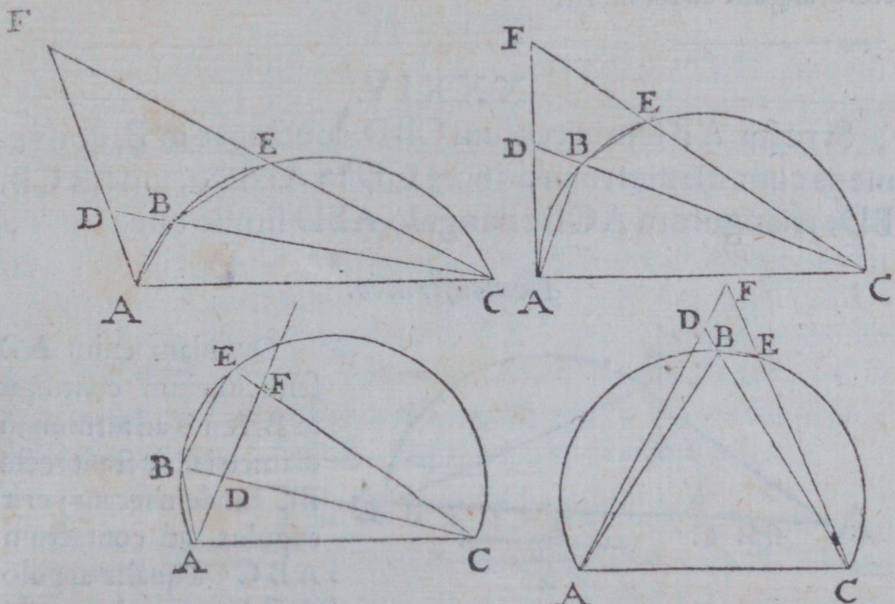
XXXIII.

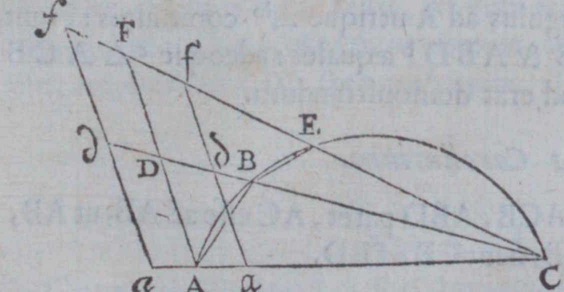
Si in circuli ſegmento ABEC recta AF cum baſi AC conſtituat angulum FAC, æqualem ei qui in ſegmento ABC;

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ABC: Dico, ſi ex C ad AF utcunque ducantur CD, CF circumferentiam ſecantes in B & E, junganturque AB, BE, triangulum CAD ſimile eſſe triangulo CAB, & triangulum CDF ſimile triangulo CBE.

Demonſtratio.





Quoniam enim angulus DAC eſt æqualis angulo in ſegmento ABC (qui quidem omnes [a] inter ſe æquales ſunt), atque ideo △la CAD & CAB præter communem angulum ad C æquales habeant angulos DAC & ABC: erit & tertius ADC tertio CAB [b] æqualis; adeoque △ CAD ſimile ipſi △ ACB [c].

Porrò, cum bini anguli CAB, BEC ſint [d] æquales duobus rectis, nec non bini ADC, CDF [e] duobus rectis æquales, quorum quidem an-

a *p 21 Tertii Elem. Eucl.*

b *p 32 Primi Elem. Eucl.*

c *p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem. Eucl.*

d *p 22 Tertii Elem. Eucl.*

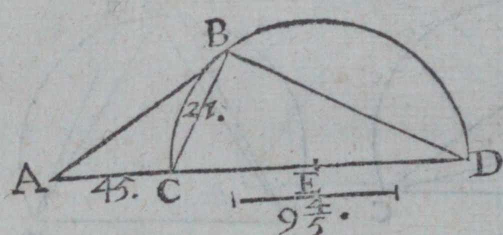
angulus A D C æqualis eſt oſtenſus angulo C A B: erit quoque angulus B E C angulo CDF æqualis. Hinc cum, præter hos æquales angulos, angulus DCF ſit utrique △lo C D F & CBE communis: erunt quoque △la ipſa inter ſe ſimilia. Quod utrumque erat demonſtrandum.

Idem intellige, ſi linea A F ad quodvis aliud baſis punctum in dicto angulo ducta fuerit.

XXXIV.

Si recta A B ſemicirculum CBD contingat in B, conveniens cum diametro producta CD in A: dico, junctis CB, BD, triangulum ACB triangulo ABD ſimile eſſe.

Demonſtratio.



Quoniam enim A B ſemicirculum contingit in B, & à B ad terminum diametri C ductaſit recta BC eundem ſecans; erit angulus ad contactum A B C [a] æqualis angulo A D B, qui in alterno ſemicirculi ſegmento. Hinc cum in △lis ACB, A BD anguli AB C & ADB ſint æquales, & angulus ad A utrique △lo communis: erunt etiam reliqui anguli ACB & ABD [b] æquales: adeoq́ue [c] △ A C B ſimile ipſi △ ABD. Quod erat demonſtrandum.

a p 32 Tertii Elem. Eucl.

b p 32 Primi Elem. Eucl.

c p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem.

1 Corollarium.

Ex ſimilitudine △lorum ACB, ABD patet, AC eſſe ad AB, ut AB, ad AD; item̃que AC ad AB, ſicut CB ad BD.

2 Corollarium.

Hinc, cum AC, AB & AD ſint 3 proportionales, & [d] 1ma A C ſit ad 3am A D, ſicut □ ſuper 1ma A C ad □ ſuper 2da AB, vel [e] ſicut □ ex CB ad □ ex B D, conſtat: A C ad A D eſſe, ſicut □ ex CB ad □ ex B D. Quod & à Pappo eſt demonſtratum propne 119 libri 7.

d p Corol. 20mæ Sexti Elem. Eucl.

e p 22 Sexti Elem. Eucl.

XXXV.

XXXV.

Iiſdem poſitis, ſi ad A C, C B inveniatur tertia proportionalis E: dico quadratum ex C B dimidium eſſe rectanguli contenti ſub CD & differentia ipſarum C D & E.

Demonſtratio.

Quoniam enim [a] eſt A C ad A D, ſicut □ C B ad □ B D, hoc eſt, □ C D minus □ C B: erit quoque [b], per compoſitionem rationis contrariam, AC ad AC, A D, ſicut □ C B ad □ CD. Sed ut AC ad AC, AD, ita [c] eſt ▭ ſub AC & E ad ▭ ſub A C, AD & E. Quare erit, ut ▭ ſub A C & E ad ▭ ſub A C, A D & E, ita □ C B ad □ CD. Eſt autem ▭ ſub AC & E æquale □ CB: cum [d] AC ſit ad CB, ut C B ad E. Æquale igitur eſt [e] ▭ ſub A C, A D & E ipſi □ CD. Hinc ſubducto utrinque ▭lo ſub C D & E, erit reliquum ▭lum ſub dupla A C & E, hoc eſt, duplum □tum ex C B, æquale □to ex C D minus ▭lo ſub C D & E, hoc eſt, æquale ▭lo contento ſub C D & differentia ipſarum CD & E. Quod erat demonſtrandum.

a ꝑ 2 Corol. præc. propnis.
b Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
c ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.
d ꝑ hypotheſin.
e ꝑ 14 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

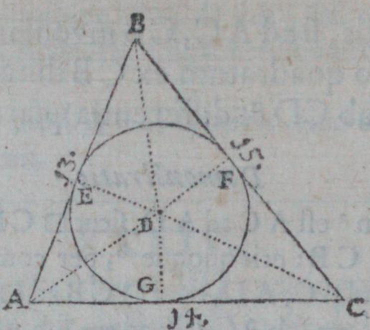
Facile hic eſt oſtendere, ſi cognoſcantur A C & C B, quo pacto inveniri poßit diameter C D. Si enim, verb: gr:, A C ſit 45, & C B 21: Fiat ut A C 45 ad C B 21, ita C B 21 ad E $9\frac{4}{5}$*. Deinde cum □ C B ſit 441, & ejus duplum 882, quæſtio eò perducta eſt, ut, datis rectanguli areâ 882, & differentiâ laterum* $9\frac{4}{5}$*, per 26 prop. hujus inveniantur ipſa latera, quorum majus 35 erit diameter CD. Quæ quærebatur.*

XXXVI.

Cognitis trianguli A B C lateribus AB 13, BC 15, & AC 14: invenire radium D E, D F, vel D G circuli inſcripti E F G.

Quod fiet per ſequentem operationem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



AB. 13
BC. 15
AC. 14
ſumma laterum. 42
ſemiſſis 21.....21..... 21
ſubtr. ſingula latera 13.....15.....14
3^a reliqua 8......6..... 7
6
42
8
Divid. productum 3um reliquorum. 336 { 16 $\square^{tum}$ radii.
per ſemiſſem laterum. 21 { 4 radix, ſeu radius
DE, DF, vel DG.

Demonſtratio.

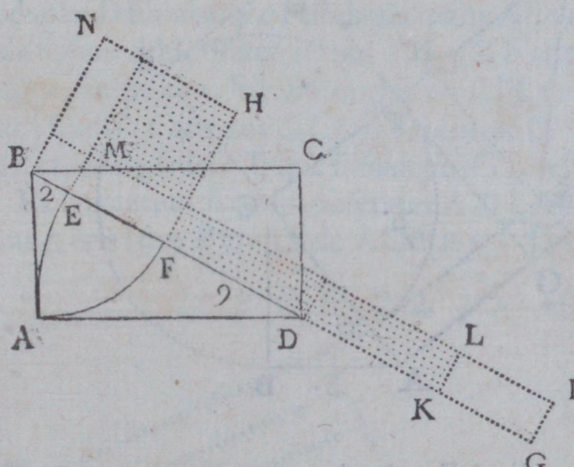
Quoniam 336, productum ex tribus reliquis, ductum in 21, ſemiſſem laterum, per vulgarem regulam, tantum producit, quantum 84, area $\triangle^{li}$ ABC multiplicata in ſe: patet, 21, 84, & 336 eſſe proportionales. Item cum 21, ſemiſſis laterum, ductus in 4, radium circuli, efficiat 84, aream $\triangle^{li}$ ABC (quippe quæ 3^a continet $\triangle^{la}$ ABD, BCD, & ACD, quæ ſingula radium habent pro communi altitudine, & latera AB, BC, & AC pro baſibus; quorum quidem area

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

area invenitur ex multiplicatione ſemiſſis baſeos per altitudinem): conſtat, 21, primum numerum, eſſe ad 84, 2^{dum}, ut 1 ſeu unitas ad radium 4; ſed ad 336, 3^{tium}, ut 1 ad 16, □^{tum} ſc. ex 4. Unde patet, ſi 336, productum 3um reliquorum, per 21, ſemiſſem laterum dividatur, oriri 16, □^{tum} radii 4. Qui erat inveniendus.

XXXVII.

Rectanguli ABCD cognitis duobus exceſſibus BE, FD, quibus diagonalis BD ſuperat utrumque latus AD, AB: invenire latera & diagonalem.



Sit enim, verb: gr:, BE 2, & FD 9. Jam ad inveniendam AB & AD, ſumatur DG æqualis DE, eritque ▭ BI, contentum ſub BG & GI ſeu BE, æquale □^{to} ex AB ſeu BF, hoc eſt, □^{to} BH. Quare, aſſumptâ DK æquali DF, erit gnomon NMF æqualis □^{to} BM, unà cum duobus æqualibus ▭^{lis} MF, KI: & conſequenter □ MH æquale ▭^{lo} FL, quod eſt 36. Unde EF erit 6. ac proinde AB 8, AD 15, & diameter ſeu diagonalis BD 17. Quæ erant inveniendæ.

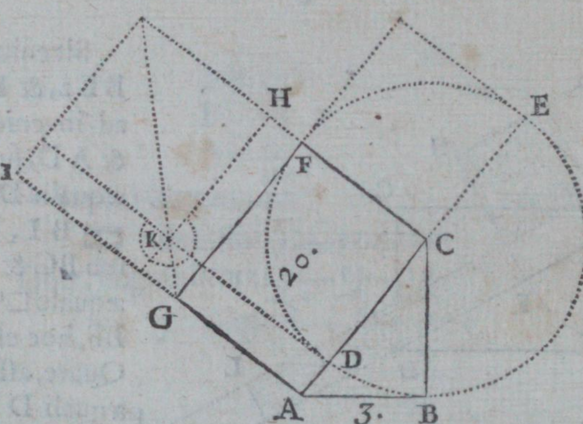
Eodem modo licet ex data differentia, inter diagonalem & latus quadrati, invenire latus & diagonalem. Si enim hæc differentia ſit 2, oportet tantùm 4, duplum ipſius 2, multiplicare per 2, & ex eo quod fit extrahere radicem quadratam, quæ erit √ 8. Cui ſi addatur 2, habebitur latus √ 8 + 2. Huic autem ſi rurſus addatur 2, erit diagonalis 4 + √ 8.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XXXVIII.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, ut & producto reliquorum duorum AC, CB: invenire AC, CB, reliqua latera.

Eſto AB 3, & productum ipſorum A C, CB 20. Igitur ut inveniantur AC, CB, deſcribatur centro C intervallo CB circulus BDFE, ſecans AC in D, eamque productam in E. Tum deſcripto ſuper C E □^{to} FE, erit completum ▭^{lum} CG 20. Deinde deſcripto ſuper



GF □^{to} FI, erit AI æqualis AE, adeoque ▭^{lo} ID æquale ▭^{lo} ſub EA, AD, hoc eſt, □^{to} ex AB 9 [a]. Eſt autem [b] □ IF ad ▭ FA, ut IG ad GA, vel AC ad CE. Sed ut AC ad CE, ita quoque eſt ▭ FA ad □ FE. Proportionalia igitur ſunt 3^{a} ▭^{la} IF, FA, & FE. Hinc cum gnomon IKF, qui æqualis eſt ▭^{lo} ID 9, ſit exceſſus, quo □ IF ſuperat □ FE, quæſtio eò reducta erit, ut, Datis medio 20, & differentiâ extremorum 9, 3um proportionalium numerorum, per 26 Prop. hujus quærantur extremi. Quorum major 25, eſt □ IF, & minor 16, □ FE. E quibus ſi extrahantur radices, erit AC 5, & CB 4. Quæ erant invenienda.

a 36 Tertii Elem. Eucl.
b ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.

XXXIX.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XXXIX.

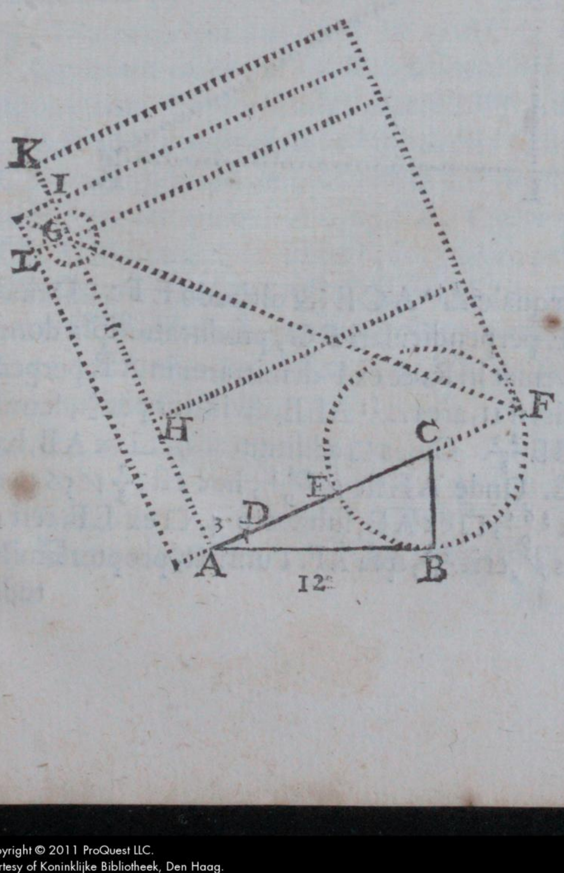
Trianguli rectanguli A B C cognito alterutro laterum circa rectum A B, & hypotenuſâ A C ad latus alterum CB cognitâ AD majore exiſtente, quàm in ratione data DC ad CB: invenire hypotenuſam AC, & latus alterum CB.

Sit AB 12, AD 3, & DC ad CB, ut 2 ad 1. Igitur ut inveniantur AC, CB, deſcribatur centro C & intervallo CB circulus BEF, ſecans AC in E, & eandem productam in F. Tum deſcripto ſuper A F $\square^{to}$ FG, erit, aſſumptâ AH æquali AE, [a] ▭ HF æquale $\square^{to}$ ex AB 144. Deinde productâ A G, ſumantur in illa G I, I K æquales A D, eritque (quia A G eſt æqualis AF, & A H æqualis A E) HG æqualis E F, hoc eſt, duplæ DE: adeoque HK dupla ipſius AE vel AH, & idcirco AK tripla ipſius AH. Patet itaque [b], ▭ KF triplum eſſe ▭^{li} HF, ideoque facere 432. Eſt autem gnomon IFL etiam æqualis ▭^{lo} KF. Hinc, ſi ad 432 addatur $\square$ L I 9, habebitur $\square^{tum}$ ex IA 441. Cujus radix 21, erit ipſa IA. E qua ſubductâ IG 3, relinquitur G A vel A F 18. Ex hac autem ſi rurſus auferatur A D 3, reſtabit D F 15. Cujus triens 5, erit latus B C. Unde AC erit 13. Quæ erant inveniendæ.

a p 36 Tertii Elem. Eucl.

b p 1 Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.



Notandum hîc eſt, accidere poſſe, ut B C non niſi ſemel contineatur in A C, aliquo remanente exceſſu; vel etiam pluries, abſque reliquo. Quocirca in primo caſu operandum erit ut in 6ta Propne factum fuit, ubi ex uno latere AB circa rectum B, & differentia A E reliquorum duorum A C, C B invenimus ipſa AC & CB. Quod autem ad ſecundum ca-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

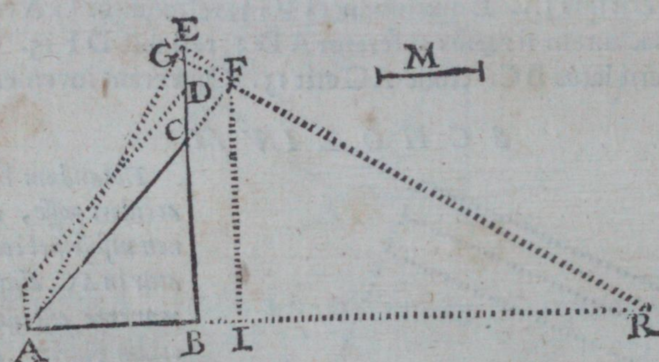
caſum attinet, ſciendum eſt, omnem difficultatem in eo tantùm conſiſtere, ut ex cognita rectanguli area, & ratione laterum, inveniantur ipſa latera. Si enim, ex. gr., BC contineatur in AC bis abſque reliquo, erit AF tripla AE, ac propterea cum ▭ HF ſit 144, nimirum [c] *æquale □^to ex AB 12: erit □ ex BC 48, & BC* $\surd$ *48; ac proinde AC* $\surd$ *192.*

c p. 36 Tertii Elem. Eucl.

XL.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, & aggregato hypotenuſæ AC & areæ ABC: invenire hypotenuſam & aream.

Eſto AB 3, & aggregatum ipſius AC & areæ ABC 11. Jam ad inveniendam AC, deſcribatur ſuper ipſa ▭^mum AD, latitudinē habens unitatis, quod unà cum area ABC faciat 11. Cui ſummæ ſi ſumatur æquale △ ABE, & AC producatur donec in eam cadat perpendicu-



laris EF: erit ▭ AD æquale △^lo ACE, & altitudo EF 2. Deinde demiſſâ ex F ſuper AE perpendiculari FG, producatur ipſa donec cum AB productâ conveniat in R, & ex F demittatur in AR perpendicularis FI. His poſitis, ſi 11, area △^li ABE, dividatur per $\frac{3}{2}$, ſemiſſem ipſius AB, orietur BE $\frac{22}{3}$. Cujus □ additum ad 9, □ ex AB, habebitur $\frac{565}{9}$, □ ex AE. Unde AE ſit $\surd \frac{565}{9}$, hoc eſt, $\frac{1}{3} \surd 565$ vel $\frac{1}{3} \surd 113,5$. Deinde ex $\frac{565}{9}$, □ ex AE, ſubducto 4, □ ex EF, reſtabit $\frac{529}{9}$, □ ex AF. Cujus $\surd$, erit $\frac{23}{3}$, ipſa AF. Tum fiat, propter ſimilitudi-

tudinem △lorum AEF, AFG, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AF $\frac{23}{3}$ ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, & EF 2 ad FG $\frac{23,2}{\sqrt{113,5}}$. Rurſus, ob ſimilitudinem △lorum ABE, AGR, fiat ut AB 3 ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, ita AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad AR $\frac{23,23}{3,3,3}$, & BE $\frac{22}{3}$ vel $\frac{11,2}{3}$ ad GR $\frac{23,23,11,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. E qua ſubductâ FG $\frac{23.2}{\sqrt{113,5}}$, relinquitur FR $\frac{226,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$ vel $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. Eodem modo erit, propter △la ſimilia ABE, FIR, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad FR $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$, ita BE $\frac{11,2}{3}$ ad IR $\frac{2,23,2,11,2}{3,3,3,5}$. Quæ ablata ex AR, $\frac{23,23}{3,3,3}$, relinquet AI $\frac{27,23}{3,3,3,5}$ vel $\frac{3,3,3,23}{3,3,3,5}$, hoc eſt, $\frac{23}{5}$. Denique, ob ſimilia △la AIF, ABC, fiat ut AI $\frac{23}{5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AB 3 ad AC 5. Unde area ABC erit 6. Quod erat faciendum.

Aliter.

Fiat ut AB 3 ad EF 2, ita BE $\frac{22}{3}$ ad quartam M. quæ ideo erit $\frac{44}{9}$. Deinde fiat, ut 5, differentia □torum ex AB, EF, ad □ ex AB 9, ita $\frac{25}{9}$, differentia ipſarum AF & M, ad AC 5. Quod hoc modo patet. a p 19 Quinti Elem. Eucl.

Quoniam enim per conſtructionem BE eſt ad M, ut AB ad EF; atque etiam, propter ſimilitudinem △rum ABC, EFC, CB ad CF ſit, ut AB ad EF: erit quoque [a] ſubductis CB, CF ex BE, M, reliqua CE ad reliquam M demptâ eidem CF, ſicut AB ad EF. Sed ut AB ad EF, ita eſt quoque AC ad CE. Quare proportionales ſunt AC, CE, & M minus CF. Hinc [b], ut □ ſuper prima AC ad □ ſuper 2da CE, hoc eſt [c], ut □ ex AB ad □ ex EF, ita 1ma AC erit ad 3tiam M minus CF. Hoc eſt, per converſionem rationis & convertendo [d], ut □ ex AB minus □ ex EF ad □ ex AB, ita AF minus M ad AC. Quæ erat invenienda.

b p corol. 20 Sexti Elem. Eucl.
c p 22 Sexti Elem. Eucl.
d per corol. 19 Quinti, & Corol. 4 Quinti Elem. Eucl.

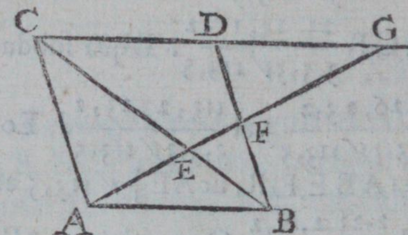
XLI.

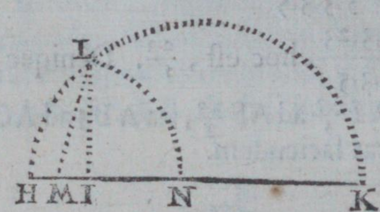
Dato rhombo ABDC, cujus diagonales CB, AD: ex A

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

rectam lineam ducere A E F G, quæ conveniat cum latere producto CD, ita ut intercepta EF ad totam AG datam habeat rationem, ut HI ad IK.

Conſtructio.





Deſcripto ſuper HK ſemicirculo HLK, erigatur ex I ſuper ipſam perpendicularis IL, occurrens circumferentiæ in L. Tum diviſâ HI bifariam in M, jungatur ML, cui ſi ſumatur æqualis MN, fiat ut NI ad IH, ita AB ad BF: dico, ſi ex A per F recta ducatur linea, EF eſſe ad AG, ſicut HI ad IK.

Demonſtratio.

Ex demonſtratis 2^{di} modi $27^{mæ}$ $prop^{nis}$ hujus, HI, IN, & NK ſunt 3 proportionales, & per 4^{tam} prop. 6 lib. Elem. Euclidis AFB & ACG ſunt duo $\triangle^{la}$ ſimilia. Hinc ut FB ad BA, ita erit AC, hoc eſt, AB, ad CG; adeóque FB, BA, & CG 3 proportionales. Eſt autem per conſtructionem HI ad IN, ut FB ad BA. Quare HI, IN, & NK tres ſunt proportionales in eadem ratióne quâ FB, BA, & CG: & proinde HI ad IN, NK, hoc eſt, IK, ita FB ad AB, CG. Jam verò ratio FB ad AB, CG compoſita eſt ex ratione FB ad BA, & ex ratione BA ad AB, CG. Quocirca & ratio HI ad IK ex iiſdem rationibus erit compoſita. Rurſus cum ratio EF ad AG componatur ex ratione FE ad EA, hoc eſt [a], FB ad BA, & ex ratione EA ad AG, hoc eſt, AC vel AB ad AB, CG, ex quibus rationibus componebatur quoque ratio HI ad IK: erit ratio EF ad AG eadem, quæ HI ad IK. Quod erat faciendum.

a p 3 Sexti Elem. Eucl.

Ubi notandum, cum recta, ab A ad D ducta, ſit extrema linea, quæ juxta mentem Problematis duci poteſt, eaque per rectam CB bifariam dividatur, rationem quam EF ad AG habere debet, non majorem requiri quàm 1 ad 2, hoc eſt, ut HI non major ſit dimidiâ IK.

XLII.

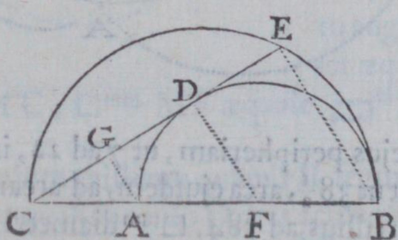
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XLII.

Deſcriptis ſuper recta C A B duobus ſemicirculis CEB & A D B, ſeſe tangentibus in B, & ex C ductâ C D E, tangente minorem ſemicirculum in D, & terminatâ majoris circumferentiâ in E: invenire utriuſque diametrum, ſi CD ſit 10, & D E 6.

Etenim F exiſtente centro minoris ſemicirculi A D B, jungantur B E, F D. Quæ [a] inter ſe erunt parallelæ. Tum ductâ A G parallelâ F D vel B E, erit G D æqualis D E; & C G ad C E, ut C A ad C B. Hinc ſi ex C D 10 auferatur DE vel D G 6, relinquetur C G 4; item ad CD 10 additâ DE 6, fiet CE 16. Ex quibus igitur nota eſt ratio,

a p 18 & 31 Tertii, ut & 28 Primi Elem. Eucl.



quam CA habet ad CB, quippe eadem, quæ 4 ad 16, ſeu 1 ad 4. Deinde cum □ ex CD ſit 100, idemque [b] ſit æquale ▭ A C B, quæſtio eò perducta erit, ut, datis ▭ A CB areâ 100, & ratione laterum C A, C B, 1 ad 4, inveniantur ipſa latera. Quod fiet, ponendo ut CA ad A C, hoc eſt, ut 1 ad 4, ita [c] ▭ A C B 100 ad □ ex CB 400. Cujus √ ut 20, erit diameter major CB. Quare, cum C B ſit ad CA, ſicut 4 ad 1: erit hæc 5, adeoque minor diameter AB 15.

b p 36 Tertii Elem. Eucl.

c p 1 Sexti Elem. Eucl.

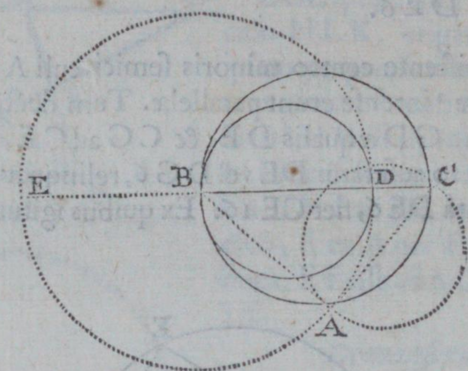
XLIII.

Cognitâ duorum circulorum differentiâ, & differentiâ diametrorum D C, invenire utriuſque diametrum B D & B C.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Eſto D C 8, & differentia circulorum, hoc eſt, area lunulæ B A C B D 616. Hinc ad inveniendas B D, B C, deſcribatur centro B intervallo B D circulus E D A, ſecans circulum B C A in A, junganturque B A, A C: eritque [a] deſcriptus circa A C circulus æqualis lunulæ B A C B D, hoc eſt, 616. Unde facile, ſtatuendo diame-

a p 2 Duodecimi & 47 Primi Elem. Eucl.

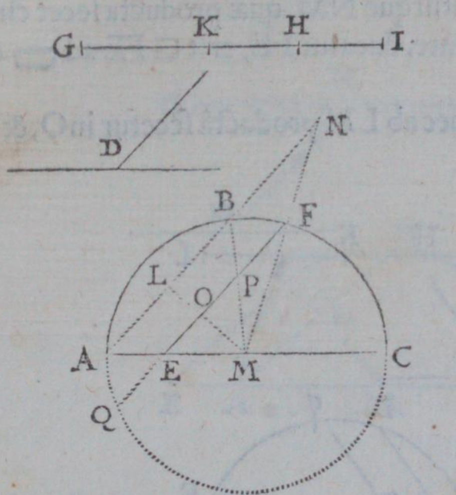


trum circuli eſſe ad ejus peripheriam, ut 7 ad 22, invenitur diameter AC: nimirum, ſi fiat ut $38\frac{1}{2}$, area ejuſdem, ad aream circuli AC 616, ita 49, $\square^{tum}$ diametri illius, ad 784, $\square^{tum}$ diametri hujus. Unde AC fit 28. Eò itaque Problema reductum eſt, ut, Datis $\triangle^{li}$ rectanguli ABC latere circa rectum A C 28, & D C 8, differentiâ reliquorum duorum A B, B C, invenienda ſint latera A B, B C, per 6^{tam} prop^{nem} hujus: eritque AB vel BD 45, & BC 53. Quæ inveniendæ proponebantur.

XLIV.

Dato ſemicirculo A B F C, punctum invenire E in diametro A C vel ea producta, è quo ſi in dato angulo D ad circumferentiam A B C recta ducatur linea E F, quadratum, quod ab ipſa deſcribitur, ad rectangulum AEC, contentum ſub rectis EA, A C, inter quæſitum punctum E & diametri A C utrumque terminum A & C interceptis, datam habeat rationem, G H ad H I.

Idem hoc ab Eutocio *oſtenditur in commentariis ſuis ſuper 53 & 54 propner libri 1mi* Conicorum Apollonii.



Primùm igitur, ſi datus angulus D eſt rectus, requiritur, ut H G ſit æqualis H I: quandoquidem ſi ſuper A C utcunque ducatur perpendicularis ad circumferentiam, □tum ipſius ſemper [a] eſt æquale ▭lo A E C.

Quare, ſi D non ſit rectus, ponatur primò G H eſſe æqualis H I, & ex centro M ducatur M F in dato angulo D, eritq; propter æqualitatem linearum A M, M F, & M C, □tum M F æquale ▭lo A M C. Ut requirebatur.

At verò G H majore exiſtente quàm HI, ſegmento GK, conſtituatur angulus CAB æqualis angulo D, ſi is acutus ſit, aut ei deinceps, ſi obtuſus fuerit; & ex M ad medium ipſius AB ducatur ML: quæ [b] ipſi AB erit perpendicularis. Deinde fiat, ut GK ad GI, hoc eſt, ut differentia ipſarum G H, H I ad earundem ſummam, ita LB ad LN, jungaturque NM, ſecans circumferentiam in F. Dico ſi ex F ad A C ducatur FE parallela A B, hoc eſt, in dato angulo D, □tum E F ad ▭lum AEC eſſe, ut GH ad HI.

Ad quod demonſtrandum, producatur FE ad alteram circumferentiæ partem in Q, jungaturque B M, ſecans E F in P. Quoniam itaque per conſtructionem G K eſt ad GI, ut L B ad L N; hoc eſt, invertendo G I ad GK, ut LN ad LB: erit quoque [c] per converſionem rationis, ut GI ad KI, ita LN ad BN, vel OF ad PF. Et ſumptis antecedentium duplis [d], ut dupla GI ad KI, hoc eſt [e], ut G I ad H I, ita QF ad PF; dividendòque [f] ut GH ad HI, ita QP, hoc eſt, EF, ad PF, hoc eſt, QE. Sed ut EF ad EQ, ita eſt [g] (aſſumptâ communi altitudine EF) □ EF ad ▭ QEF vel A E C [h]. Erit itaque ut G H ad HI, ita □ E F ad ▭ AEC.

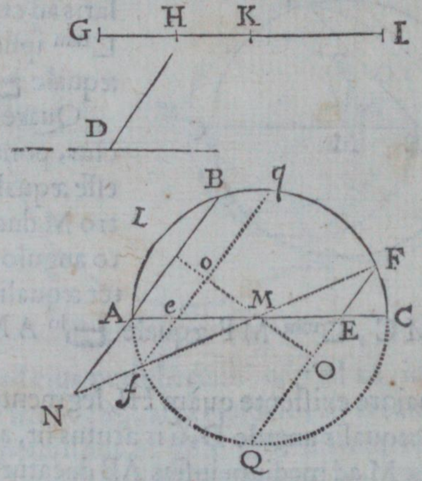
a p 35 Tertii Elem. Eucl.
b p 3 Tertii Elem. Eucl.
c p corol. 19. Quinti Elem. Eucl.
d Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
e p 15 Quinti Elem. Eucl.
f p 17 Quinti Elem. Eucl.
g p 1 Sexti Elem. Eucl.
h p 35 Tertii Elem. Eucl.

 Quòd

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quòd ſi GH minor ſit quàm HI, ſegmento KI: fiat rurſus, ut KI ad GI (hoc eſt, ut differentia ipſarum GH, HI ad earundem ſummam), ita AL ad LN, jungaturque NM, quæ producta ſecet circumferentiam in F: Tum ſi, ut ante, ducatur FE, erit □ FE ad ▭ AEC, ſicut GH ad HI.

Etenim productâ FE, donec ab LM productâ ſecetur in O, & à cir-



cumferentia in Q: quoniam, per conſtructionem, KI eſt ad GI, ut AL ad LN, hoc eſt, invertendo GI ad KI, ut LN ad AL: erit etiam [i] per conversionem rationis, ut GI ad GK, ſic LN ad NA, vel OF ad FE. Et duplatis antecedentibus [k], ut dupla GI ad GK, hoc eſt [l], ut GI ad GH, ita QF ad FE: & dividendo [m] HI ad GH, ut EQ ad FE, hoc eſt, invertendo GH ad HI, ut FE ad EQ, hoc eſt [n], (aſſumptâ communi altitudine FE) ut □ FE ad ▭ FEQ vel AEC [o]. Quibus igitur ſatisfactum erit primæ parti Problematis.

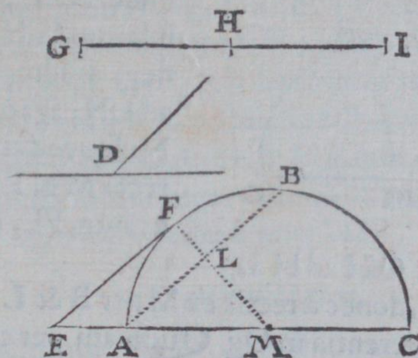
Porrò, ſi punctum E inveniendum ſit in producta AC: ſciendum eſt, datum angulum D eo caſu non poſſe eſſe rectum, cum ex nullo puncto in producta AC perpendicularis duci queat, quæ circumferentiam vel tangat vel ſecet.

Hinc angulo D non exiſtente recto, eſto primùm GH æqualis HI, fiatque angulus CAB æqualis angulo D, ſi is acutus ſit, vel illi qui

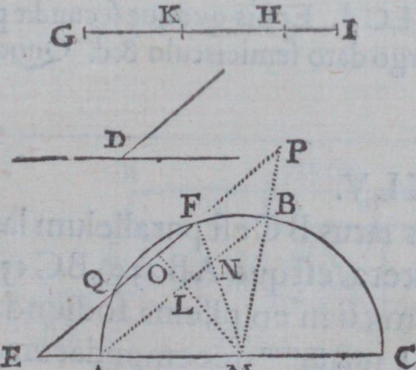
i p corol. 19 Sexti Elem. Eucl.
k Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
l p 15 Quinti Elem. Eucl.
m p 17 Quinti Elem. Eucl.
n p 1 Sexti. Elem. Eucl.
o p 35 Tertii Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

qui ei eſt deinceps, ſi fuerit obtuſus, & ex M per medium ipſius A B uſque ad circumferentiam ducatur recta M L F: Dico, ſi F E ducatur



parallela A B, hoc eſt, in dato angulo D ad productam A C, quadratum EF [p] æquale eſſe rectangulo AEC. Ut requirebatur. ꝑ 16 ex 36 Tertii Elem. Eucl.



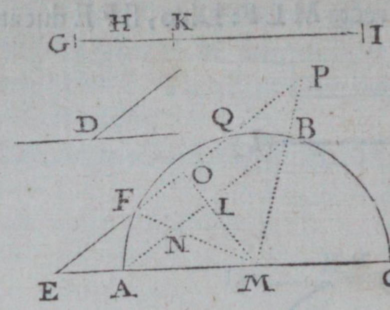
GH autem majori exiſtente quàm H I, ſegmento GK, fiat ut G I ad GK, hoc eſt, ut aggregatum ipſarum G H, H I ad earundem differentiam, ita B L ad L N; agatur-que ex M per N uſque in circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ F E ipſi A B parallelâ, circumferentiam ſecante in Q, □ FE ad ▭ AEC eſſe, ſicut GH ad HI.

Quod ut demonſtretur, producendæ ſunt ML & MB, donec ipſi EF occurrant in O & P. Quoniam igitur per conſtructionem GI ad GK eſt, ſicut B L ad L N: erit quoque [q] per converſionem rationis GI ad KI, ut LB ad BN, vel OP ad PF. Et duplatis antecedentibus, [r] ut dupla GI ad KI, hoc eſt [s], ut GI ad HI, ita EP ad PF: dividendo-que [t] ut GH ad HI, ita E F ad FP vel E Q, hoc eſt, [u] (aſſumptâ communi altitudine EF) ut □ EF ad ▭ FEQ vel AEC [x].

q ꝑ corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
r Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
s ꝑ 15 Quinti Elem. Eucl.
t ꝑ 17 Quinti Elem. Eucl.
u ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.
x ꝑ 36 Tertii Elem. Eucl.

Deni-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Denique, ſi G H ſit minor quàm H I, ſegmento K I, fiat rurſus, ut G I ad K I, (hoc eſt, ut aggregatum ipſarum G H, H I ad earundem differentiam) ita A L ad L N; agaturque ex M per N uſque ad circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ, ut ante, FE, □tum ex FE eſſe ad ▭ilum A E C, ſicut G H ad H I.

y p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
z Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
a p 15 Quinti Elem. Eucl.
b p 17 Quinti Elem. Eucl.
c p 1 Sexti. Elem. Eucl.
d p 36 Tertii Elem. Eucl.

Productâ enim EF, donec à rectis ex M per B & L ductis ſecetur in P & O, & à circumferentia in Q: Quoniam per conſtructionem G I eſt ad K I, ut AL ad L N: erit quoque [y] per converſionem rationis GI ad GK, ut AL ad AN, vel E O ad EF. Et duplatis antecedentibus [z], ut dupla G I ad G K, hoc eſt [a], ut G I ad G H, ita EP ad EF; dividendoque [b] IH ad HG, ut PF, hoc eſt, E Q, ad FE; & invertendo G H ad H I, ut F E ad E Q, hoc eſt [c], (aſſumptâ communi altitudine EF) ut □ FE ad ▭ F E Q vel AEC [d]. Et his quoque ſecundæ parti Problematis ſatisfactum eſt. Ergo dato ſemicirculo &c. Quod faciendum erat.

XLV.

Trapezii A B C D, cujus latus B C eſt parallelum lateri AD, cognita ſunt omnia latera, eſtque AB 13⊙, BC 133①, C D 15⊙, & A D 273①. Jam, ſi in eo piſcina fodienda ſit EFGH, datæ magnitudinis I 168 □rum decempedarum, ita ut cingatur ambulacro ubique ejuſdem latitudinis; quæritur, quanta ſit futura ejus latitudo T *m*?

Sumptâ *b m* æquali B M, & *a n* æquali A N, quoniam B M, A N ſimul æquales ſunt A B, itemque *m* C & *n* D ſimul æquales C D: erunt *b* C & *a* D ſimul æquales ipſis A B & CD, hoc eſt, 28⊙. Quæ ſi auferantur ex B C & AD 406①, relinquentur B *b* & A *a* 126①; eritque trapezium *a b* C D ſimile trapezio *e f* G H. Jam per 8 prop. hujus quæratur latitudo *m n* 12, eritque 6, ejuſdem ſemiſſis, linea *m k*.

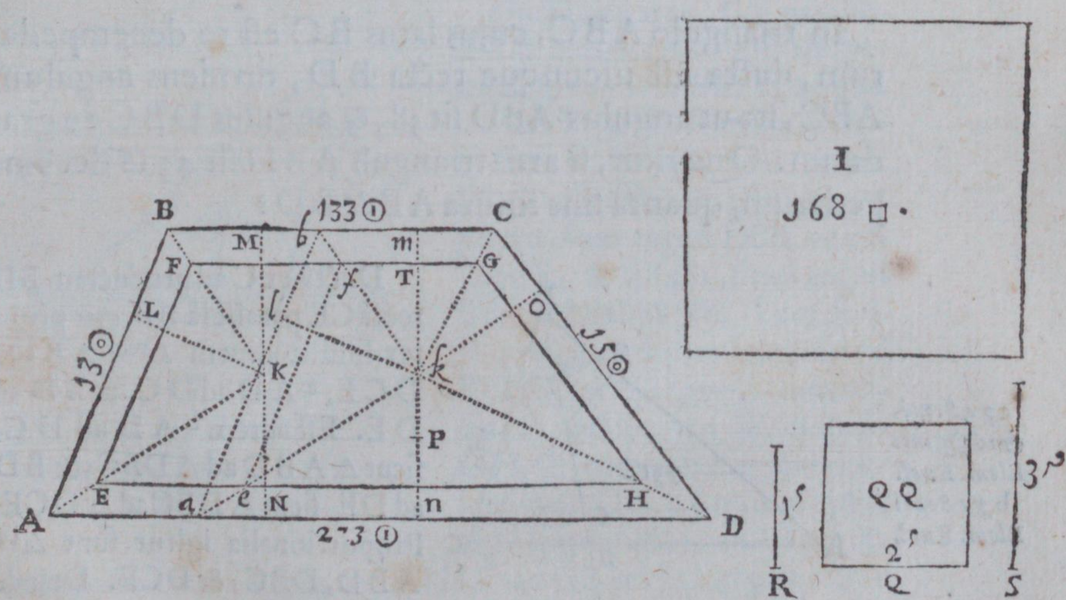
Tum

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Tum fiat, ut 28, ſumma ipſarum *b* C, *a* D, ad *m k* 6, ita ſumma ipſarum B *b*, A *a* 126① ad *k* P 27①. Deinde, ut 28, ſumma ipſarum *b* C, *a* D, ad *m k* 6, ita 168, area piſcinæ I, ad 36, aream □ti Q Q. Cujus radix 6, erit ipſum latus Q. Porrò ſtatuendo Q 6 eſſe mediam è ſerie trium proportionalium R, Q, & S; & *k* P 27① differentiam extremarum R & S, inveniantur per 26 Prop. hujus extremæ R & S. Quarum minor R 48①, ſemiſſis erit latitudinis piſcinæ ſive recta *k* T. Quæ ſi auferatur ex *m k* 6⓪, reſtabit 12①, latitudo ambulacri *m* T. Hinc ductis rectis EF, FG, GH, & HE ipſis AB, BC, CD, & DA parallelis & æquali ubique intervallo ab iis remotis, dico aream piſcinæ EFGH æqualem eſſe datæ areæ I 168.

Demonſtratio.

Per conſtructionem R, Q, & S ſunt 3 proportionales, hinc cum T *k* ſit æqualis R, & *k* P differentia extremarum R & S: erunt & T *k*, Q, & TP 3 proportionales, adeoq; [a] ▭ ſub TP, T *k* æquale □to QQ. *a 17 Sexti Elem. Eucl.*
Deinde quoniā per conſtructionem eſt, ut ſumma ipſarum *b* C & *a* D



ad *m k*, ita ſumma ipſarum B *b* & A *a*, ſeu ipſarum F *f* & E *e* ad *k* P: erit quoque invertendo [b] ut *m k* ad ſummam ipſarum *b* C, *a* D, ita *k* P ad ſummam ipſarum F *f*, E *e*, hoc eſt, [c] (aſſumptâ communi altitudine *b p corol. 4 Quinti Elem Eucl.* *c p 1 Sexti Elem. Eucl.*

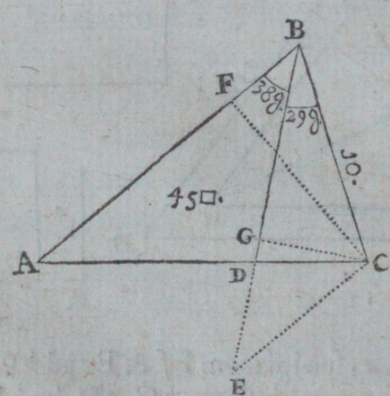
 dine

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

dine *k*T) ita ▭ P *k* T ad ▭ ſub F*f*, E*e*, & *k*T, hoc eſt, ad parallelogrammum EF*fe*. Æquè, quoniam propter ſimilitudinem trapeziorum *ab* CD & *ef* GH eſt, ut *mk* ad ſummam ipſarum *b* C & *a* D, ſic
d ꝑ 1 Sexti, Elem Eucl. *k* T ad ſummam ipſarum *f* G & *e* H, hoc eſt, [d] (aſſumptâ communi altitudine *k*T) ſicut □ ex *k*T ad ▭ ſub *f* G, *e* H & *k*T, hoc eſt, ad trapezium *ef* GH: erit quoque per 12. 5. ut □ ex *k*T unà cum ▭[lo]
e ꝑ constructionem. P *k*T, id eſt, ▭[lo] ſub TP & T *k*, ad trapezium *ef* G H unà cum parallelogrammo EF*fe*, hoc eſt, ad trapezium EFGH, ita *mk* ad ſum-
f ꝑ corol. 4ta Quinti Elem Eucl. mam ipſarum *b* C & *a* D. Sed ut ſumma ipſarum *b* C, *a* D ad *mk*, ita [e] eſt 168, area piſcinæ I, ad 36, aream □[ti] QQ, hoc eſt [f], invertendo
g ꝑ 11 Quinti Elem. Eucl. *mk* ad ſummam ipſarum *b*C, *a* D, ita 36, area □[ti] QQ ad 168, aream piſcinæ I. Quare erit [g] ut ▭ ſub T P, T *k* ad trapezium
h ꝑ 14 Quinti Elem. Eucl. EFGH, ita □ QQ ad aream piſcinæ I. Eſt autem ▭ ſub TP, T *k* æquale oſtenſum ipſi □[to] QQ. Æquale igitur quoque erit [h] trapezium EFGH areæ piſcinæ I. Quod erat faciendum.

XLVI.

In triangulo ABC, cujus latus BC eſt 10 decempedarum, ducta eſt utcunque recta BD, dividens angulum ABC, ita ut angulus ABD ſit 38, & angulus DBC 29 graduum: Quæritur, ſi area trianguli ABD ſit 45 □ decempedarum, quanta ſint futura AB & BD?



Ductâ ex C ad productam BD rectâ CE parallelâ AB, erit propter ſimilitudinem △rum ABD, DCE, [a] AD ad DC, ut BD ad
a ꝑ 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl. DE. Eſt autem [b] AD ad DC, ſicut △ ABD ad △ DBC; & BD
b ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl. ad DE, ſicut △ DBC ad △ DCE. Proportionalia igitur ſunt △la ABD, DBC, & DCE. Deinde cum in △lo EBC cognoſcantur latus BC & bini anguli CBE & E, hoc eſt, ABD: invenietur ex iis, juxta doctrinam triangulorum planorum, area △li EBC 36 $\frac{25}{100}$, cir-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

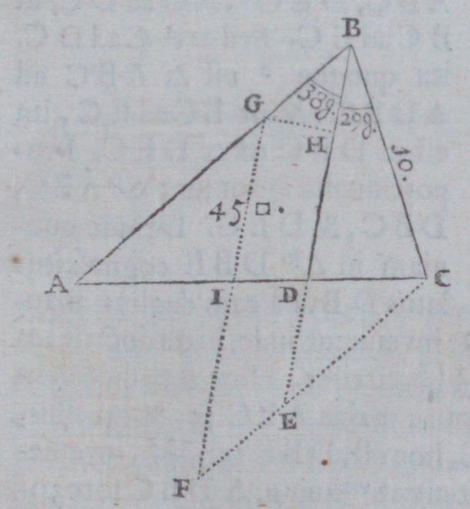
circiter. Hinc cum trium dictorum △^{lorum} cognoſcatur 1^{mum} ABD, & aggregatum reliquorum duorum DBC, EDC, hoc eſt, EBC $36\frac{25}{100}$: invenietur, per modum operandi in Scholio 27^{mæ} hujus oſtenſum, △ DBC eſſe $23\frac{73}{100}$: ac proinde totum △ ABC $68\frac{73}{100}$, adeoque duplum ejus [c], ſive rectangulum contentum ſub AB & perpendiculari CF, eſſe $137\frac{46}{100}$. E quibus porrò innoteſcit rectangulum ſub AB & BC, ſi fiat ut FC ad CB, hoc eſt, ut 92050, ſinus anguli FBC, ad 100000, ſinum anguli recti BFC, ita $137\frac{46}{100}$ ad $149\frac{33}{100}$. Quod diviſum per BC 10, dat AB $14\frac{93}{100}$, hoc eſt, 14 decempedarum, 9 pedum, & 3 digitorum, circiter.

c p 41 Primi Elem. Eucl.

Porrò ut inveniatur BD, ponendum erit, ut GC ad CB, hoc eſt, ut 48481, ſinus anguli DBC, ad 100000, ſinum anguli recti CGB, ita $47\frac{46}{100}$, ▭ ſub DB & perpendiculari GC ſeu [d] duplum △^{li} DBC, ad $97\frac{89}{100}$, ▭ ſub DB & BC. Quod diviſum per BC 10, dat DB $9\frac{79}{100}$, hoc eſt, 9 decemp., 7 ped., & 9 dig. circiter.

d p 41 Primi Elem. Eucl.

Aliter.



Ductâ, ut ante, CE parallelâ AB, conſtituatur ſuper BE parallelogrammum BEFG æquale △^{lo} ABD, 45 □ decemp. Deinde fiat, ut 61566, ſinus anguli BEC vel ABE, ad AB 10⓪, ita 92050, ſinus anguli ECB, ad EB 1495②, & 48481, ſinus anguli EBC, ad EC 787②. Tum diviſâ 45⓪, areâ parallelogrammi BEFG, per EB 1495②, longitudinem: orietur 301②, latitudo GH. E quibus facilè invenitur longitudo GB, ſi fiat, ut 61566, ſinus anguli GBH, ad GH 301②, ta 100000, ſinus anguli recti GHB, ad GB vel FC 489②. Quæ ad EC 787② addita, dat FC 1276②. Porrò, cum æqualia ponantur △ ABD & parallelogrammum BEFG, erit, ablato communi trapezio IGBD, quoque △ AGI æquale trapezio FIDE. Quibus ſingulis ſi addatur △ EDC, erit △ FIC æquale binis △^{lis} AGI, EDC. Quare cum

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

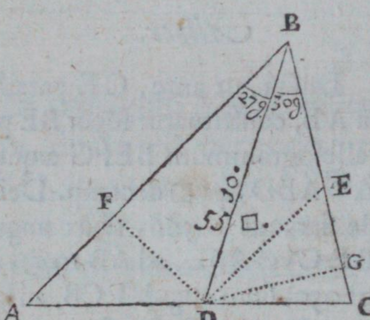
e p 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.
f p 19 Sexti Elem. Eucl.

cum ipſa [e] inter ſe ſimilia ſint, adeoque [f] ad ſe invicem ut □^{ta} homologorum laterum: erit □ ex F C æquale binis □^{tis} ex AG & EC. Hinc ſi ex 1628176④, □^{to} ex F C, auferatur 619369④, □ ex EC, relinquetur 1008807④, □ ex A G, cujus radix 1004②, erit ipſa AG. Cui additâ GB 489②, habebitur AB 1493②. Ut ſupra.

E quibus facile etiam eſt invenire BD, ſtatuendo, ut 2280②, ſumma ipſarum A B, E C, ad E B 1495②, ita A B 1493② ad B D 979②. Unde porrò AD & DC inveniuntur juxta doctrinam triangulorum.

XLVII.

In triangulo ABC cognitis angulis ABD 29, & DBC 30 graduum, lineâ B D 10 decempedarum, & areâ trianguli ABC 55 □ decempedarum: invenire AB & BC.



a p 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.

Ductâ ex D rectâ D E parallelâ AB, occurrente ipſi B C in E: erit propter ſimilitudinem △^{rum} A B C, D E C [a], A C ad D C, ut B C ad E C. Sed ut A C ad D C, ita quoque [b] eſt △ A B C ad △ D B C; & ut B C ad E C, ita eſt △ D B C ad △ D E C. Proportionalia igitur ſunt △^{la} A B C, D B C, & D E C. Deinde quoniam in △^{lo} D B E cognoſcitur latus D B unà cum duobus angulis D B E & B D E, hoc eſt, ABD: invenietur inde, juxta doctrinam △^{lorum} planorum, area DBE $13\frac{533}{1000}$, circiter. Hinc cum dictorum 3 triangulorum cognoſcatur 1^{mum} ac majus A B C 55, & exceſſus, quo 2^{dum} DBC ſuperat 3^{tium} DEC, hoc eſt, D B E $13\frac{533}{1000}$, invenietur, per modum Scholii propoſitionis 28^{væ} hujus, △ D B C fore $30\frac{955}{1000}$, vel $24\frac{45}{1000}$. Unde ſi D B C ponatur eſſe $30\frac{955}{1000}$, erit A B D $24\frac{45}{1000}$; at verò ſupponendo D B C eſſe $24\frac{45}{1000}$, erit A B D $30\frac{955}{1000}$. Quare ſumendo A B D eſſe $24\frac{45}{1000}$, erit ejus duplum, hoc eſt [c], ▭ ſub AB & perpendiculari FD contentum, $48\frac{90}{1000}$. E quibus porrò invenitur ▭ ſub AB & B D, ſi fiat, ut FD ad DB, hoc eſt, ut 45399, ſinus anguli A B D, ad 100000, ſinum anguli recti D F B,

c p 41 Primi Elem. Eucl.

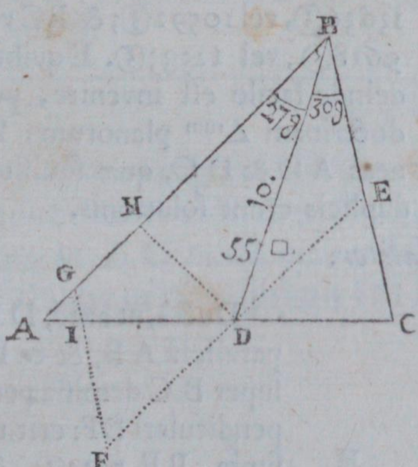
ita

ita 48 $\frac{90}{1000}$ ad 105 $\frac{927}{1000}$. Quo diviſo per D B 10, orietur A B 10 $\frac{593}{1000}$, circiter, hoc eſt, 10 decemp., 5 ped., 9 dig. & 3 granorum.

Porrò ut inveniatur B C, fiat ut D G ad D B, hoc eſt, ut 50000, ſinus anguli DBC, ad 100000, ſinum anguli recti DGB, ita 61 $\frac{910}{1000}$, ▭lum ſub B C & perpendiculari D G, hoc eſt [d], duplum △li DBC, ad 123 $\frac{820}{1000}$, ▭ ſub DB, BC. Quod per DB 10 diviſũ, dat paulò minus quàm 12 $\frac{382}{1000}$, hoc eſt, 12 decemp., 3 ped., 8 dig., & 2 gran. pro BC. d p 41 Primi Elem. Eucl.

Eodem modo, ſi A B D ponatur 30 $\frac{955}{1000}$, invenietur A B circiter 13 $\frac{637}{1000}$, & BC 9 $\frac{618}{1000}$; ita ut latera A B, B C ſingula duplicem ſortiantur valorem, & quidem A B ſit vel 10 $\frac{593}{1000}$ vel 13 $\frac{637}{1000}$; & B C vel 12 $\frac{382}{1000}$ vel 9 $\frac{618}{1000}$.

Aliter.

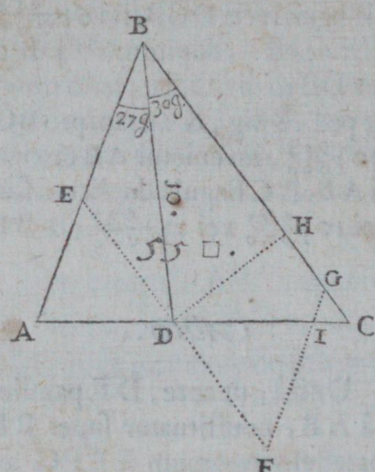


Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, conſtituatur ſuper B E parallelogrammum B E F G æquale △lo A B C, hoc eſt, 55 □ decemp. Tum fiat, ut 83867, ſinus anguli D E B, vel A B C, ſeu D E C 57 grad., ad D B 10⓪, ita 45399, ſinus anguli BDE ſeu A B D, ad BE 5413③; & 50000, ſinus anguli DBE, ad DE 5962③. Deinde, ut 100000, ſinus anguli recti D H B, ad D B 10⓪, ita 45399, ad 4540③, perpendicularem D H. Hinc diviſâ 55⓪, areâ parallelogrammi B E F G, per 4540③, perpendicularem ſeu latitudinem D H, orietur 12115③, longitudo G B ſeu F E. E qua ſubductâ D E 5962③, reſtabit F D 6153③. Porrò quoniam parallelogrammum B E F G æquale ponitur △lo ABC, erit ſubductâ communi areâ I G B E D, △ FID æquale duobus ſimul △lis A G I & DEC. Hinc cum ipſa [e] inter ſe ſimilia ſint, ac proinde [f] ad ſe invicem ut □ta laterum homologorum, erit □ ex F D æquale binis □tis ex AG & DE: adeoque ſi à □to ex FD 37859409⑥ auferatur □ ex DE 35545444⑥, relinquetur 2313965⑥, □ ex AG. Cujus radix 1521③, erit ipſa AG. Huic ſi addatur G B 12115③, fiet AB 13636③, paulò minor, quàm ſuprà.

e p 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.
f p 19 Sexti Elem. Eucl.

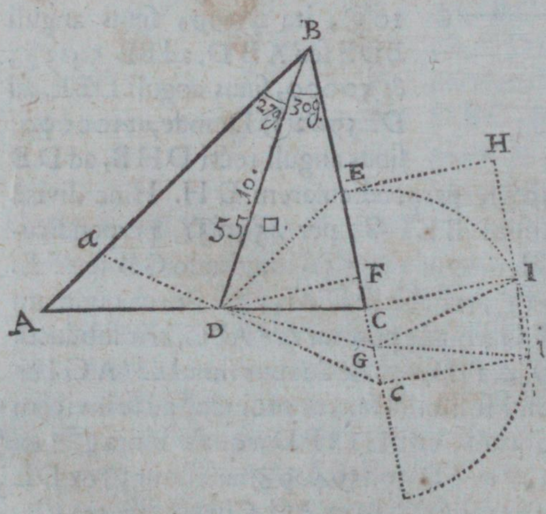
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Porrò ut inveniatur B C, fiat, ut 76743, differentia ipſarum A B DE, ad BE 54133, ita AB 136363 ad BC 96183. ut ſupra.



Eodem modo, ſi D E agatur parallela BC, donec occurrat ipſi AB in E, & ſuper EB, ut ſupra, conſtituatur parallelogrammum BEFG æquale △lo A B C, invenietur AB 105923, paulò minor, quàm ante; & BC 123833, paulò major, quàm ſupra; Ita ut A B & B C ſingula ſint duplicis ſolutionis, nimirum A B vel 136363, vel 105923; & BC vel 96183, vel 123833. E quibus deinde facile eſt invenire, per doctrinam △rum planorum, lineas A D & D C, quæ ſimiliter duplicis erunt ſolutionis.

Adhuc aliter.



Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, & ex D ſuper B C demiſſâ perpendiculari DF: erit, ut ſupra, BE 54133, & DE 59623. Tum fiat, ut 100000, ſinus anguli recti DFB, ad DB 10⓪, ita 50000, ſinus anguli D B F, ad D F 5⓪. Deinde ſupponendo △lum DBG æquale ſemiſſi △li A B C, hoc eſt, 275①, ſi dividatur 275① per 25①, ſemiſſem perpendicularis DF, ſeu, quod idem eſt, 55 per 5, orietur baſis BG 11⓪. Si jam B E 54133 ſemiſſis fuerit ipſius BG 11⓪, inventa quo-

quoque fuiſſet BC 11⓪, ac proinde AB & BC ſingulæ unius tantùm ſolutionis. Sed cum hîc minor ſit, erunt AB & BC ſingulæ duplicis ſolutionis. Ad quas inveniendas, ponendo EH æqualem EB, eidemque perpendicularem, deſcribatur centro G intervallo GE ſemicirculus EI*i*, qui ſecetur à recta HI*i* (ipſi BC parallelâ) in punctis I, *i*. E quibus ſi ſuper BC demittantur perpendiculares IC & *ic*, oſtendent ipſæ longitudinem lateris BC. Hinc ſi 29300569⑥, □ ex BE, EH, vel CI, auferatur à □^to^ ex GE vel GI 31214569⑥, relinquetur [d] □ ex CG 1914000⑥. E quo extractâ radice, invenietur GC vel G*c* 1383③. Quæ ex BG 11⓪ ablata, aut eidem addita, dat BC 9617③, vel 12383③. Cujus demonſtratio ex modo præcedenti eſt manifeſta.

d p. 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.

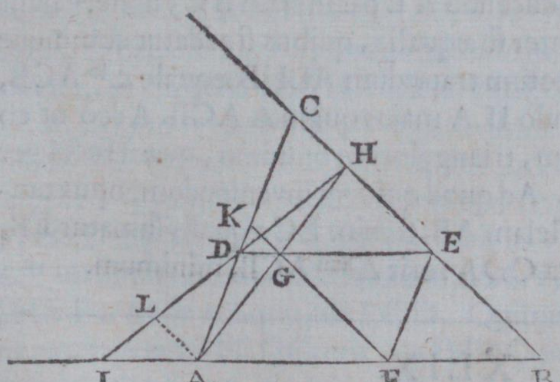
Denique ad inveniendum AB, fiat [e] ut CE 4204③, vel 6970③ ad ED 5962③, ita CB 9617③, vel 12383③ ad AB 13638③, vel 10592③.

e p. 4 Sexti Elem. Eucl.

XLVIII.

Dato triangulo ABC, productiſque lateribus AB, BC indefinitè versùs A & C: per punctum D, utcunque datum in AC extra ejus medium, rectam lineam ducere IDH; ita ut triangulum IHB ſit æquale triangulo ACB.

Conſtructio.



Ductâ DE parallelâ AB, tum EF parallelâ AC, ac rurſus FG parallelâ CB, agatur ex A per G recta AGH: dico, ſi ex H per D ducatur HDI, triangulum IHB æquale eſſe triangulo ACB.

Demonſtratio.

Etenim productâ FG ad K, erit [a] propter ſimilitudinem triangulorum FGE, KGD, EG ad GD, ut FG ad GK. Sed ut EG ad GD, ita quoque eſt BA ad AI; & BA ad AI, [b] ut △ BAH ad △ HAI: itemque FG ad GK, ut BH ad

a p. 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.

b p. 1 Sexti Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ad H C; & B H ad H C, ut △ B A H ad △ A H C. Erit igitur ut △ BAH ad △ HAI, ita idem △ BHA ad △ AHC; adeoque [c] △ HAI æquale $\angle^{lo}$ A H C. Hinc ſi illis addatur commune △ B H A: erit △ IHB æquale $\angle^{lo}$ ACB. Quod erat faciendum.

c 9 Quinti Elem. Eucl.

Aliter.

Fiat ut CB ad EB, ita EB ad EH. Etenim quoniam [d], propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ AHB, AGF, AB eſt ad AF, ſicut BH ad FG, hoc eſt, E B: erit quoque dividendo [e] BF ad F A, ita H E ad EB. Sed ut BF ad FA, ita eſt, [f] propter parallelas FE, AC, BE ad EC. Quare erit [g] ut HE ad E B, ita EB ad EC: & convertendo [h] CE ad EB, ita EB ad EH. Quod erat demonſtrandum.

Adhuc aliter.

Fiat ut FB ad B A, ita AF ad BI. Quoniam enim, ut ante, AB eſt ad AF, ſicut B H ad EB; & per converſionem rationis [i] AB ad B F, ut BH ad HE: erit quoque invertendo [k] FB ad BA, ſic E H ad HB, hoc eſt, [l] propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ HED, HBI, ut DE, hoc eſt, AF, ad IB. Quod erat oſtendendum.

Porrò punctum D extra medium lineæ AC dari debere, hinc patet, quoniam, ſi in medio ipſius datum fuerit, nulla recta IH per id duci poteſt, faciens $\triangle^{lum}$ IHB æquale $\triangle^{lo}$ ACB, ſed ſemper majus. Id quod manifeſtum eſt, ducendo A L parallelam B C, unde [m] fiunt duo $\triangle^{la}$ ALD, D H C inter ſe æqualia, quibus ſi addatur commune trapezium ADHB: erit totum trapezium ALHB æquale $\triangle^{lo}$ ACB, ac proinde △ I H B triangulo ILA majus quàm △ ACB. Adeò ut eo caſu △ A CB ſit minimum, triangulorum omnium, quæ à recta per D ducta conſtitui poſſunt. Ad quod quidem inveniendum, opùs tantùm eſt ducere D E parallelam AB, ſi enim EC æqualis ſumatur EB, & ex C per D agatur recta CDA: erit $\triangle^{lum}$ ACB, minimum.

d p corol. 4 Sexti Elem. Eucl.
e p 17 Quinti Elem. Eucl.
f p 2 Sexti Elem. Eucl.
g p 11 Quinti Elem. Eucl.
h p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
i p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
k p corol. 4te Quinti Elem. Eucl.
l p corol 4te Sexti Elem. Eucl.
m p 26 Primi Elem. Eucl.

XLIX.

Dato parallelogrammo A B D C, ex vel per punctum E, datum in uno laterum B D, vel eodem producto, rectam lineam ducere EF, occurrentem lateribus oppoſitis AC, CD, vel iiſdem productis: ita ut triangulum FCG, ab

eadem

eadem contentum, ad parallelogrammum ABDC datam habeat rationem, HD ad DB.

Vide figuras paginâ verſâ.

Eſt hæc 164 Prop. libri 7 Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini, *quam hîc generalem propoſuimus & ſolvimus, cujus quidem conſtructionem non oſtendit, ſed petere videtur ex libris* Apollonii *de* Spatii Sectione, *qui temporum injuriâ perierunt, atque poſtea reſtituti ſunt ab eruditiſſimo, celeberrimóque Viro* D. Willebrordo Snellio, *qui & de* Determinata & Rationis Sectione *libros, in lucem revocavit.*

Conſtructio.

Ductâ HI parallelâ AB vel CD, faciente parallelogrammum HDCI, deſcribatur ſuper HE ſemicirculus HKE, in quo aptatâ EK æquali ED, jungatur HK: dico, ſi IF ſumatur æqualis HK, & per puncta F, E recta linea agatur, △ FCG eſſe ad ▭ ABDC, ut HD ad DB.

Demonſtratio.

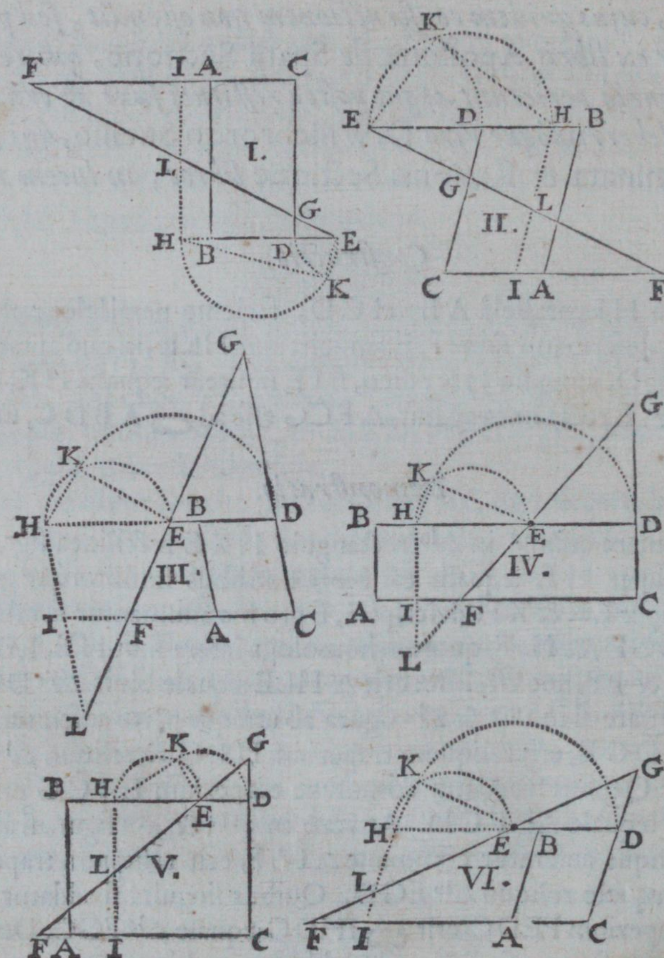
Quoniam enim [a] in $\triangle^{lo}$ rectangulo HKE rectilinea figura deſcripta ſuper HE æqualis eſt binis ſimilibus ſimiliterque poſitis figuris ſuper EK & KH deſcriptis, ſi pro his aſſumantur ſimilia $\triangle^{la}$ HLE, DGE, & ILF, quorum homologa latera ſunt HE, ED, hoc eſt, EK, & EF, hoc eſt, HK: erit △ HLE æquale binis $\triangle^{lis}$ DGE & ILF. Quare ſi in 1ma & 2da figura ab utraque parte auferatur commune △ DGE, erit reliquum trapezium HLGD reliquo $\triangle^{lo}$ ILF æquale. Quibus ſi addatur commune trapezium LICG erit ▭ HICD æquale $\triangle^{lo}$ FCD. At verò in 3^{tia} & 4ta figura ſi à dictis $\triangle^{lis}$ utrinque auferatur commune △ ILF, erit reliquum trapezium IHEF æquale reliquo $\triangle^{lo}$ EGD. Quibus ſingulis ſi addatur commune trapezium FEDC, erit ▭ IHDC æquale $\triangle^{lo}$ FGC. Denique in 5ta & 6ta figura, ſi dictis $\triangle^{lis}$ addatur utrobique commune ſpatium ILEDC, erit ▭ IHDC æquale $\triangle^{lo}$ FGC. Quocirca cum in omnibus hiſce figuris ▭ IHDC ſit æquale $\triangle^{lo}$ FGC, & [b] ▭ IHDC ſit ad ▭ ABDC, ſicut HD ad DB: erit quoque △ FGC ad ▭ ABDC, ut HD ad DB. Quod erat faciendum.

a p 31 Tertii, & 31 Sexti Elem. Eucl.

b p 1 Sexti Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quod ad 1^{mam} & 2^{dam} figuram attinet, ipſæ unam tantùm admittunt ſolutionem, nec ulli determinationi ſunt obnoxiæ, ut contra fit in 4^{or} reliquis. *In quibus* H E *non minor eſſe debet quàm* E D. Æqualibus enim exiſtentibus, recta ex I per E ducta quæſito ſatisfaciet,



eritque I E G △^{rum} omnium, rectâ per E ductâ contentorum, minimum. Hoc eſt Problema eo caſu erit μοναχὸν ſeu *unius tantùm ſolutionis*, cum aliàs duplicem admittat. Etenim inventâ lineâ FEG, ut oſten-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſtenſum eſt, ducenda erit per E, ut in præcedenti Problemate, alia recta, faciens △^{lum} æquale ipſi FGC, alteram præbens ſolutionem. Quæ quidem breviùs hic invenitur, ponendo tantùm HK, quam in 3^{tia} & 4ta figura ab I ad F versùs C poſuimus, in eadem recta ad alteram partem, ut in 5ta & 6ta figura factum eſt; & illam, quam in 5ta & 6ta figura ab I ad F versùs alteram partem poſuimus, ponendo in eadem recta versùs C, ut in 4ta & 5ta figura factum eſt; ducendo deinde ex invento hoc puncto per E rectam lineam.

Ubi porrò patet in 3^{tia} & 6ta figura, ubi punctum E in producto latere BD datum eſt, rationem ipſius HD ad DB, majoris ſemper inæqualitatis eſſe debere, hoc eſt, HD majorem quàm DB: quoniam in hiſce caſibus △ FGC ſemper majus eſt quàm ▭ ABDC.

Denique, quod ſpectat ad reliquos caſus, ſi in ipſis cum Pappo velimus ut △ FGC ſit æquale ▭^{mo} ABDC, quo caſu HD, DB ſemper æquales ſunt, & IH eadem quæ AB: ſciendum, conſtructione ac demonſtratione invariatâ manente, punctum B loco H aſſumendum eſſe, & A loco puncti I.

Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, ita ut △ FCG ſit æquale dato ſpatio, ſi tantùm [c] ▭ HICD fiat dato ſpatio æquale; & his quidem cunctis Problematis caſibus ſatisfactum putamus. *[c] c 44 aut 45 Primi Elem. Eucl.*

L.

Triangulum ABC ſecare in data ratione rectâ EFG, procedente ex vel per datum punctum E, extra vel intra triangulum ABC.

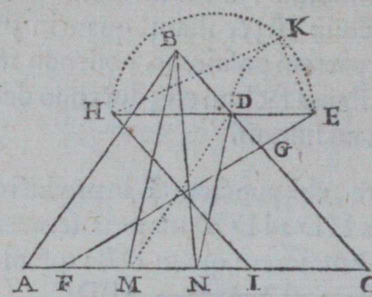
Conſtructio.

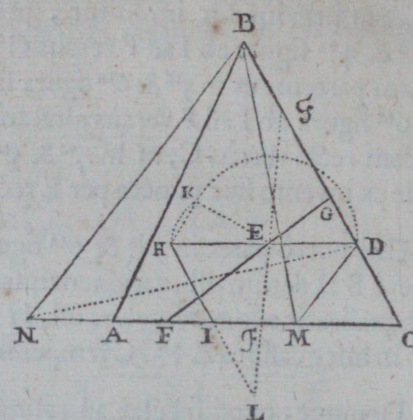
Sectâ AC in M in ratione data, junctâque BM ducatur ED parallela AC, occurrens ipſi BC vel eidem productæ in D, deſcribaturque ſuper DC, per 44 prop. 1 lib. Elem. Eucl. ▭^{mum} IHDC æquale △^{lo} MBC: vel brevius, mutando tantùm △ MBC in △ NDC (ducendo ad hoc BN parallelam DM) dividendoque NC bifariam in I: eritque recta EFG, ex vel per E ducta (ut in antecedenti Proble-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

mate) faciens △ F C G æquale ▭^{mo} I H D C, recta quæſita.

Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, faciens △ F C G

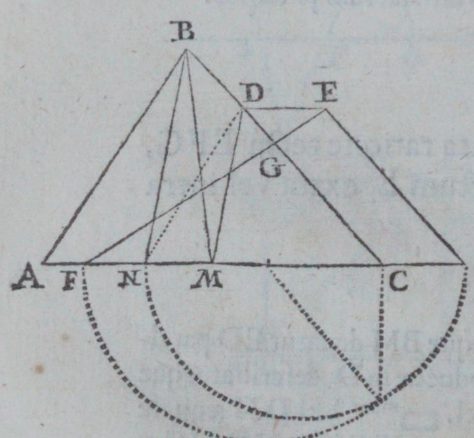


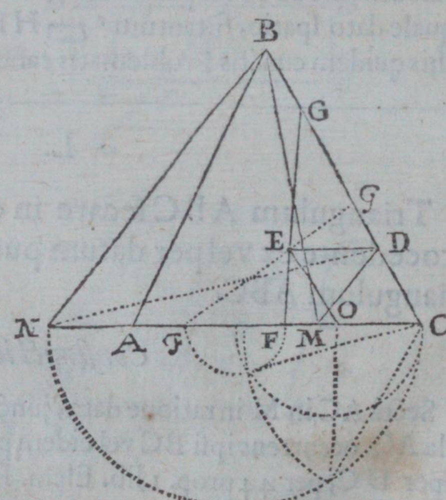


æquale dato ſpatio, conſtituendo tantùm ▭ I H D C dato ſpatio æquale.

Aliter.

Mutato, ut ante, △^{lo} M B C in N D C, ducatur E O parallela B C,



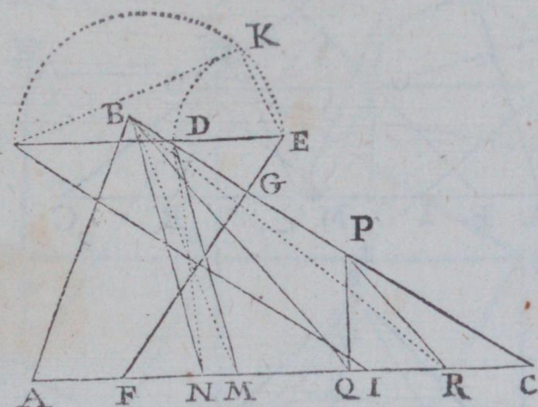


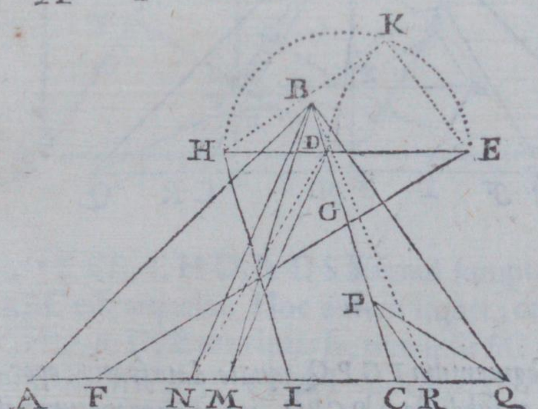
occurrens ipſi A C eidemvé productæ in O. Tum ſumendo N C eſſe unam

unam extremarum, & CO differentiam mediæ & alterius extremæ, è ſerie trium proportionalium, inveniatur per 28 prop. hujus media F C, eritque F O altera extrema. Quibus poſitis, ſi ducatur recta FEG, erit ipſa quæſita.

Similiter ſi $\triangle^{lum}$ FCG æquale requiratur dato ſpatio, eodem modo operandum erit, facto priùs $\triangle^{lo}$ NDC eidem ſpatio æquali.

Demonſtratio.





Quoniam enim FO, FC, & NC [a] tres ſunt proportionales, & ſuper 1ma & 2da deſcripta ſunt ſimilia $\triangle^{la}$ FEO & FGC: erit [b] 1ma FO ad 3tiam NC, ſicut △ FEO ſuper 1ma ad △ FGC ſuper 2da. Sed ut FO ad NC, ita quoque [c] eſt idem △ FEO ad △ NDC, hoc eſt, MBC. Quare, cum △ FEO ad △ FGC eandem habeat rationẽ quam ad △ MBC, erit [d] △ FGC æquale $\triangle^{lo}$ MBC, adeoque reliquum ſegmentum ABGF æquale reliquo $\triangle^{lo}$ ABM. Sed ut ABM ad MBC, ſic [e] AM eſt ad MC. Erit igitur ut ABGF ad FGC, ita AM ad MC. Quod erat faciendum.

a Ex conſtructione.

b p corol. 19 Sexti Elem. Eucl.

c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 9 Quinti Elem. Eucl.

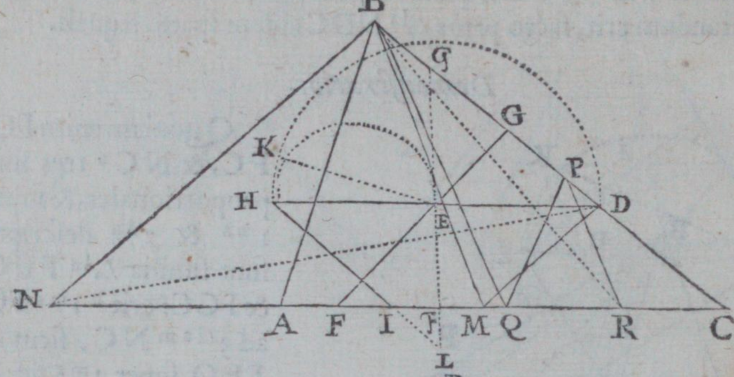
e p 1 Sexti Elem. Eucl.

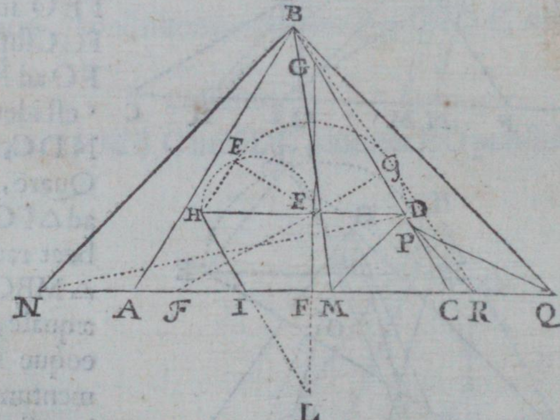
SCHOLIUM.

Eodem modo licet trapezium ABPQ ſecare in data ratione, rectâ procedente ex vel per punctum E, extra vel intra trapezium A B P Q datum: mutando tantùm ABPQ in △ ABR, ſecandoqúe AR in M in ratione data. Operando deinde (poſtquam ▭ IHCD, ut ante, factũm eſt æquale $\triangle^{lo}$

NDC,

NDC, hoc eſt, MBC) ut inprimo modo fuit oſtenſum: vel etiam ut in ſecundo, inveniendo ad N C, unam extremarum, & C O, hoc eſt, D E, differentiam mediæ & alterius extremæ, mediam FC.





Similiter ad auferendum ſegmentum F G P Q æquale dato ſpatio: oportet, eidem prius addito vel ab eo ſubducto △lo CPQ, ita ut aggregatum vel differentia ſit △ NDC, operationem porrò inſtituere, ut ſupra.

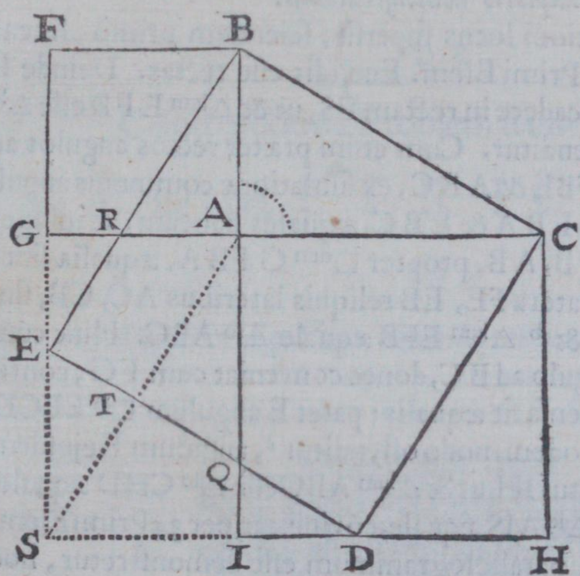
Id quod eodem modo de omnibus figuris rectilineis eſt intelligendum.

F I N I S.

Quo-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quoniam penultima Primi Elementorum Euclidis, quam in 4ta harum aliter demonſtravimus, permagni uſus exiſtit; placuit in gratiam Geometriæ tyronum, qui in perpendendis Propoſitionibus, quæ admirandas proprietates conſpicuaſque utilitates exhibent, delectari, atque longâ antecedentium Propoſitionum ſerie deterreri ſolent, concinniorem hanc ejus demonſtrationem ſubnectere.



Quadratum EBCD quadratis GFBA & ACHI ſimul ſumptis æquale eſſe, ita oſtenditur. Producantur FG, HI donec ſibi invicem occurrant in S, jungaturque SA. Quoniam itaque figura SFBCH excedit $\square^{tum}$ EBCD tribus $\triangle^{lis}$ EFB, CHD, & DSE; at verò duo $\square^{ta}$ GFBA & ACHI rectangulo SGAI & $\triangle^{lo}$ ABC: oſtendendum tantùm reſtat $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE ſimul ſumpta ▭^{lo} SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC eſſe æqualia. Hoc autem liquet, conſiderando tria $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE tum inter ſe, tum ipſis SGA, AIS, & ABC ſigillatim, hoc eſt, ipſi ▭^{lo} SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC eſſe æqualia. Quare conſtat propoſitum.

Vel etiam hoc modo, ut Vir Doctiſſimus D. Andreas ab Oudts-hoorn, *Mathematum peritiâ ac omni virtutis genere ſplendidiſſimus.*

Triangulum RBA & trapezium ACDQ communiter continentur tam in $\square^{to}$ EBCD quàm in duobus $\square^{tis}$ GFBA & ACHI. Deinde, duas reliquas partes ABC & RAQE, in $\square^{to}$ EBCD contentas, tribus reliquis partibus GFBR, CHD, & DIQ, in $\square^{tis}$ GFBA, ACHI

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ACHI contentis, æquales eſſe, patet, quòd $\triangle^{lum}$ quidem ABC ſit æquale ipſi CHD, at trapezium RAQE æquale ipſi GFBR unà cum $\triangle^{lo}$ DIQ. utpote, tollendo ſummam $\triangle^{li}$ EGR ac trapezii SEQI tum ex ſumma $\triangle^{lorum}$ SGA, AIS, hoc eſt, ex ▭^{lo} SGAI, tum ex ſumma $\triangle^{lorum}$ EFB & SED, præcedentibus æqualium. Quocirca cum omnes partes in $\square^{to}$ EBCD contentæ etiam contineantur ſive æquales ſint omnibus partibus, $\square^{ta}$ GFBA & ACHI ſimul conſtituentibus, relinquitur $\square^{tum}$ EBCD quadratis GFBA, ACHI æquale eſſe. Quod erat oſtendendum.

Expletio demonſtrationis.

Quò nullus dubitationi locus ſuperſit, ſciendum primò, lineas GAC & BAI per 14 Primi Elem. Euclidis eſſe rectas. Deinde E angulum $\square^{ti}$ EBCD cadere in rectam FS, ut & $\triangle^{lum}$ EFB eſſe $\triangle^{lo}$ ABC æquale, ita oſtenditur. Cum enim præter rectos angulos ad F & A etiam angulos FBE & ABC, ex ſublatione communis anguli EBA ab utroque recto FBA & EBC, æquales habeant; ac inſuper eorum quoque latera FB, AB, propter $\square^{tum}$ GFBA, æqualia ſint: erunt itidem [a] reliqua latera FE, EB reliquis lateribus AC, CB, ſingula ſingulis, æqualia; & [b] $\triangle^{lum}$ EFB æquale $\triangle^{lo}$ ABC. Hinc cum EB, ducta in recto angulo ad BC, donec conveniat cum FG, continuatâ in E, ipſi BC oſtenſa ſit æqualis: patet E angulum $\square^{ti}$ EBCD cadere in rectam FS. Eodem modo oſtenditur [c], angulum E ejuſdem $\square^{ti}$ EBCD cadere in latus IH, ut & $\triangle^{lum}$ ABC eſſe $\triangle^{lo}$ CHD æquale. Porrò $\triangle^{lum}$ SGA eſſe $\triangle^{lo}$ AIS æquale, cõvincitur per 34 Primi Elem. ſi modò ▭^{lum} SGAI parallelogrammum eſſe demonſtretur, hoc eſt, cujus oppoſita latera ſint parallela. Id quod liquet [d] ob æqualitatem rectorum angulorum BAC, FGA, & AIH. Præterea $\triangle^{lum}$ SGA ipſi EFB, hoc eſt, ut ſupra, ipſi ABC æquale eſſe, vel hinc arguitur, quòd SG [e] ſit ipſi IA, hoc eſt, AC æquale, & GA ipſi AB; & quòd anguli AGS & BAC ab iis comprehenſi recti ſint, ideóque æquales. Denique $\triangle^{lum}$ AIS æquari $\triangle^{lo}$ SED, ita conſtat. Quoniam enim, ut ſupra, FE eſt æquale AC, hoc eſt, AI, & FS [f] æquale BI: erit quoque ES ipſi BA æquale. Similiter quia DH æquatur AB, hoc eſt, GA, & SH æquatur GC: erit etiam SD æquale AC. Hinc cum in $\triangle^{lis}$ SED, ABC latera circa æquales rectos ad S & A ſint ſingula ſingulis æqualia: erunt quoque ipſa $\triangle^{la}$ [g] æqualia. Eſt autem $\triangle^{lum}$ ABC, ut ſupra oſtenſum, æquale $\triangle^{lo}$ EFB ſeu SGA, hoc eſt, $\triangle^{lo}$ AIS. Quare etiam $\triangle^{lum}$ SED ipſi AIS æquale erit.

a p 26 Primi Elem. Eucl.
b p 4 Primi Elem. Eucl.
c *Vide ea, quæ habentur pag. 41.*
d p 28 Primi Elem. Eucl.
e p 34 Primi Elem. Eucl.
f p 34 Primi Elem. Eucl.
g p 4 Primi Elem. Eucl.

FRAN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER II.

DE

Conſtructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORUM,

SEU

Quæ ſolvi poſſunt, ducendo tantùm rectas lineas.



LUGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,

Academiæ Typographi.

cIↃ IↃc LVI.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nobiliſſimis atque Ampliſſimis Dominis,

ILLVSTRIS ACADEMIÆ

LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

D. AMELIO à BOUCKHORST, Domino de Wimmenum, Ordinis Equeſtris Aſſeſſori, Rhenolandiæ aggerum Præfecto ac Comiti, antehac in Conſeſſu Ordinum Generalium Delegato, nunc autem Collegii Deputatorum Holl. Ordinum Præſidi.

D. GERARDO SCHAEP, Equiti, Domino de Cortenhoef, Reïp. Amſtelodamenſis Conſuli, antehac in Conſeſſu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Conſiliariorum Delegato, atque ad Sereniſſ. ac Potentiſſ. Daniæ & Sueciæ Reges Legationibus perfuncto.

D. CORNELIO de BEVEREN, Equiti, Strevelſhouckii, Weſt-Iſelmundæ, Lindæ, &c. Domino, ad Sereniſſ. ac Potentiſſ. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Exlegato, antehac in Conſeſſu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Holl. Conſiliariorum Delegato, atque Reïp. Dordracenæ Exconſuli.

UT ET,

D. CORNELIO ANTONIDÆ à BUYTEVEST,
D. GVILIELMO PAEDTS, JCto, Rhenolandiæ Conſiliario,
D. PAVLO à SWANENBVRG JCto,
D. JOHANNI MEERMAN JCto,
} *Florentiſſimæ Reïp. Lugd. Batavæ Conſulibus.*

NEC NON,

Ampliſſimo, Prudentiſſimoq; Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN JCto, Reïp. Lugd. Bat. Syndico, iiſdemq; D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nobiliſsimi atque Ampliſſimi Viri,

DUM perpendo quantum in ære veſtro ſim, quòd ſtudiis meis non modò proſpexeritis, ſed & iis promovendis etiamnum nulla denegetis ſubſidia: æquum duxi, ut conatus hoſce, profectuſqúe, quos in ſtadio à Vobis mihi propoſito feciſſe autumo, judiciis Veſtris exponerem; ut vel hinc intelligatis me ſingularis iſtius beneficentiæ immemorem non eſſe. Neque me dubitare ſinit eximia Veſtra humanitas, quin id, quod offero, muneris, gratum acceptumqúe Vobis ſit futurum, quum & primitias laborum meorum antehac luculento ſuffragio comprobaveritis, & alioqui ſemper favere iis ultro ſoleatis, qui ingenuas artes Reipublicæ bono promovendas excolendaſqúe ſuſcipiunt. Quanta autem Mathematicarum non modò ſit utilitas, ſed & neceſſitas; quantum illæ in excolendis, amplificandis, muniendis, & exornandis urbibus conferant ſubſidii; quanta inſuper diſciplinis hiſce ex inevinci-

 bili

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

bili certitudinis ſuæ evidentia, quâ cæteris omnibus præcellunt, accedat dignitas: non opùs eſt ut hîc deprædicem Vobis, quibus id tam ex variis ac ſupremis Reipublicæ muneribus obeundis, quàm ex crebris ad potentiſſimos Reges & Principes Legationibus, quibus ſumma cum laude atque exterorum admiratione defuncti eſtis, abundè conſtat. Videtur equidem mihi rem acu tetigiſſe, qui dixit: *Scientias haſce ac artes adeò humano generi eſſe neceſſarias, ut, qui illas è ſocietate humana tollat, Solem ipſum è mundo tollere videatur.* Quamvis igitur conatus eorum vel maximè laudandos putem, qui eaſdem ad Reipublicæ uſum non tantùm diligenter excolunt; ſed etiam excultas poſteritati tradunt atque commendant: non minori tamen honore extollendi videntur ii, qui, neceſſitate illarum probè perſpectâ, ipſarum Fautores exiſtunt ac Mecœnates, omnemqúe operam dant, ut cum reliquis ſimul ſcientiis ac artibus propagentur. Quod ſanè, quantâ à Vobis curâ fiat, vel inde patet, quòd Artes Mathematicas non ſolùm in hanc Academiam introduci; verùm etiam vernaculâ noſtrâ linguâ doceri volueritis, & laudabili hoc veſtro inſtituto aliis, quibus in moderandis ſtudiis æqua poteſtas vobiſcum data eſt, imitando exemplo præluxeritis,

Vo-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Vobiſqúe æmulos creaveritis. Quæ verò hinc gloriæ decoriſqúe Academiæ Veſtræ facta ſit acceſſio, teſtatur tot Nobilium, Ducum, ac Principum appulſus frequens, qui eam, ut præclara ſidera cœlum, illuſtrem reddunt, & ob hanc præcipuè cauſam adeunt, ut in Mathematicis Scientiis addiſcendis omnem ſuam operam collocent. Taceo hîc viros innumeros, qui ex hoc fœcundiſſimo Athenæo, tanquam ex equo Trojano, prodierunt, de Republica noſtra bene meritos, quiqúe eam contra tot hoſtiles inſultus inconcuſſam ac fermè invincibilem reddiderunt: quorum ope in civium ſalutem atque incolarum requiem ac ſecuritatem tot loca munita, tot fortalitia extructa, tot denique inimicorum deluſi conatus. Fœtus ergo quos belli tempore Mathematum cultura heic pepererit, lubens prætereo, cum paſſim omnes norint, quòd militaris diſciplina, moduſqúe gerendi belli, ſive in oppugnando, ſive in defendendo, qualis hîc excultus aut exercitus fuit, parem in orbe haud invenerit, & is quidem etiam hoc nomine apud omnes gentes celebratur. Pacis verò tempore, quantam hæ artes Reipublicæ utilitatem afferant, fruſtra ego commemorem Vobis, qui & jam pridem perſpectum habuiſtis, & quotidie experimini: Omnem ex

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

iis hominum manare ſolertiam, eorumqúe in muneribus ſuis feliciter obeundis dexteritatem. Etenim cum ad Reipublicæ noſtræ clavum ſedeatis, plurimùm illam Vobis, Nobiliſſ. atque Ampliſſ. Viri, debere ſemper judicavi: quandoquidem ipſa mihi robur fermè ſuum à Mathematis accipere, atque ex iiſdem promovendis conſervare viſa eſt; quibus propagandis per Dei gratiam, juxta ac Veſtram Curam & Diligentiam, ad id faſtigium, quale hodie cernitur, adſcendit. Quare dum mente revolvo, Vos, ritè perpensâ harum Scientiarum utilitate, ſemper eaſdem promoviſſe, atque earum cultoribus faviſſe: officii mei eſſe duxi, laboris hujus ſive novæ ſpeculationis fœtum, jam pridem à me conceptum, etſi munus ſublimi Dignitati Veſtræ valde impar, in debitæ obſervantiæ ac gratitudinis teſtimonium publicum illuſtribus Veſtris Nominibus conſecrare. Quem ſi eo vultu, quo me accipere ſoletis, acceptum iri intelligam, animos mihi addetis his majora ac magis digna moliendi. Deus Opt. Max. Vos Reipublicæ, literatis omnibus ac ſtudiorum candidatis, diu incolumes atque felices ſervet. Ita vovet & precatur,

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

PRÆFATIO AD LECTOREM.

NEminem tam leviter in Geometricis verſatum opinor, quin vel ille quoque, qui primoribus tantùm labris ea deguſtavit, utilitatem vulgarium Euclidis Problematum in difficilioribus conſtruendis deprehenderit. Etenim ſi ratio habeatur eorum, quæ paſſim tam in Geometria, quàm aliis in artibus, quæ eidem ſuperſtructæ ſunt, facienda occurrunt: nonniſi continuus dictorũ Problematum uſus & exercitatio comperietur. Quibus perſpectis, ratus ſum, quòd, ſi quid in horum Problematum conſtructione fortè deſideratum foret, & à me inventum demonſtrarem, ſimiliter omnibus reliquis, quæ iiſdem innituntur, me ſatisfeciſſe omnino confidere poſſim. Quapropter, cum animadverterem, dicta Problemata in campo longè aliter, quàm in charta, & ab omnis generis operariis ac artificibus abſolvi, in mentem venit, id inde originem ducere, quòd in charta ad eorum conſtructionem ſecundùm Euclidem aliquid paſſim poſtulari & concedi debeat, quod quidem in campo non eodem modo nec æquè facilè expeditur. Hinc, cùm penitiùs hæc introſpiciens perciperem, in tribus tantùm totius rei cardinem verſari, ut: à dato puncto ad datum punctum rectam lineam ducere; datam rectam in continuum rectâ producere; & è dato puncto, tanquam centro, & intervallo quovis circulum deſcribere: *deprehendi, conſiderando quàm difficulter circulus in campo deſcribatur, quam ob cauſam ibidem à vulgari Euclidis conſtruendi modo receſſum, & ad alium, qui parum Geometricus cenſendus eſt, deventum ſit. Vnde factum, ut, ſi, verbi gratiâ, datus angulus bifariam ſit dividendus, ad circulorum deſcriptionem illìc evitandam, inſtrumentum, quod Aſtrolabium dicitur, circulus exiſtens in 360 partes æquales, gradus appellatas, diviſus; quiq; rurſus ſinguli in 60 minuta mente ſubdividuntur, ad id præſtandum communiter adhibeatur. Quocum anguli amplitudine in dictis*

ctis partibus obſervatâ, ſi dioptra ad ſemiſſem numeri harum partium applicetur, angulus in duos æquales diſpeſcitur. Quis non hujuſmodi proceſſum à Geometria alienum judicet; quippe tam anguli quàm lineæ dantur, quorum magnitudo, dum nullo partium hujus diviſionis numero exprimi poteſt, irrationalis dicitur? Quinimò, ſi vel nulli tales anguli reperirentur, nihilominùs modus hic procedendi pro Geometrico habendus non eſſet: quandoquidem hoc pacto Problematis Geometrici conſtructio per Arithmeticæ principia, adeóque non per propria perficitur. Sicuti nec pro Geometrica conſtructione haberi debet, ſi ad triangulum ex datis tribus rectis lineis conſtituendum, datâ rectâ aliquâ pro communi menſurâ utamur (quemadmodum vulgò fit,) & ad eam cujuſque lineæ longitudinem exploremus, ut exinde magnitudo ſingulorum angulorum calculo innoteſcat. Etenim præterquam quòd longitudo uniuſcujuſque harum trium linearum in propoſitæ menſuræ partibus non ſemper explicabilis ſit, vel quoque magnitudo ſingulorum angulorum per circuli partes antedictæ diviſionis ſemper exprimi poſſit, conſiſtit tertiò tota operatio in numerorum calculo, quæ ne minimùm quidem cum Geometrica conſtructione convenire dicenda eſt. Quartò accedit, ipſam inſtrumenti in prædictas partes diviſionem Geometricam longè difficiliorem eſſe, ac proinde neceſſariò poſt propoſiti Problematis conſtructionem ſequi debere. Quintò denique conſiderando, quòd operis perfectio in totum pendeat, tum ab accurata inſtrumenti fabrica, tum & juſta circuli in prædictas partes diviſione (quæ utraque ab ipſis etiam peritiſſimis artificibus ad perfectionem non perducitur): facilè concluditur, ejuſmodi operationem imperfectam eſſe ac naturæ Geometriæ repugnare.

Hinc cum proceſſum in campo perſpectum haberem, ubi Geometria hanc prærogativam ſibi vendicare videbatur, quòd ibidem magis purè & naturæ ſuæ convenienter exerceri poſſit, quippe ubi lineæ & figuræ omnes mente duntaxat deſcriptæ concipiuntur, & nonniſi punctorum ſigna in uſu ſunt: viſum fuit circulorum de-

ſcri-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſcriptionem, omnino illic ineptam, rejicere, ac ad dictorum Problematum conſtructionem poſtulatum hoc ſubſtituere : Ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem. *Quod licet ab Euclide ut Problema conſtruatur, & tamen à nullo non ob ſimplicitatem ſuam proprio marte facilè abſolvatur, ego pro principio habendum duxi, ac proinde à quovis conceſſum ſuppoſui: ſiquidem id non modò ubivis idoneam praxin admittit, verùm etiam (meo quidem judicio) naturâ ſuâ multò ſimplicius, quàm circuli deſcriptio exiſtit; in cujus etiam minimæ portiunculæ efformatione è dato puncto non tantùm una ſed infinitæ rectæ alteri datæ æquales ſunt ſumendæ aut concipiendæ.*

Porrò perpendendo in Geometria, nullum Problema, quantumvis ſimplex, Geometricè conſtrui poſſe, in quo ad minimum æqualitas duarum rectarum linearum non ſit conſideranda, nec etiam hactenus ullum ex Problematibus Euclidis abſque circuli deſcriptione conſtructum ſit: judicavimus, quòd, licèt ſæpiùs in conſtruendis vulgaribus hiſce Euclidis Problematîs ad punctum aliquod lineam alteri æqualem ponamus, conſtructio tamen noſtra propterea magis compoſita cenſeri non debeat; ſed ſimplicior, in quantum eam aliquoties tantùm ponere, quàm infinities aſſumere, facilius eſt. Non equidem inficias eo, inſtrumentorum ope ſæpe aliquid faciliùs obtineri, & conſequenter ea admitti poſſe, ubi eorum uſus tale emolumentum ſuppeditat, quandoquidem in eum finem ſunt excogitata; ut, exempli gratiâ, circinus, tam ad longitudinem lineæ capiendam, quàm ad eandem ex puncto infinities ponendo circulum in plano deſcribendum. Quoniam verò hoc & his ſimilia ad Mechanicam potiùs quàm ad Geometriam pertinent, cujus quidem ſcopus in contemplanda conſtructione & demonſtratione conſiſtit, non autem circa inſtrumenta, quibus ipſa perficitur, verſatur: placuit prædicta Problemata ita conſtruere, ut contemplatio eorum conſtructionis ubiq; proficua eſſe poſſit.

Præterea, cum in Geometria ab Antiquis tria genera Proble-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

matum ſtatuta ſint, ut, Planorum, Solidorum, & Linearium, *in hoc diſcrepantium, quòd* Plana *ductis lineis rectis deſcriptiſq; circulis conſtruantur,* & Solida *deſcriptâ inſuper Coni ſectione, at* Linearia *in locum hujus aſſumptâ aliâ curvâ, magis compoſitâ: viſum fuit, conſiderando infinita eſſe Problemata, adeò ſimplicia, ut ſolis rectis lineis conſtrui poſſint, ſub prædicto genere* Planorum Problematum *genus aliquod ſubalternum, utputa,* Simplicium Problematum, *conſtituere; quorum itaque conſtructionem in hoc tractatu exhibere animus eſt. Ad quod vel eo magis incitati atque inſtigati fuimus, quòd Nobiliſſimus ac Celeberrimus Vir Renatus Des Cartes in ſua Geometria (quam aliquot abhinc annis ex Gallico idiomate in Latinum tranſlatam, nunc denuo uberioribus commentariis illuſtratam edimus) ſuccinctam & generalem methodum oſtenderit, ad prædicta ſuperiorum generum Problemata, per curvas lineas, in certa genera à ſe diſtinctas, conſtruenda.*

*Vnde, quandoquidem nullæ ſimpliciores lineæ quàm rectæ excogitari queunt, quæ quidem in campo per radios viſuales citra omne inſtrumentum deſignantur: æquum duxi conſtructionem horum vulgarium Euclidis Problematum, ad quæ alia omnia Simplicia Problemata methodo prædictæ Geometriæ D*ni* Des Cartes reduci poſſunt, in hoc tractatu oſtendere; ſicut etiam, quo pacto Planorum Problematum conſtructio fieri poſſit, edocere, ita ut ea tam in campo quàm in charta locum obtineat, eademq; ſimul quàm pauciſſimis circulis deſcriptis abſolvatur, ubique obſervans, ne, quod paucioribus ritè peragere licet, pluribus perficiatur.*

Quamobrem, exiſtimans me mentem meam abundè hîc declaraſſe, Lectorem non diutiùs detinendo, Præfationi finem impono, ipſumq; ad operis examen ablegans, ut hæc, quæ novæ contemplationis inventa ſunt, favore excipiat ac in uſum ſuum convertat, rogo. Vale.

DE

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

DE

Conſtructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORVM,

SEU,

Quæ ſolvi poſſunt, ducendo tantùm rectas lineas.

PETITIONES SIVE POSTVLATA.

I.

P*oſtuletur*, ut à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et : rectam lineam inter duo data puncta terminatam, ex utraque parte in directum & continuum producere.

III.

Item : ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Sequuntur Problemata.

PROBLEMA I.

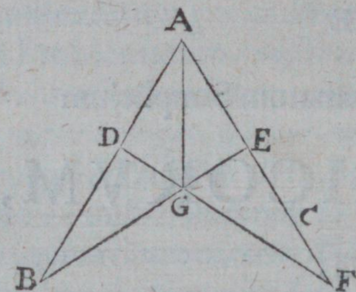
Problema 4 Primi Elem. Euclidis.

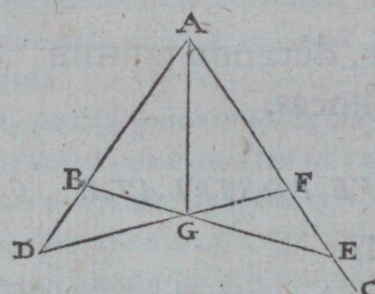
Datum angulum rectilineum B A C bifariam ſecare.

Conſtructio.

a ꝑ 3 Petit.

b ꝑ 1 Petit.





Sumptis in recta A B ad libitum punctis B & D ponatur [a] ad punctum A in recta A C linea A E æqualis A D, ac rurſus ad punctum E in eadem recta linea E F æqualis D B; ductiſque [b] rectis B E, D F, ſe invicem ſecantibus in G: Dico rectam ex A ad G ductam angulum BAC bifariam ſecare.

Demonſtratio.

Quoniam enim ex conſtructione A D, A E, ut & DB, EF æquales ſunt, erunt etiam A B, A F æquales. Hinc cum △lorum A B E, A F D latera B A, A E lateribus F A, A D ſint æqualia, & angulus ad A utrique communis: erunt quoque [c] reliqui anguli EBA & AEB, reliquis DFA & ADF, ſinguli ſingulis, æquales. Sunt autem [d] anguli A D F, F D B, ut & A E B, B E F in prima figura æquales duobus rectis. Hinc cum anguli A D F & A E B ſint oſtenſi æquales, erunt etiam anguli BDF & FEB æquales. Quoniam verò in 2da figura [e] anguli ABE, E B D, ut & AFD, DFE ſunt æquales duobus rectis, & quidem anguli A B E & A F D, æquales ſint oſtenſi, æquales quoque erunt anguli DBE & EFD. Quare cum in utraque figura anguli DBG, GDB angulis EFG, GEF, ſinguli ſingulis, ſint æquales, ac porrò latus D B △li BDG æquale lateri F E △li FE G, erit & latus [f] D G lateri G E æquale. Denique cum △lorum DAG, GEA latera DA, AG lateribus EA, AG, ſingula ſingulis, ſint æqualia, ac 3tium latus DG etiam ſit æquale oſtenſum 3tio lateri GE:

c ꝑ 4 Primi Elem. Eucl.
d ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.
e ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.
f ꝑ 26 Primi Elem. Eucl.

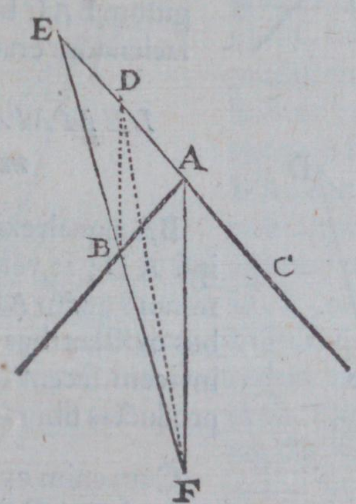
erit

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

erit & g angulus DAG angulo GAE æqualis, adeoque angulus BAC per rectam AG bifariam diviſus, hoc eſt, in duos æquales angulos BAG, FAG. Quod erat faciendum. g 8 p Primi Elem. Eucl.

Aliter.

Aſſumpto in AB utcunque B puncto, ſumantur in producta CA rectæ AD, DE h ſingulæ ipſi AB æquales, ductâque i rectâ per puncta E & B, ponatur in ea BF æqualis BE, ac jungatur AF: dico hanc angulum BAC ſecare bifariam. h p 3 Petit. i p 1 & 2 Petit. i p 3 Petit.



Quoniam enim ductâ DF △[la] BDF & DBA ſingula ipſi BDE ſunt æqualia k, erunt & ipſa inter ſe æqualia. Unde cum eidem inſiſtant baſi BD, erunt quoque l in iiſdem parallelis DB & AF; eritque angulus m BAF æqualis angulo ABD, & angulus FAC æqualis angulo BDA. Quocirca cum n anguli ABD & BDA ſibi invicem ſint æquales, erunt pariter anguli BAF & FAC inter ſe æquales, ac proinde angulus BAC rectâ AF bifariam diviſus. Quod erat faciendum. k p 38 Primi Elem. Eucl. l p 39 Primi Elem. Eucl. m p 29 Primi Elem. Eucl. n p 5 Primi Elem. Eucl.

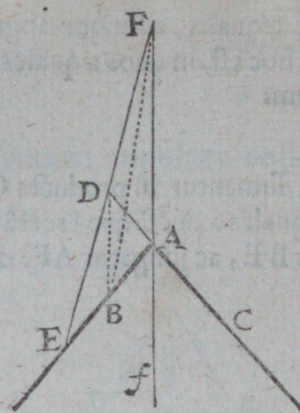
Corollarium.

Hinc patet: ſi AB ſit æqualis AD, jungaturque DB, hanc ipſi AF, quæ angulum BAC bifariam ſecat, eſſe parallelam.

Adhuc aliter.

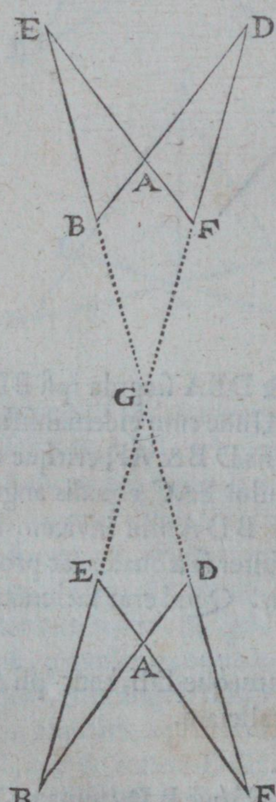
Sumptâ, ut ante, AD æquali AB, junctâque BD, ſumatur BE æqualis BA, & ex E per D recta agatur indefinita. In qua ſi ponatur

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



DF æqualis DE, & ex F per H ducatur FA*f* : dico hanc angulum BAC bifariam ſecare.

Junctâ enim BF, patet, ut ſupra, $\triangle^{la}$ BDF & BDA inter duas eſſe parallelas BD, AF. Sed per præcedens corollarium BD parallela eſt rectæ, angulum BAC bifariam dividenti. Quocirca recta FA*f* angulum BAC bifariam ſecabit. Quod faciendum erat.



LEMMA ad ſequentem modum.

BA æquali exiſtente ipſi AF, & AE ipſi AD; at verò EA vel majore vel minore quàm AB, BAD & FAE duabus exiſtentibus rectis lineis, quæ ſe invicem ſecent in A: dico EB, FD productas ſibi mutuò occurrere.

[o] *p 15 Primi Elem. Eucl.*

[p] *p 4 Primi Elem. Eucl.*

Cum enim ex hypotheſi latera BA, AE, $\triangle^{li}$ BAE ſingula æqualia ſint lateribus ſingulis FA, AD, $\triangle^{li}$ FAD; nec non [o] angulus BAE contentus ſub BA, AE æqualis angulo FAD, ſub AD, FA contento, erit quoque [p] angulus BEA angulo FDA æqualis.

[q] *p 18 Primi Elem. Eucl.*

[r] *p 13 Primi Elem. Eucl.*

[s] *p 11 axioma.*

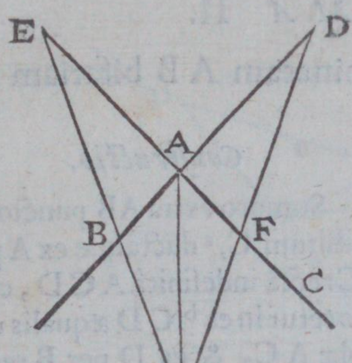
Si igitur EA quàm AB major eſt, erit etiam [q] angulus EBA ipſi oppoſitus major oppoſito E, hoc eſt, D. Hinc cum angulus [r] EBA unà cum angulo ſibi deinceps ABG ſit æqualis duobus rectis, erunt anguli D & ABG duobus ſimul rectis minores, ac proinde [s] rectæ EB, DF inferiùs productæ ſibi mu-

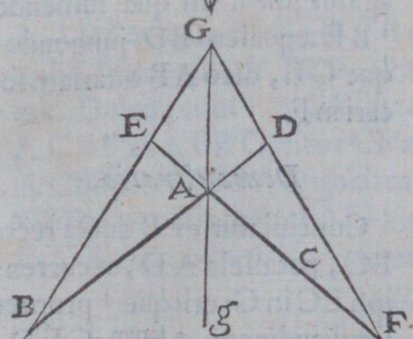
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

mutuò occurrent, ubi anguli duobus ſimul rectis ſunt minores.

Si verò A E minor ſit quàm A B, quoniam [t] tunc angulus ipſi op- *t ꝑ 18 Primi Elem. Eucl.*
poſitus B minor eſt oppoſito AEB, hoc eſt, FDA; & hic quidem cum
angulo ſibi deinceps A D G [u] æquetur duobus rectis: erunt anguli B *u ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.*
& A D G ſimul ſumpti duobus rectis minores, [x] rectæque E B F D *x ꝑ 11 axioma.*
ſuperiùs productæ coïbunt.

Rurſum aliter.





Sumpto in A B ad libitum puncto B, & ad A collocata in A C recta A F æquali A B, producatur C A ad E; ita ut E A ſit vel major vel minor quàm A B. Deinde productâ B A, in eaque ad punctum A poſitâ rectâ A D æquali A E, agantur per puncta E, B, & D, F, rectæ lineæ EBG & DFG, quæ per Lemma præcedens ſibi mutuò occurrant in G. Quibus peractis, ſi per puncta A G recta ducatur linea, ſecabit ipſa angulum BAC bifariam.

Cùm enim, ut in præcedenti Lemmate, angulus BEA ſit æqualis angulo F D A, & ex eadem ratione angulus AB E æqualis angulo A F D, atque in prima figura anguli ABE, ABG, ut & anguli AFD, AFG [y] duobus ſimul æquentur rectis: ſequitur, angulis ABE, *y ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.* AFD æqualibus exiſtentibus, angulos ABG, AFG æquales eſſe. Eodem modo in 2da figura cum anguli BEA, AEG, ut & FDA, ADG duobus ſimul æquentur rectis, & anguli quidem BEA, FDA æquales oſtenſi ſint: erunt quoque A E G, A D G æquales. Hinc cùm in utraque figura BA eſt æqualis AF, & AD æqualis A E, ideoque tota

BD

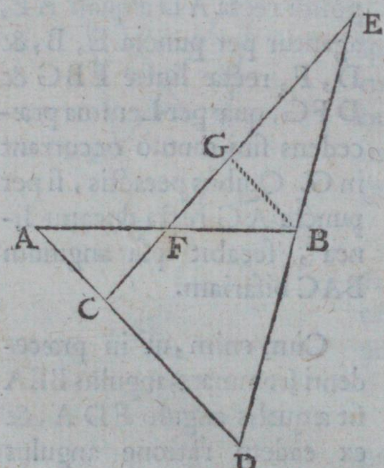
B D æqualis toti EF; ac anguli prætereà A B G, ADG $\triangle^{li}$ BDG ſinguli æquales ſint angulis ſingulis A F G , AEG $\triangle^{li}$ FEG: erit etiam [z] latus B G lateri G F æquale: quare cum latera B A , B G $\triangle^{li}$ BAG ſingula æqualia ſint lateribus ſingulis AF, F G $\triangle^{li}$ A F G; & tertium latus AG utrique ſit commune, erit [a] quoque angulus B A G angulo F A G æqualis : ac proinde B A C angulus in 1ma figura à rectâ A G bifariam diviſus. Qui porrò æquales anguli, ſi in 2da figura ſinguli à duobus auferantur rectis, relinquentur etiam [b] æquales anguli BA*g* & FA*g*. Quod erat faciendum.

z p 26 Primi Elem. Eucl.
a p 8 Primi Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.

PROBLEMA II.

Problema 5 Primi Elem. Euclidis.

Datam rectam lineam terminatam A B bifariam ſecare.



Conſtructio.

a p 1 & 2 Petit.
b 3 Petit.
c p 3 Petit.

Sumpto extra AB puncto ad libitum C, [a] ductâque ex A per C rectâ indefinitâ A C D , collocetur in ea [b] C D æqualis duplæ A C, & ex D per B recta agatur linea. In qua ſumendo [c] B E æqualem BD, jungendoque C E, dico AB bifariam ſecari in F.

Demonſtratio.

d p 4 Primi Elem. Eucl.
e p 16 Quinti Elem. Eucl.
f Ex conſtructione.
g p 4 Sexti Elem. Eucl.
h p 14 Quinti Elem. Eucl.

Concipiatur ex B ducta recta BG, parallela A D , occurrens ipſi EC in G: eritque [d] propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ CED, GEB, ED ad DC, ut EB ad BG; & permutando [e] ED ad EB, ut DC ad BG. Eſt autem ED dupla ipſius EB. Quare & DC ipſius BG dupla erit. Hinc cùm [f] DC ſit quoque ipſius AC dupla, ſequitur AC & BG inter ſe eſſe æquales. Deinde, quoniam [g] propter ſimilitudinem $\triangle^{lorum}$ ACF & FBG, A C eſt ad AF, ut GB ad BF, & prima quidem A C tertiæ G B oſtenſa ſit æqualis: erit etiam [h] 2da A F quartæ F B æqualis: Et idcirco A B in F bifariam ſecta. Quod erat faciendum.

Ali-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

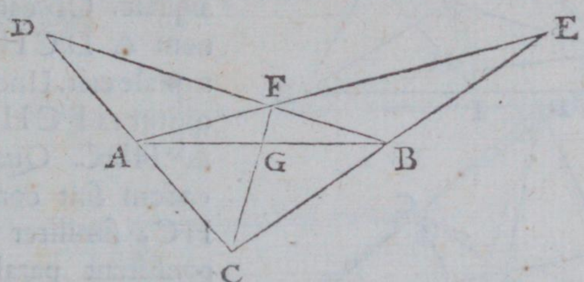
Aliter.

Aſſumpto, ut ante, extra A B puncto aliquo C, ductiſque ex eo [i] per A & B rectis C A D, C B E, ſumatur [k] A D æqualis A C, & B E æqualis B C. Tum [l] junctis D B, A E, ſeſe ſecantibus in F; dico, ſi agatur FC, hanc ſecare AB bifariam in G.

i ꝑ 1 & 2 Petit.
k ꝑ 3 Petit.
l ꝑ 1 Petit.

Cum enim △[la] B D C & C E A angulum ad C communem habeant, lateraque circa hunc ſint reciprocè proportionalia, hoc eſt, [m] ut AC ſit ad CB, ſicut DC ad CE: erit [n] △BDC æquale △[lo] CEA. A quibus ſingulis, ſi auferatur commune trapezium C A F B, relinquetur

m ꝑ 15 Quinti Elem. Eucl.
n ꝑ 15 Sexti Elem. Eucl.



△ ADF æquale △[lo] FEB. Eſt autem [o] △ ADF æquale △[lo] FAC, & △ F E B æquale △[lo] BCF. Quare etiam △ F A C △[lo] C B F æquale erit. Deinde cum [p] △ CAF ſit ad △ FAG, ſicut CF ad FG: itemque △ CBF ad △ FBG, ſicut CF ad F G: erit △ C A F [q] ad F A G, ſicut △ CBF ad △ FBG. Quocirca cum △ CAF æquale ſit oſtenſum △[lo] CBF: erit pariter [r] △ FAG æquale △[lo] FBG, ac proinde [s] AG æqualis G B. Quod erat faciendum.

o ꝑ 38 Primi Elem. Eucl.
p ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.
q ꝑ 11 Quinti Elem. Eucl.
r ꝑ 14 Quinti Elem. Eucl.

Adhuc aliter.

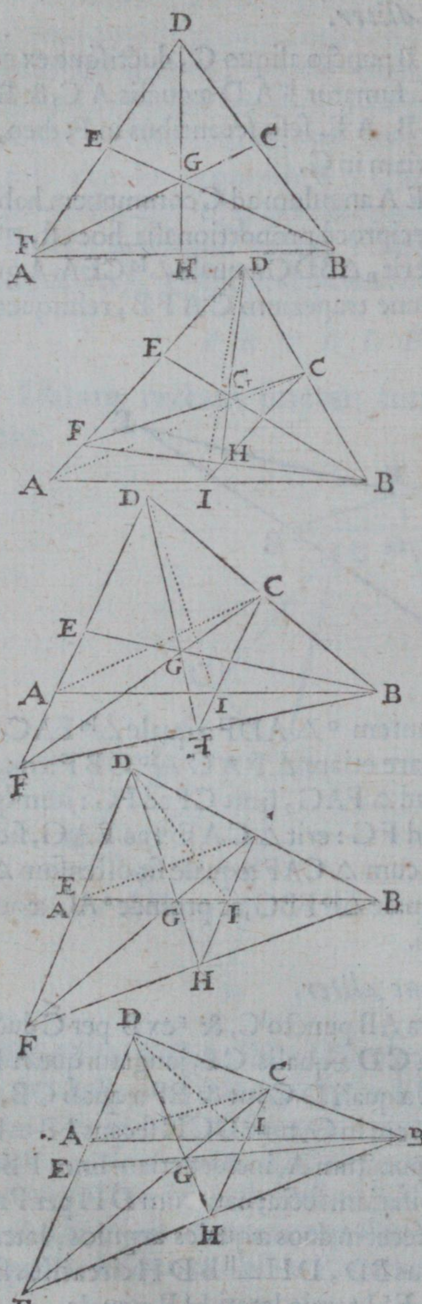
Sumpto rurſus, ut ante, extra AB puncto C, & [t] ex B per C ductâ rectâ indefinitâ, ſumatur [u] in ea C D æqualis C B, jungaturque A D. Deinde [x] in DA aſſumptâ D E æquali D C, ut & EF æquali C B, agantur BE, FC, ſecantes ſe invicem in G, tum DGH ſecans FB in H.

s ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.
t ꝑ 1 & 2 Petit.
u ꝑ 3 Petit.
x ꝑ 3 Petit.

Si igitur F punctum cadit in punctum A, incidet etiam linea FB in lineam A B, eritque ipſa in H bifariam ſecta; nam cum D H per Problema primum angulum FDB ſecet in duos æquales angulos, lateraque FD, DH △[li] FDH lateribus BD, D H △[li] B D H circa illos ſint æqualia: erit [z] & tertium latus F H tertio lateri H B æquale.

z ꝑ 4 Primi Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Sed puncto F cadente ſupra aut infra A, dico, ſi per puncta C & H agatur porrò CH, rectam AB in I ab ea biſariam ſecari.

a p 38 Primi Elem. Eucl.

b p 39 Primi Elem. Eucl.

c p 37 Primi Elem. Eucl.

d p 38 Primi Elem. Eucl.

e p 1 Sexti Elem. Eucl.

Ductis enim rectis AC, DI, cum FH ſit æqualis HB, erit & [a] △ FCH △^{lo} HCB æquale. Ob eandem rationem △ DCH △^{lo} HCB æquale erit. Unde porrò ſequitur △ FCH æquale eſſe △^{lo} HDC. Quæ cum ſuper eadem ſint conſtituta baſi HC, ſimiliter [b] inter duas conſiſtent parallelas AD, HC. E quibus exinde liquet [c] △ ADI eſſe △^{lo} ADC æquale. Eſt autem propter æqualia △^{la} ADC, ACB [d] triangulum ADC dimidium totius ADB. Quapropter etiam △ ADI totius ADB dimidium erit, ideoque æquale △^{lo} IDB. Hæc igitur cum ſint ejuſdem altitudinis, conſiſtent etiam [e] ſuper æqualibus baſibus AI, IB. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA III.

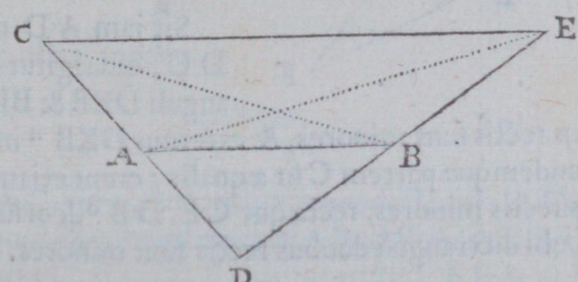
Per datum punctum C rectam lineam ducere, datæ rectæ AB parallelam. *Problema 10 Primi Elem. Euclidis.*

Conſtructio.

Ductâ ex C per A [a] rectâ indefinitâ, ſumatur in ea [b] AD æqualis AC & [c] ex D per B agatur DBE. In qua ſi [d] ponatur BE æqualis BD jungaturque CE, dico hanc ipſi AB fore parallelam. *a p 1 & 2 Petit.* *b p 3 Petit.* *c p 1 & 2 Petit* *d p 3 Petit.*

Demonſtratio.

Quoniam enim ex conſtructione DA eſt æqualis AC, & DB æqualis BE, ideoque DA ad AC, ut DB ad BE: ſequitur [e] CE ipſi AB eſſe parallelam. *e p 2 Sexti Elem. Eucl.*



Vel etiam hoc modo.

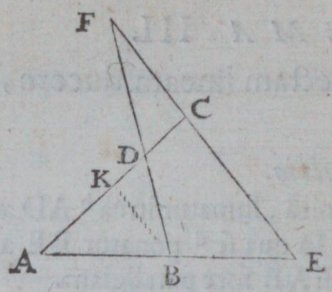
Junctis CB, AE, patet, ex demonſtratione ſecundi modi præcedentis Problematis, △[la] BCD & DAC eſſe æqualia. A quibus ſingulis ſi auferatur commune △ DAB, relinquetur △ CAB æquale △[lo] BAE. Quæ cum ex eadem parte uni baſi inſiſtant AB, etiam [f] inter duas conſtituentur parallelas CE, AB. *f p 39 Primi Elem. Eucl.*

CAB autem ipſi BAE eſſe æquale, patet quoque ex eo, quòd ſingula [g] ſint æqualia ipſi DAB, ac proinde etiam inter ſe. Parallela igitur eſt CE ipſi AB. Id quod facere oportebat. *g p 38 Primi Elem. Eucl.*

I LEMMA, *ad ſequentem modum.*

Exiſtente AB æquali BE, ſed AD majore aut minore quàm DC: dico CE, BD productas concurrere.

Eſto AK æqualis KC, jungaturque KB, quæ ex præcedenti demon-

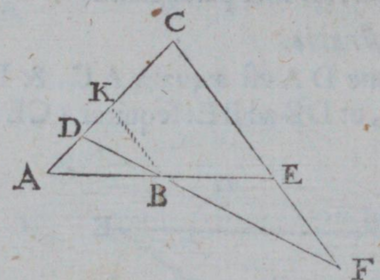


monſtratione ipſi CE erit æquidiſtans. Id quod arguit, BD, CE parallelas non eſſe, ſed productas concurrere.

h p 17 Primi Elem. Eucl.

Quoniam igitur [h] bini anguli DKB, BDK trianguli KDB duobus rectis ſunt minores, & angulus quidem DKB [i] alterno DCF æqualis ſit: at verò BDK [k] æqualis oppoſito CDF: erunt pariter bini DCF & CDF duobus rectis minores, rectæque EC, BD [l] ſurſum productæ concurrent.

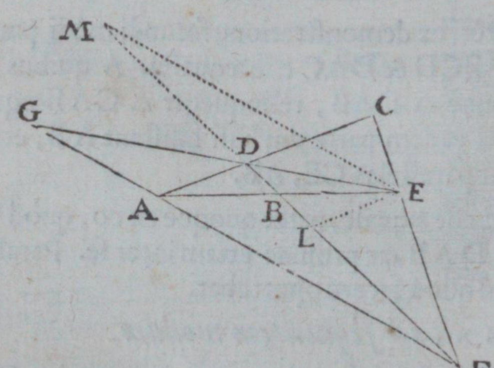
i p 29 Primi Elem. Eucl.
k p 15 Primi Elem. Eucl.
l p 11 axioma.



m p 17 Primi Elem. Eucl.
n p 29 Primi Elem. Eucl.
o p 11 axioma.

Sit jam AD minor quàm DC, quia igitur rurſus [m] bini anguli DKB & BDK trianguli KDB duobus rectis ſunt minores, & externus DKB [n] interno & oppoſito, ad eandemque partem C ſit æqualis: erunt etiam bini BDK & C duobus rectis minores, rectæque CE, DB [o] deorſum productæ concurrent, ubi dicti anguli duobus rectis ſunt minores.

II LEMMA, *ad ſequentem modum.*



Sit rurſus AB æqualis BE, ſed AD minor quàm DC, & producantur CE, DB, donec coëant in F: dico ſimiliter DE & AF productas concurrere.

p p 16 Primi Elem. Eucl.

Cum enim [p] externus angulus AEF △li ACE major ſit interno & oppoſito CAE, patet, ſi ex eo abſcindatur angulus BEL æqualis an-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

angulo C A E, lineam EL ſecare B F in L, facientem [q] B L æqualem BD.

[q] p 15 & 26 Primi Elem. Euclidis.

Fiat jam B M æqualis B F, jungaturque M E. Quoniam igitur latera M B, B E △[li] M B E lateribus F B, B A △[li] A B F ſingula ſingulis ſunt æqualia, ut & [r] anguli E B M & A B F (qui ſub æqualibus lateribus continentur): erit & [s] angulus BEM angulo BAF æqualis. Deinde quia B L minor eſt quàm B F, ſiquidem punctum L cadit inter puncta B & F, erit etiam BD minor quàm B M: ac proinde angulus B E D minor angulo B E M vel B A F. Eſt autem angulus F A B, unà cum angulo B A G [t] æqualis duobus rectis. Quare anguli B E D & B A G duobus rectis ſimul minores erunt, lineæque D E, F A ſurſum productæ ſibi mutuò coïncident, ubi hi duo anguli duobus rectis ſunt minores. Quod erat propoſitum.

[r] p 15 Primi Elem. Eucl.
[s] p 4 Primi Elem. Eucl.
[t] p 13 Primi Elem. Eucl.
[u] p 11 axioma.

Sequitur alius modus.

Aliter.

Sumatur in A C, vel poſtquam fuerit producta versùs C, punctum aliquod ad libitum D, continueturque A B ad E; ita ut B E ſit æqualis B A, & per puncta C, E & D, B agantur rectæ C E F & D B F, quæ per Lemma I antecedens coëant in F. Dico jam, ſi ducantur A F, DE, quæ per Lemma 2[dum] productæ concurrant in G, rectam à puncto C ad G ductam eſſe ipſi AB parallelam.

Ad quod demonſtrandum, concipiatur per punctum D recta H D I parallela rectæ A B E, occurrens ipſis AF, FE, vel poſtquam fuerint productæ, in punctis H & I: eritque [x], propter ſimilitudinem △[lorum] A B F & H D F, A B ad B F, ſicut HD ad DF: ac rurſus, propter ſimilitudinem △[lorum] B F E & D F I, BF ad BE, ſicut D F ad D I, hoc eſt, ex æquo [y] A B ad B E, ſicut H D ad D I. Eſt autem ex conſtructione A B æqualis B E. Quare & H D ipſi D I erit æqualis. Deinde quoniam, propter ſimilitudinem △[lorum] G H D & G A E, [z] HD eſt ad D G, ſicut A E ad EG, hoc eſt, permutando [a] HD ad AE, ſicut D G ad E G: itemque, propter ſimilitudinem △[lorum] C D I & CAE, ID ad DC, ſicut E A ad AC, hoc eſt, permutando DI ad AE, ſicut D C ad C A: patet, cum HD, D I ſint æquales, [b] DG eſſe ad GE,

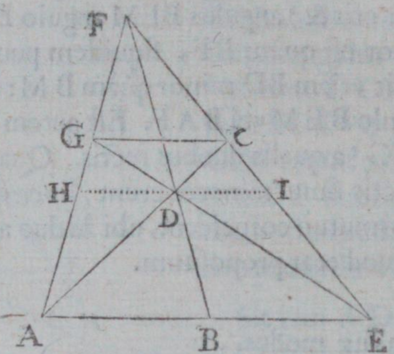
[x] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[y] p 22 Quinti Elem.
[z] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[a] p 16 Quinti Elem. Eucl.
[b] p 11 Quinti Elem. Eucl.

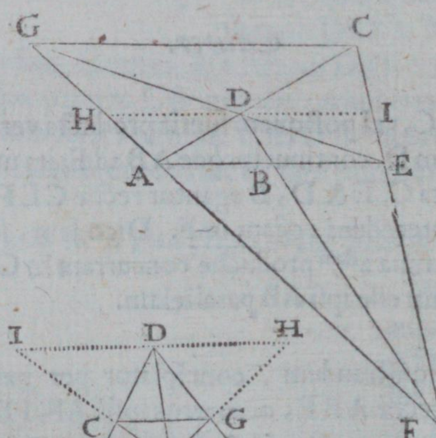
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

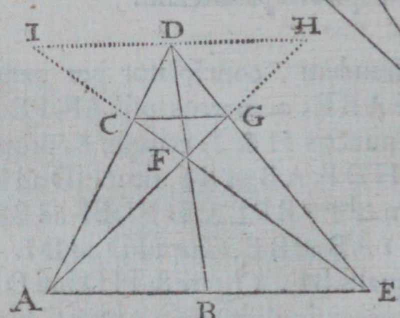
c p 1 Sexti Elem. Eucl.

d p 9 Quinti Elem. Eucl.

GE, ſicut DC ad CA. Sed ut DG ad GE, ita eſt [c] △CDG ad △GCE: & DC ad CA, ita idem △CDG ad △GCA. Quare [d] △GCE △lo GCA æquale erit. Quæ cum ab eadem parte uni inſi-







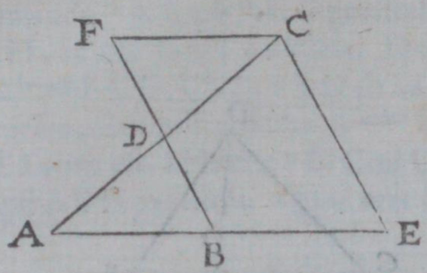
e p 39 Primi Elem. Eucl.

ſtant baſi GC, neceſſariò [e] conſiſtent etiam inter duas parallelas. Parallela igitur eſt GC ipſi AB. Quod erat faciendum.

NOTA.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

NOTA.

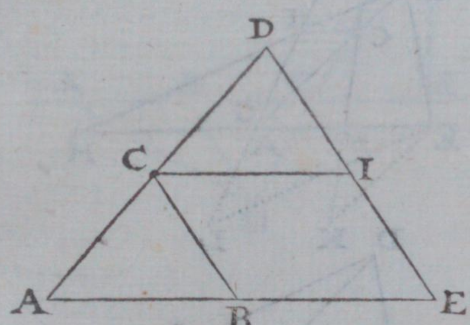


Si contingit A D eſſe æqualem D C, quoniam tunc, ex demonſtratione prioris modi, BD ipſi EC eſt parallela, atque idcirco productæ nunquam concurrunt: ſumenda erit tantummodo D F æqualis D B, jungendaque F C, eritque ipſa ipſi A B parallela.

Cum enim △lorum ADB, FDC anguli qui ad D [f] ſint æquales, & circa eos latera AD, DB æqualia lateribus DC, DF, ſingula ſingulis: erit quoque [g] angulus A æqualis angulo A C F; ac proinde [h] F C parallela AB. Quod erat faciendum.

f p 15 *Primi Elem. Eucl.*
g p 4 *Primi Elem. Eucl.*
h p 27 *Primi Elem. Eucl.*

Aliter.



Ductâ ex A per C rectâ indefinitâ, in eâque collocatâ C D æquali C A, producatur AB ad E, ita ut B E ſit æqualis B A. Tum junctis B C, ED, ſumatur in E D recta E I æqualis BC, agaturque CI: dico hanc ipſi AB eſſe parallelam.

Quoniam enim, ut ante, ED parallela eſt ipſi B C, atque in illa E I ſumpta æqualis BC: erit quoque [i] CI ipſi ABE parallela. Quod erat faciendum.

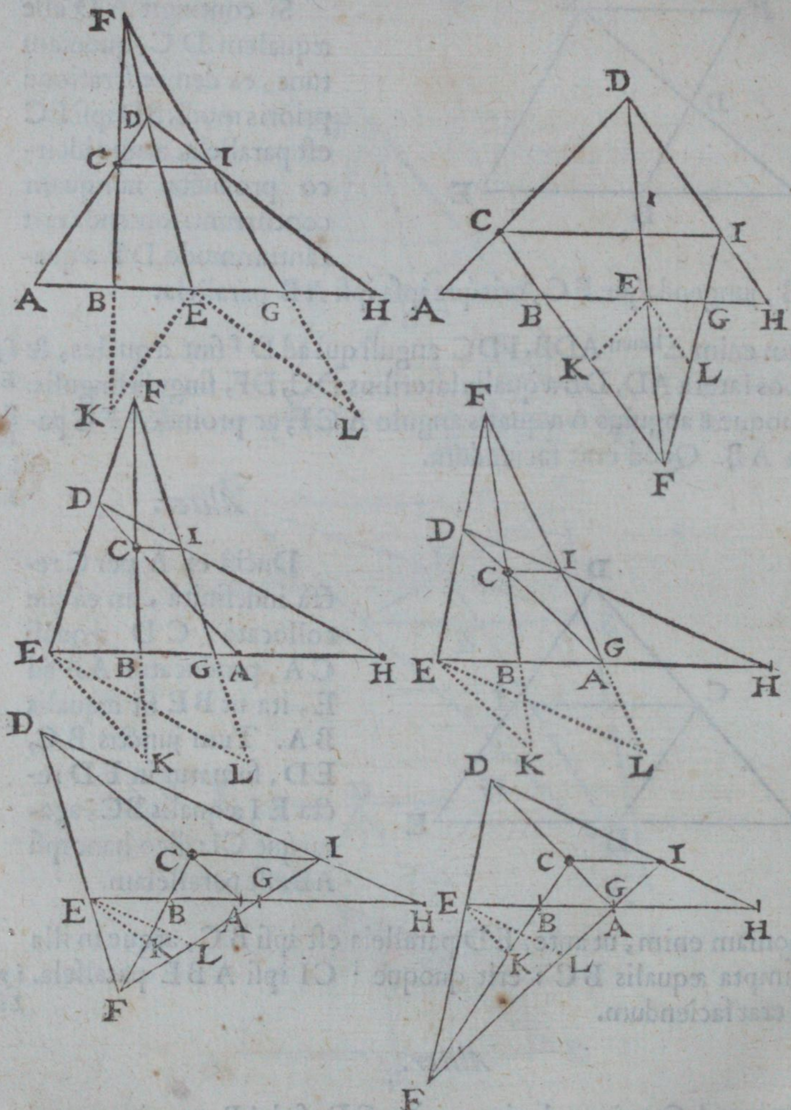
i p 33 *Primi Elem. Eucl.*

Aliter.

Eſto jam A C major vel minor quàm C D, ſed AB, ut ante, æqualis B E: lineæque B C, ED productæ, per 1mum Lemma, conveniant in F. Deinde aſſumpto in A B, ipsâve productâ, ad libitum puncto G, ponatur GH æqualis GE, ac per puncta F & G recta linea agatur, ſecans

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſecans rectam D & H connectentem in I : eritque juncta CI ipſi ABH parallela.



Ad quod demonſtrandum, fiant BK, GL æquales BC, GI, jungan-turque EK, EL. Hinc cum △[lorum] KBE, ABC [k] tam anguli qui ad B, quam

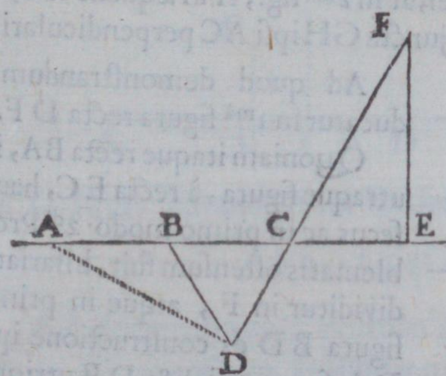
k p 15 Primi Elem. Eucl.

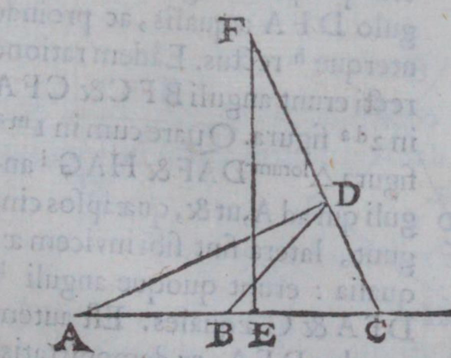
B, quàm, quæ ipſos comprehendunt, latera ſibi invicem ſint æqualia: erit quoque KE [l] ipſi A C æqualis, ut & angulus B E K angulo A: ac proinde [m] K E ipſi A C D parallela. Eâdem ratione E L æqualis erit I H, ac ipſi D I H parallela. Deinde cum, propter ſimilitudinem △lorum F C D, F K E, [n] F D ſit ad F E, ut D C ad E K, hoc eſt, C A; & rurſus, ob ſimilitudinem △lorum F D I, F E L, F D ad F E, ut D I ad E L, hoc eſt, I H: erit [o] D C ad C A, ſicut D I ad I H: ideóque [p] C I ipſi A B H parallela. Quod erat faciendum.

l ꝑ 4 Primi Elem. Eucl.
m ꝑ 27 Primi Elem. Eucl.
n ꝑ corol. 4tæ Sexti Elem. Eucl.
o ꝑ 11 Quinti Elem. Eucl.
p ꝑ 2 Sexti Elem. Eucl.

PROBLEMA IV.

Super data recta linea indefinita perpendicularem conſtituere.





Conſtructio.

Concipiatur data recta linea tranſire per puncta A & B, ut igitur ſuper ea conſtituatur perpendicularis, fiat B C æqualis A B, & ex B utcunque ducatur B D, hoc eſt, faciens cum A C quoſcunque libuerit angulos. Deinde in illa aſſumptâ [a] B D æquali B A vel B C, per puncta C & D agatur [b] recta linea indefinita. In qua ſi ponatur C F æqualis C A, atque in recta A B C ſumatur C E æqualis C D, dico junctam E F ipſi A B fore perpendicularem.

a ꝑ 3 Petit.
b ꝑ 1 & 2 Petit.

Demonſtratio.

Ductâ AD, quoniam rectæ AB, B C, & B D omnes inter ſe ſunt æquales, cadet punctum D in circuli circumferentiam, cujus diameter A C: eritque angulus

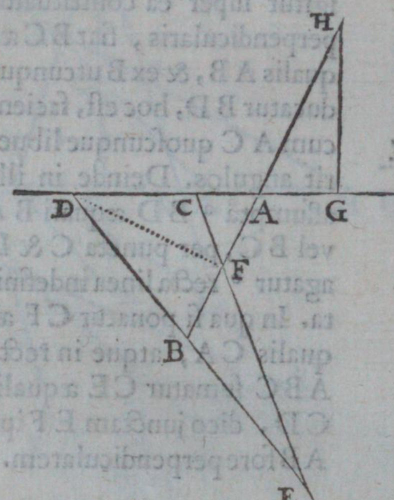
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

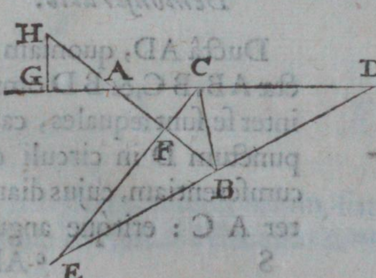
[c] ADC ob id rectus. Dein cum $\triangle^{lorum}$ ADC & CFE [d] anguli ACD & ECF, ut & latera AC, CD lateribus FC, CE [e] utrumque utrique ſint æqualia: erunt quoque [f] ADC & E, à lateribus æqualibus ſubtenſi, æquales. Eſt autem angulus ADC rectus. Quare & angulus E rectus erit, adeoque EF perpendicularis ad AB. Quod erat faciendum.

c p 31 *Tertii Elem. Eucl.*
d p 15 *Primi Elem. Eucl.*
e *Ex conſtructione.*
f p 4 *Primi Elem. Eucl.*

Aliter.

Fingatur data recta tranſire per puncta A & C; ad hanc igitur ut ducamus perpendicularem, ſumatur CD æqualis duplæ CA, & ex D, ut in 1ma figura, ad libitum agatur DBE, faciendo in illa DB æqualem DA; aut ex C, ut in 2da figura, ducatur utcunque CB, in eáque ſumendo CB æqualem CA, agatur DBE. Deinde poſitâ EB æquali BD, ducantur EC & BAH ſeſe ſecantes in F. Si ergo, ut in 1ma fig., AH ponatur æqualis AD; vel, ut in 2da fig., AH æqualis AC, ac deinde AG fiat æqualis AF, erit juncta GH ipſi AC perpendicularis.





Ad quod demonſtrandum, ducatur in 1ma figura recta DF.

Quoniam itaque recta BA, in utraque figura, à recta EC, haud ſecus ac in primo modo 2^{di} Problematis oſtenſum fuit, bifariam dividitur in F, atque in prima figura BD ex conſtructione ipſi DA ſit æqualis, & DF utrique $\triangle^{lo}$ BDF & FDA communis: erit quoque [g] angulus BFD angulo DFA æqualis, ac proinde uterque [h] rectus. Eâdem ratione recti erunt anguli BFC & CFA in 2da figura. Quare cum in 1ma figura $\triangle^{lorum}$ DAF & HAG [i] anguli qui ad A, ut &, quæ ipſos cingunt, latera ſint ſibi invicem æqualia: erunt quoque anguli [k] DFA & G æquales. Eſt autem angulus DFA, ex demonſtratis, rectus. Quapropter & angulus G re-

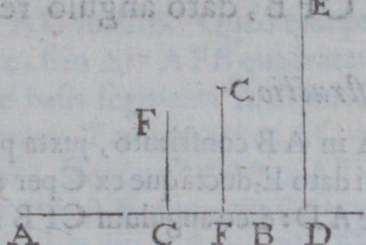
g p 8 *Primi Elem. Eucl.*
h p 8 *def. Primi Elem. Eucl.*
i p 15 *Primi Elem. Eucl.*
k p 4 *Primi Elem. Eucl.*

G rectus erit, ac idcirco G H perpendicularis ad A C. Eodem argumento concludes, angulum G in 2ᵈᵃ figura recto angulo C F A eſſe æqualem; ideóque G H, ut ante, ipſi A C perpendicularem. Quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto in ea vel extra ipſam dato C, rectam lineam ducere C F, quæ ad datam AB ſit perpendicularis. *Problema VI & VII Primi Elem. Euclidis.*

Conſtructio.



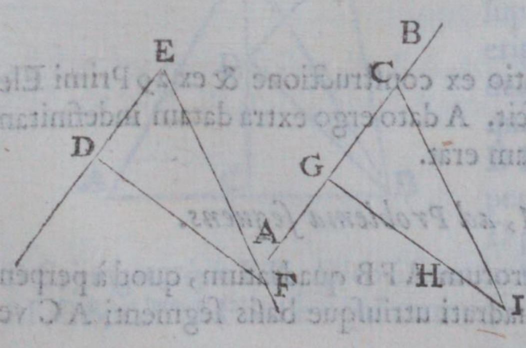
Ductâ, ut in præcedenti Problemate, ſuper A B utcunque perpendiculari D E, agatur ex C per tertium Problema eidem parallela C F: eritque hæc ipſa quæſita.

Cujus demonſtratio ex 29 Primi Elementorum Euclidis eſt manifeſta.

PROBLEMA VI.

Ad datam lineam rectam A B, datumque in ea punctum C, angulum rectilineum conſtituere A C I, dato angulo rectilineo E æqualem. *Problema IX Primi Elem. Euclidis.*

Conſtructio.



Conſtitutâ ſuper D E, per 4ᵗᵘᵐ Problema, perpendiculari D F, occurrente ipſi E F in F, ponatur ad punctum C in A B ᵃ recta C G ipſi E D æqualis, & ex G excitetur ſuper A B, per antecedens Problema, perpendicularis G H: dico, ſi in ea ſumatur *a p 3 Petit.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

b ꝑ 3 *Petit.* matur [b] G I æqualis D F, jungaturque C I, angulum A C I angulo E eſſe æqualem.

Demonſtratio.

c *Ex conſtru-ctione.* Quoniam enim $\triangle^{\text{lorum}}$ D E F, G C I anguli qui ad D & G [c] recti ſunt, ac idcirco æquales; & latera E D, D F lateribus C G, G I, quæ circa æquales ſunt angulos, ſingula ſingulis ſunt æqualia: erunt etiam anguli G C I & E [d] æquales. Quod facere oportebat.

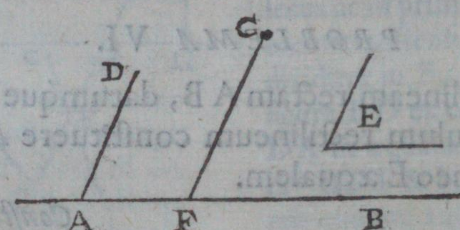
d ꝑ 4 *Primi Elem. Eucl.*

PROBLEMA VII.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto extra ipſam dato C rectam lineam ducere C F, quæ cum data A B angulum rectilineum faciat C F B, dato angulo rectilineo E æqualem.

Conſtructio.

Ad punctum quodcunque A in A B conſtituto, juxta præcedens Problema, angulo D A B æquali dato E, ductâque ex C per 3^{tium} Problema rectâ C F parallelâ rectæ A D: dico angulum C F B angulo E

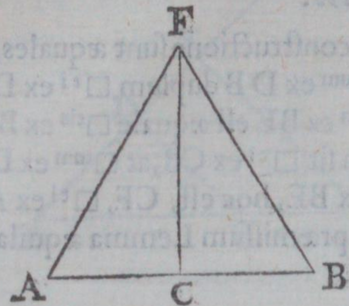


eſſe æqualem. Demonſtratio ex conſtructione & ex 29 Primi Elementorum Euclidis eluceſcit. A dato ergo extra datam indefinitam puncto &c. Quod faciendum erat.

LEMMA, ad Problema ſequens.

Triangulorum æquilaterorum A F B quadratum, quod à perpendiculari F C deſcribitur, quadrati utriuſque baſis ſegmenti A C vel C B triplum eſt.

Quod



Quod enim AC & CB ſint æqualia, hinc patet, quòd $\square^{ta}$ ex AF & FB æqualia ſint; & $\square^{tum}$ quidem ex AF æquivaleat [a] duobus ex AC & CF, & $\square^{tum}$ ex FB duobus ex BC & CF. Unde commune utrinque auferendo $\square^{tum}$ ex CF, relinquitur $\square^{tum}$ ex AC æquale ei quod ex CB; ac proinde AC æquale CB. Jam verò $\square^{tum}$ ex AB vel AF eſt $\square^{ti}$ ex AC quadruplum. Quocirca qualium partium $\square^{tum}$ ex AC eſt 1; talium $\square^{tum}$ ex AF erit 4; & $\square^{tum}$ ex CF partium 3, hoc eſt, $\square^{tum}$ ex CF triplum erit $\square^{ti}$ AC vel CB. Quod erat propoſitum. Ubi etiam facile eſt oſtendere, ſi in $\triangle^{lo}$ AFB quadratum perpendicularis CF quadrati utriuſque baſis ſegmenti AC vel CB eſt triplum, $\triangle^{lum}$ illud eſſe æquilaterum. Etenim $\square^{to}$ ex AC vel CB valente 1, cum ſic $\square^{tum}$ ex CF valeat 3, ideoque [b] $\square^{tum}$ ex AF vel FB 4; atque tantundem etiam valeat $\square^{tum}$ ex AB, erunt tria $\square^{ta}$ ex AF, FB, & AB inter ſe æqualia, adeoque etiam eorum latera AF, FB, & AB, ac eapropter $\triangle$ AFB æquilaterum. Ut proponebatur.

a p 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis primi tractatus.

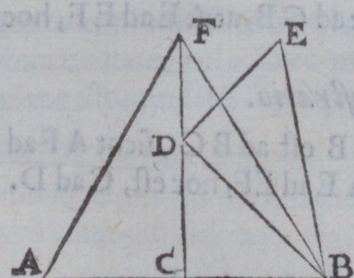
b p 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis tractat primi.

PROBLEMA VIII.

Super data recta linea terminata AB triangulum æquilaterum conſtituere.

Problema 1 Primi Elem. Euclidis.

Conſtructio.



Secetur AB per 2^{dum} Problema bifariam in C, & ex C ſuper AB per 5^{tum} Problema erigatur perpendicularis CF, deinde ſumendo in ea [a] CD æqualem AC vel CB, ducatur DB, & ſuper hac conſtituatur per 5^{tum} Problema ad punctum D perpendicularis DE æqualis DC, jungaturque EB. Dico ſi ſumatur CF æqualis BE, agantur que AF, FB, $\triangle^{lum}$ AFB eſſe æquilaterum.

a p 3 Petit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.

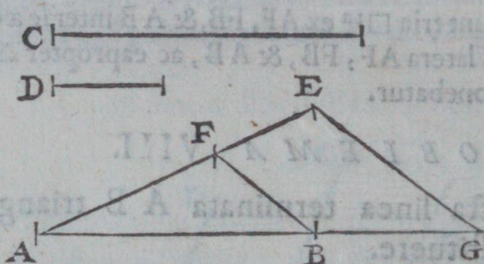
Quoniam enim rectæ C D, C B ex conſtructione ſunt æquales, & C D ad A B perpendicularis, erit [b] □tum ex D B duplum □ti ex D C vel CB. Eodem modo, quoniam □tum ex BE eſt æquale □tis ex BD, DE, atque □tum quidem ex BD duplum ſit □ti ex CB, at □tum ex D E æquale □to ex D C vel CB, erit □tum ex BE, hoc eſt, CF, □ti ex AC vel CB triplum: ac idcirco △ AFB per præmiſſum Lemma æquilaterum. Quod erat faciendum.

b ꝑ 47 pr. lib. 1. Eucl: vel per 4 pr. tractatus primi.

PROBLEMA IX.

Datam rectam lineam terminatam A B producere ad G, ita ut tota AG ad productam G B datam habeat rationem C ad D.

Constructio.



Ductâ ex A rectâ A E, faciente cum A B angulum quemcunque, ponatur [a] in ea A E æqualis C, ut & EF æqualis D; junctâque *FB*: dico, ſi eidem agatur parallela EG, occurrens productæ AB in G, A G eſſe ad G B, ut A E ad E F, hoc eſt, C ad D.

a ꝑ 3 Petit.

Demonſtratio.

Per 2dam Sexti Elem. Eucl. AB eſt ad B G, ſicut A F ad F E; & componendo [b] A G ad G B ſicut A E ad EF, hoc eſt, C ad D. Ut faciendum proponebatur.

b ꝑ 9 Quinti Elem. Eucl.

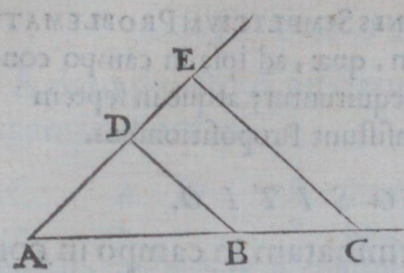
PROBLEMA X.

Tribus datis rectis lineis terminatis A B, B C, & A D quartam proportionalem adinvenire D E: *hoc eſt, ut A B ſit ad B C, ſicut A D ad D E.*

Problema IV Sexti Elem. Euclidis.

Pro-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Problema hoc juxta modum Euclidis conſtrui poteſt, ponendo nempe duas priores AB, BC in aliqua recta A C, & tertiam AD in quacunque alia AE, quæ cum A C quemvis faciat angulum CAE. Si enim ducatur BD, tum ipſi parallela CE: erit D E quarta quæſita.

Ubi hoc ſolùm notandum, ut omnia rectis lineis perficiantur, quòd CE duci debeat ipſi BD parallela juxta 3^{tium} noſtrum Problema, non autem juxta 10^{mum} Problema lib. 1. Elem. Euclidis. Quemadmodum etiam non aliter diſſentimus ab Euclide in 3^{tio} Problemate Sexti Elem. ubi docet: *Ad datas duas rectas lineas terminatas tertiam proportionalem invenire*; ut & in primo: *Ad imperatam aut imperatas partes è data recta terminata auferendas*; ſicut etiam in ſecundo. *Ad datam rectam terminatam datâ ratione ſimilitérve ſecandam, ut data altera terminata ſecta fuerit.*

Probl. III Sexti Elem. Eucl.
Probl. I Sexti Elem. Eucl.
Probl. II Sexti Elem. Eucl.

Eodem modo per ſolas rectas lineas ſolvere licet 11, 12, 13 & 14 Problemata lib. 1^{mi}; 1^{mum} lib. 2^{di}; 1, 4 & 6^{tum} lib. 3^{tii}; 2, 3, 6, 7, & 15^{tum} lib. 4^{ti}; & 6^{tum} & 10^{mum} lib. 6^{ti} Elem. Euclidis. Id quod patet, conſiderando illa, vel per unum, vel per plura jam ſoluta Problemata, ſemper eſſe ſolubilia, & quòd in his ipſis conſtruendis ſit ſequenda tantùm methodus jam oſtenſa.

Quare cum omnia Geometrica Problemata ſimplicia ſemper aliqua horum exiſtant, vel ad hæc mediante æquatione reduci poſſint, de ſolutione illorum ſatis ſuperque dictum exiſtimamus.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Supplementvm Constrvctionis Simplicivm Problematvm, continens expoſitionem eorum, quæ, ad ipſa in campo conſtruenda, tanquam obvia requiruntur; atque in ſeptem fermè ſequentibus conſiſtunt Propoſitionibus.

I *PROPOSITIO.*

Datam rectam lineam terminatam in campo in continuum & directum ab utraque parte producere.

Recta linea in campo communiter dari ſolet terminata per ſola ejus extrema puncta, quæ in praxi Geodætica deſignantur baculis rectis ſeu paxillis ad plumbum in terram defixis, inter quæ puncta tum porrò recta illa linea mente ducta concipitur. Quæ quidem lineæ aliàs, cùm limites agrorum, foſſas, propugnacula, valla, ſimiliáve deſignare debent, indicari ſolent per tenues ſulcos, terræ leviter impreſſos, quos Belgæ vulgariter *kielſpitten* appellant.

C A B D

· · · ·

Poſito itaque datam rectam AB in campo deſignari per duos baculos rectos in A & B perpendiculariter in terram defixos: ut ipſa hinc inde in continuum producatur, prodire oportet extra eam ad C & D, ita ut, exiſtente in C, ſi dirigatur viſus versùs baculos in A & B, hi ipſi inter ſe congruere videantur, hoc eſt, in eodem viſus radio appareant; at verò exiſtente in D, convertendo oculos ad A & B, ut eidem rurſus in eodem radio viſuali ſeu ſibi ipſis reſpondere conſpiciantur. Quod ſi fieri ſupponatur & baculi duo ad plumbum in C & D deſigantur, linea AB ad utramque partem erit producta ad C & D. Eodem modo, progrediendo ſemper ulteriùs atque ulteriùs, licet AB ad utramque partem in continuum & directum in campo producere.

E quibus etiam fit manifeſtum, in campo rectam dari poſitione ſeu utrinque indefinitam, datis tantummodo utcunque duobus punctis, per quæ recta illa incedere ſeu tendere intelligatur, ſupplendo cogitatione ipſam hinc inde indefinitè prædicto modo in directum eſſe protenſam.

II *PRO-*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

II *PROPOSITIO.*

A dato puncto A ad datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

C A D B
· · · ·

Problema hoc per præcedens abſolvitur. Etenim ſi primò linea A B, quam inter data puncta A & B concipimus, ad unam aut alteram partem producamus, ut hîc ad C; tumque ab A ad B cum baculo aliquo D progrediamur, ita ut reſpiciendo baculi in A & C continuè ſibi ipſis reſpondere videantur: ducta intelligetur ab A ad B recta linea; hoc eſt, tranſlatio baculi D ab uno loco A ad alterum B, lineæ quæſitæ ductum deſignabit.

Quod & alio modo præſtare licet, per inventionem plurium punctorum, non producendo rectam A B, ope nimirum alicujus ſocii. Etenim manente uno penes alterutrum baculorum A vel B, puta A, injunget alteri, ut alibi locorum inter A & B in eodem radio viſuali baculum rectum erigat D, hoc eſt, ut baculus D in A congruere videatur cum baculo B, ſeu D impediat quo minùs B ex A conſpici poſſit. Quod ut fiat, is, qui ad A eſt, manu vel pileo ſignum dabit ad dextram vel ſiniſtram (prout ad hanc vel illam partem baculus eſt conſtituendus) donec illum in eodem radio, neque ampliùs deflectentem, deprehenderit. Dein ſignum manu vel pileo dabit deorſum, ſignificans baculum D in terram perpendiculariter eſſe figendum. De iſtis enim ſocios ante inter ſe convenire oportet.

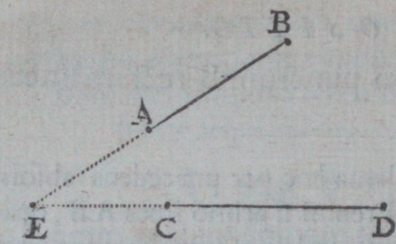
Eodem modo innumera puncta inter A & B in campo reperiri poſſunt. Atque hâc ratione licet prodeundo ab A ad B cum baculo recto D ab uno dato puncto A ad alterum datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

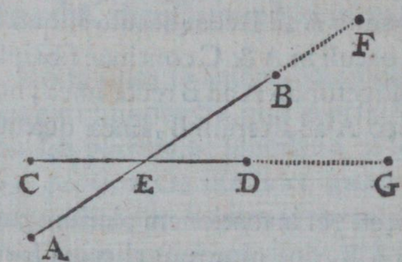
III *PROPOSITIO.*

Datis in campo duabus rectis terminatis non parallelis, ipſarum concurſus ſeu interſectionis punctum invenire.

Eſto data inter A & B puncta recta A B, non parallela rectæ C D, datæ inter puncta C & D.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16





Si ergo AB, CD ad ſe invicem inclinent ad partes A & C, & quæratur punctum E, in quo ſibi mutuò productæ occurrant, producenda eſt AB, juxta 1mam Prop., versùs A, hoc eſt, exire oportet ab A in directum ipſius AB cum baculo recto uſque dum perventum ſit in directum ipſius CD, hoc eſt, eò loci, quò baculi in C, & D ſibi mutuò reſpondere videantur. Quod ſi fieri contingat in E, ibiq́ue perpendiculariter baculus humi defigatur, is quæſitum in campo concurſus punctum oſtendet.

Sed AB ſecante CD, oportebit, productis primùm AB, CD, juxta 1mam Prop., ad unam aut alteram partem ad F & G, invenire, ut jam dictum eſt, rectarum BF, DG punctum concurſus E. Erecto enim in E baculo recto monſtrabit is ſimiliter punctum, in quo rectæ AB, CD in campo ſeſe mutuò interſecant. Ut requirebatur.

Quemadmodum autem aliquis producendo utramque rectam AB, CD ad F & G, ſine alterius ope, punctum interſectionis E inveſtigare poteſt, ita quoque licet continuando tantùm alterutram, puta AB, ad F, idem auxilio ſecundi invenire, hoc modo:

Etenim exeunte uno cum baculo aliquo à B versùs A in directum ipſius BF, donec ab altero ad D, ſicut præcedenti Propoſitione fuit explicatum, ſit certior factus ſe perveniſſe in rectam DC, quod contingere ſuppono in E: oſtendet rurſus baculus in E erectus perpendicularis punctum interſectionis quæſitum.

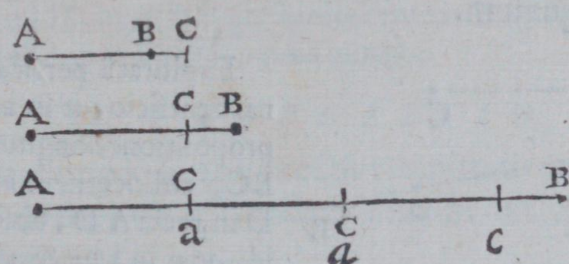
Quod idem etiam neutram producendo rectam obtineri poteſt, ſi tres ſint. Si enim conſiſtente primo ad A, ſecundus exeat cum baculo ab A versùs B in recta AB, donec pervenerit in rectam CD, quod ex tertio, qui conſiſtit ad D, uti ſupra dictum fuit, reſcire poteſt, ibiq́ue baculum erigat perpendicularem; inventum erit rurſus in campo quæſitum punctum interſectionis E.

IV PRO-

IV PROPOSITIO.

De modo capiendi longitudinem datæ rectæ lineæ terminatæ in campo.

Eſto in campo data recta intercepta inter puncta A & B, cujus longitudinem ut exploremus, eligendus erit baculus perlongus ſeu pertica AC; aut ejus loco catena ferrea vel cuprea longitudinis cujuslibet, quæ vice funis vel reſtis, quæ expanſioni aut contractioni nimis



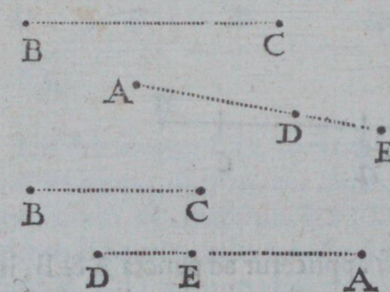
eſt obnoxia, fungatur. Hæc enim ſi applicetur ad puncta A & B, ita ut una ejus extremitas conveniat cum medio unius baculi A, indicabit medietas alterius baculi B in ea longitudinem datæ rectæ A B. Quòd ſi verò pertica hæc aut catena A C minor fuerit rectâ A B, oportebit admotâ illâ cum una ſua extremitate ad punctum A eandem cum altera ſua extremitate extendere versùs B, totieſque in recta A B huc progrediendo deferre, donec cum hac ipſa perventum fuerit ad B vel C, ubi reliqua longitudo CB brevior ſit reperta quàm AC. In quem finem ſi alter cum extremo catenæ aut perticæ A C præcedens ſingulis vicibus bacillum humi defigat, qui ab inſequente altero colligatur, denotabit A C toties ſumpta, quoties bacillus fuerit collectus, unà cum parte reliqua B C, totius rectæ A B longitudinem quæſitam.

Ubi notandum, in delatione ipſius A C in recta AB, advertendum eſſe, quod in 2da Propoſitione fuit expoſitum: item quòd quis ſolus ope perticæ datæ rectæ longitudinem in campo inveſtigare queat, ubi, ſi catenâ id præſtare velit, ſocium habere oportet. Denique, ad dictam longitudinem A B illîc capiendam, haudquaquam opùs eſſe,

ut attendamus, quot virgæ, pedes, pollices, aliævè partes contineantur in A C, ſive etiam C B, cum nihil referat ipſam A C per hujus aut illius menſuræ numeros exprimere, verùm ſuffecerit datæ A B magnitudinem, catenæ aut perticæ beneficio, non aliter quàm in charta rectæ alicujus magnitudo, ſeu inter data puncta intercapedo, circino, qualis reipſa exiſtit, accipi ſolet, comprehendiſſe atque indagaſſe.

V *PROPOSITIO.*

Ad datum punctum A in data recta indefinita A D rectam lineam in campo collocare A E, datæ rectæ terminatæ B C æqualem.



Exploratâ perticæ aut catenæ beneficio, ut in antecedenti propoſitione, longitudine rectæ B C, collocetur ea ab A versùs D in recta A D, obſervando ad id, quæ in 1ma & 2da Prop^{bus} ſunt expoſita. Hæc igitur ſi pertingere ſupponatur uſque ad E, erit A E æqualis B C.

Etenim, quoniam, quæ eidem æqualia ſunt, etiam inter ſe æqualia exiſtunt, illa autem æqualia dicantur, quæ in omnibus ſibi mutuò congruunt: ſequitur, ſi B C & A E ſingulæ longitudini æquales ſunt, quæ perticâ aut catenâ comprehenditur, eſſe quoque A E ipſi B C æqualem. Ut requirebatur.

His adjunge binas ſequentes Propoſitiones, ejuſdem naturæ cum præcedente.

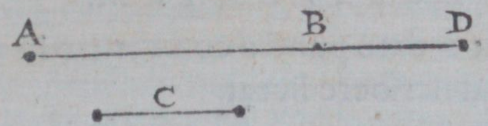
VI *PROPOSITIO.*

Datis in campo duabus rectis terminatis AB & C, alterutri A B rectam lineam in directum adjungere B D, æqualem alteri C.

Quo-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

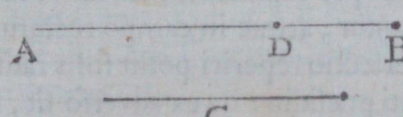
Quoniam hoc fieri poteſt producendo rectam AB versùs A vel B, ſupponamus id fieri debere ex parte B: hinc productâ AB per 1^{mam}



Prop. uſque ad D, ita ut BD per antecedentem Prop. ſit æqualis ipſi C, erit AD ipſarum AB & C ſumma quæſita.

VII *PROPOSITIO.*

Datis in campo duabus rectis terminatis inæqualibus AB & C, de majore AB rectam lineam detrahere AD, æqualem minori C.



Quandoquidem hoc ſimiliter fieri poteſt ad partem alterutram A vel B; ſupponamus id faciendum eſſe ad partem A. Quocirca collocatâ ad punctum A in recta AB per 5^{tam} Prop. rectâ AD æquali ipſi C, erit C ex AB ſubducta, ac relinquetur DB. Quemadmodum requirebatur.

Et tantum de Problematum Simplicium exegeſi, cui breviter ſubjungemus conſtructionem Planorum Problematum, hoc eſt, ad quorum ſolutionem circuli porrò deſcriptione eſt opùs, explicantes ſimul modum, quo ipſa in campo expedire licet.

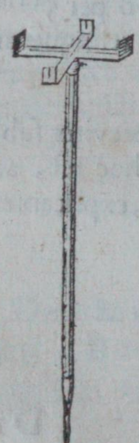
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

De Conſtructione Planorum Problematum Geometricorum, ſeu, quæ, ductis rectis lineis, deſcriptiſque circulorum circumferentiis, ſolvi poſſunt.

POSTVLATVM.

Poſtuletur: ut è dato puncto ceu centro in dato intervallo circulum deſcribere liceat.

Explicatis iis, quæ ad Simplicium Geometriæ Problematum conſtructionem pertinent, atque eorum concernunt praxin in campo: congruum videtur, ut deinceps hîc exponamus Planorum Geometricorum Problematum conſtructionem, tradendo ſimiliter ſimul ea, quæ, ad ipſam in campo expediendam, cognitu ſunt neceſſaria. Quare cum Simplicia Problemata, ut ex præcedentibus conſtat, abſque ullo inſtrumento perfici queant, niſi quis perticam aut baculos, quibus ad eorum praxin uſi ſumus, pro talibus habere velit: ita hæc è contra, præter illa, quæ ad Simplicium conſtructionem opùs ſunt, ſine inſtrumento ad id requiſito in campo abſolvi nequeunt. Etenim quemadmodum ſimplicia Problemata per ſolas rectas lineas, Plana verò deſcriptis inſuper circulis ſolvuntur; atque in campo rectarum quidem linearum occurſus ſive interſectio reperiri poſſit ſolis radiis viſualibus, abſque ullius inſtrumenti præſidio: ita ex adverſo fit, ut rectæ lineæ & circuli, vel etiam duorum circulorum occurſus ſive interſectio in campo ſine eo non inveniatur. In quem igitur finem apud Geodætas in uſu eſt inſtrumentum æneum rotundum, Aſtrolabium dictum Geometricum, diviſum in 360 partes æquales, quas vocant gradus; quorum ſinguli rurſus mente in 60 alias minores ſeu minuta ſubdividi concipiuntur. Sed quoniam omnem cognitionem ex præcedentibus conſtare oportet, & antequam ad Planorum Problematum conſtructionem accedatur ſcire decet, quo pacto circulus Geometricè in dictos gradus & minuta ſit dividendus; quod quidem difficilius quàm ipſa Planorum Problematum ſolutio eſt habendum, cum ad id ſcientificè perficiendum conſtructio Solidorum & Linearium Problematum nota requiratur: idcirco non convenit juxta artis naturam, ejuſmodi inſtrumentum



ad

ad planorum in campo conſtructionem adhibere, ſed de ſimpliciore cogitandum eſt. Unde cum quærendo illud reperiſſem, ad id ſimplicius magiſvé proprium excogitari non potuiſſe, quàm Crux vulgaris Metatoria, qualis hîc depicta cernitur, quatuor conſtans fixis & immobilibus pinnacidiis ſeu pinnulis, æquali diſtantiâ à ſe invicem remotis, quatuorque conſtituentibus angulos rectos: Illam ergo, poſtquam ſuperiùs oſtendimus, quâ ratione rectus angulus conſtituatur, ſine difficultate ulla ad Planorum Problematum ſolutionem in campo admittendam eſſe cenſuimus, ideoque uſum ejus in ſequentibus Problematibus enucleandum.

I *PROBLEMA.*

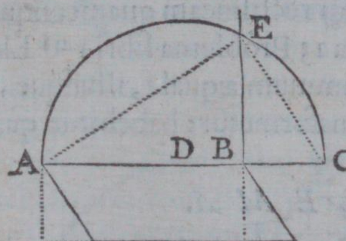
Datis duabus rectis lineis, mediam inter eas invenire proportionalem: *Problema 5 Sexti Elem. Euclidis.*

Vel,

Datum parallelogrammum in quadratum transformare.

Invenienda ſit inter A B & B C media proportionalis: vel eſto AB longitudo, & B C latitudo parallelogrammi, quod in quadratum ſit convertendum.

Conſtructio.



Conſtitutis AB, BC in una linea recta A C, dividatur [a] hæc bifariam in D, & ex D intervallo A D vel D C, per Poſtulatum præcedens, deſcribatur ſuper A C ſemicirculus AEC. Tum ex B erectâ ſuper A C [b] perpendiculari B E, occurrente peripheriæ in E, erit B E media proportionalis inter A B & B C, vel etiam □tum ex BE æquale erit parallelogrammo longitudinis AB, & latitudinis B C.

a ꝑ 2 Probl. pag. 128.

b ꝑ 5 Probl. pag. 129.

Cujus demonſtrationem manifeſtam reddunt prop. 13tia lib. 6, ut & prop. 14 lib. 2di Elem. Euclidis.

Ut autem per allatam *Crucem Metatoriam* in campo inveniatur locus

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

cus E, in quo perpendicularis BE circumferentiæ AEC occurrit: notandum eſt, angulum AEC, contentum ſub rectis AE, EC [c] eſſe rectum, ac proinde ſi, deambulantes in recta BE cum cruce, experiamur, conſpiciendo punctum unum A per duas oppoſitas pinnulas, punctum alterum C tunc ſimul etiam conſpici poſſe per duas reliquas oppoſitas, deſignabit punctum E, ubi hoc continget, cum tam in recta BE, quàm in circumferentia AEC exiſtat, locum ante dictum quæſitum.

c p 31 Tertii Elem. Eucl.

Idcirco, ut progrediendo in BE innoteſcat, num eum ita quærendo ulteriùs à B recedere oporteat, an verò propiùs ad B accedere: ſciendum eſt, rectas omnes, ductas ex aliquo puncto in BE, ſumpto inter B & E, ad puncta A & C, obtuſos ſemper angulos efficere; at verò illas omnes, quæ ducuntur ex quolibet puncto in producta BE extra E ad A & C puncta, acutos ſemper conſtituere angulos. Quocirca ſi, conſpiciendo punctum A per oppoſitas duas pinnulas, punctum C appareat extra radium duarum aliarum oppoſitarum ad ſiniſtram, perſpicuum eſt ulterius in BE à B versùs E eſſe recedendum; ſin autem C extra hunc radium ad dextram apparuerit, tum in eadem recta propiùs accedendum eſſe ad B, donec ſimul utrumque punctum per crenas oppoſitarum pinnularum conſpici poſſit. Id quod eodem modo in ſequentibus Problematibus intelligi debet.

NOTA.

Haud diſſimili ratione licet figuram rectilineam quamcunque in quadratum commutare. Si enim, juxta 13 Problema libri 1mi Elem. Euclidis, datæ figuræ fiat parallelogrammum æquale, illudque, ut modò oſtenſum fuit, in quadratum transformetur: habebitur quæſitum.

II *PROBLEMA.*

Trianguli rectanguli datâ Hypotenuſâ, & uno circa rectum angulum latere: invenire latus alterum circa rectum:

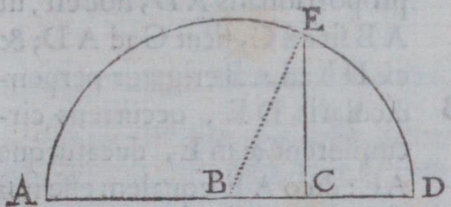
Vel,

Duobus datis inæqualibus quadratis, invenire tertium, æquale differentiæ datorum.

Eſto

Eſto AB hypotenuſa, & BC unum latus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus latus alterum circa rectum eſt inveniendum; vel ſunto AB, BC latera duorum inæqualium quadratorum, AB quidem majoris, BC autem minoris, & oporteat invenire tertium quadratum æquale differentiæ datorum.

Conſtructio.



Conſtitutis AB, BC in directum, producatur AC versùs C, & ex B intervallo AB [a] deſcribatur ſemicirculus AED. Tum ex C ductâ CE ipſi AD [b] perpendiculari, occurrente circumferentiæ in E: dico ipſam eſſe latus alterum trianguli quæſitum; vel etiam ſi ſuper CE deſcribatur quadratum, hoc ipſum eſſe differentiam quadratorum ex AB & BC.

a p antecedens Poſtulatum.

b p 5. Probl. pag. 139.

Demonſtratio.

Junctâ BE, quoniam [c] △ BEC eſt rectangulum, & data BC unum latus circa angulum rectum, & hypotenuſa BE [d] æqualis datæ AB: patet CE eſſe latus alterum circa rectum.

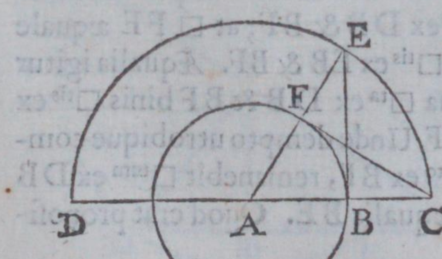
c p Conſtructionem.

d p 15 Def. Primi Elem. Eucl.

Porrò cum [e] □tum ex BE ſit æquale duobus □tis ex BC & CE: conſtat, ſi □tum ex BC à □to ex BE auferatur, differentiam eſſe □tum ex CE. Quare ſi △li rectanguli &c. Quod erat faciendum.

e p 47 Primi Elem. Eucl. vel p 4 prop. 2. partis 1. tractatus.

NOTA.



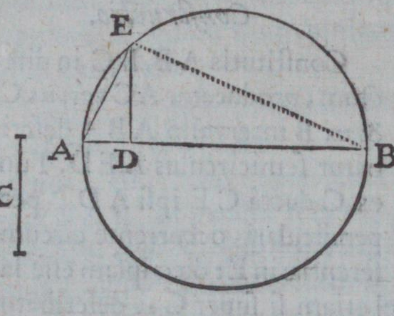
Ejuſdem naturæ videtur Problema 2dum lib. 3 Elem. Euclidis, nempe: *Ex dato puncto C rectam lineam ducere CF, quæ tangat datum circulum FB.* Quod ut fiat, ducatur ex C per A recta linea, & ex A intervallo AC deſcribatur ſemicirculus CED. Deinde [f] ex B ductâ BE perpendiculari ad DC, occurrente circumferentiæ in E, jungatur AE, ſecans circumferentiam circuli FB in F, ac denique CF, quæ circulum FB tan-

f p 5. Problema pag. 139.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tanget in F. Huc referendum quoque videtur Problema 1^{mum} lib. 4. Elem. Euclidis: *In dato circulo (cujus diameter A B) rectam lineam collocare A E, æqualem datæ rectæ lineæ C, quæ ipſâ A B non ſit major.* Idem namque hoc eſt, ac ſi ex uno dato latere circa rectum angulum & hypotenuſa trianguli rectanguli quæratur latus alterum circa rectum.

g p 3 Probl. Sexti Elem. Eucl.



h p 5 Probl. pag. 139.

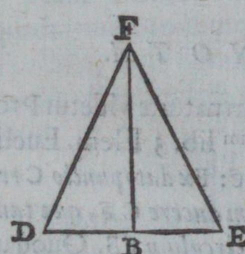
Si enim [g], ut pag. 143 dictum eſt, ad A B & C inveniatur tertia proportionalis A D, hoc eſt, ut A B ſit ad C, ſicut C ad A D; & ex D [h] ad A B erigatur perpendicularis D E, occurrens circumferentiæ in E, ducaturque AE: dico A E æqualem eſſe ipſi C. Ad quod demonſtrandum, ſi jungatur E B, erit [i] A B ad A E, ſicut A E ad A D. Quare cum per conſtructionem A B ſit ad C, ſicut C ad AD, ſequitur AE ipſi C eſſe æqualem.

i p 31 Tertii Elem. Eucl. & coroll. 8væ Sexti Elem. Eucl.

LEMMATA, ad ſequens Problema.

I.

Eſto D F E triangulum iſoſceles, æqualia habens latera D F, FE: dico, ſi ex F ad latus tertium D E demittatur perpendicularis FB, ſegmenta D B & B E ſimiliter eſſe æqualia.



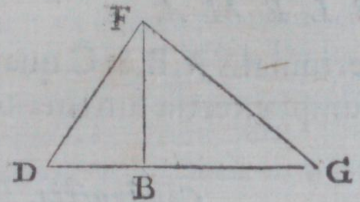
k p 47 Primi Elem. Eucl. vel 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.

Quoniam enim D F æqualis ponitur ipſi F E, erit & $\square^{tum}$ ex D F æquale $\square^{to}$ ex FE. Jam verò $\square$ DF [k] æquale eſt duobus $\square^{tis}$ ex D B & BF; at $\square$ FE æquale duobus $\square^{tis}$ ex EB & BF. Æqualia igitur ſunt bina $\square^{ta}$ ex D B & B F binis $\square^{tis}$ ex EB & BF. Unde dempto utrobique communi $\square^{to}$ ex B F, remanebit $\square^{tum}$ ex D B æquale $\square^{to}$ ex BE; ac proinde D B æqualis B E. Quod erat propoſitum.

II. Eſto

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

II.



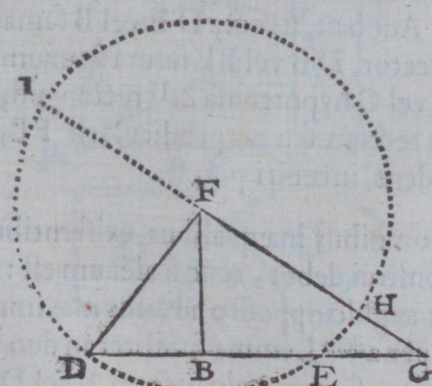
Eſto triangulum D F G, inæqualia habens latera DF, F G, quorum D F ſit minus quàm FG. Dico, ſi ex F ad latus tertium D G demittatur rurſus perpendicularis FB, ſegmenta D B & B G ſimiliter fore inæqualia, ac D B minus quàm B G.

Cum enim DF minor ſit quàm FG, erit quoque $\square^{tum}$ ex DF minus $\square^{to}$ ex F G. Jam verò [l] $\square^{tum}$ ex D F eſt æquale duobus $\square^{tis}$ ex D B & B F, & $\square^{tum}$ ex F G æquale duobus $\square^{tis}$ ex G B & B F ſimul ſumptis: ac proinde, ſi utrinque commune tollatur $\square^{tum}$ ex B F, relinquetur $\square^{tum}$ ex DB minus $\square^{to}$ ex BG, & conſequenter DB minor quàm B G. Quemadmodum proponebatur.

l p 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.

III.

Si trianguli ſcaleni D F G majus latus D G aſſumatur pro baſi, & ad id ex oppoſito angulo F ducatur perpendicularis FB: erit, ut baſis D G ad ſummam duorum reliquorum laterum D F, F G, ita eorundem laterum DF, F G differentia ad differentiam, quæ eſt inter D G & duplum minoris ſegmenti D B.



Deſcripto ex F intervallo FD circulo DE HI, ſecante D G in E, & FG in H, producatur FG ad circumferentiam in I: eritque IG ſumma, & H G differentia, laterum DF, FG; at EG differentia, quæ eſt inter D G baſin & DE duplum minoris ſegmenti D B [m]. Quibus ita poſitis, dico D G eſſe ad IG, ſicut H G ad E G.

m p 3 Tertii Elem. Eucl.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

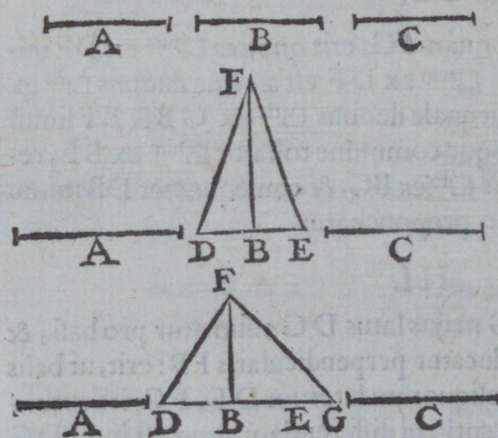
n ꝑ corol. 36tæ Tertii Elem. Eucl. Quoniam enim [n] rectangulum DGE æquale eſt rectangulo IGH, ſequitur [o] D G eſſe ad IG, ſicut H G ad EG. Quod erat propoſitum.

o ꝑ 16 Sexti Elem. Eucl.

III *PROBLEMA.*

Ex tribus datis rectis lineis terminatis A, B, & C, quarum duæ ſimul, quomodocunque ſumptæ, tertiâ ſunt majores, triangulum conſtituere.

Conſtructio.



Primò igitur, ſi tres hæ rectæ A, B, & C inter ſe æquales fuerint, ſequitur, triangulum, quod ex ipſis conſtitui debet, fore æquilaterum. Cujus ergo conſtructio, ſicut Problemate 8. pag. 141 à nobis oſtenſum fuit, perfici poteſt.

At verò duabus tantùm æqualibus exiſtentibus, ut A & C, manifeſtum eſt △^{lum} quæſitum fore iſoſceles. Quo caſu perpendicularis, quæ ex angulo oppoſito cadit in tertium latus, juxta 1^{mum} Lemma, illud bifariam ſecabit. Adeò ut, ſi recta D E vel B ſumatur pro baſi, eaque [a] in B biſariam ſecetur, D B vel B E futura ſit unum ex lateribus circa rectum, & linea A vel C hypotenuſa △^{li} rectanguli; ex quibus porrò latus alterum circa rectum ſeu perpendicularis F B, ut & △ DFE, per Problema præcedens, inveniri poteſt.

a ꝑ 2 Probl. pag. 128.

Denique, lineis A, B, & C omnibus inæqualibus exiſtentibus, quoniam △^{lum}, quod ex ipſis conſtrui debet, tunc ſcalenum eſt: ſequitur, perpendicularem, quæ ex angulo oppoſito ad latus maximum ceu baſin demittitur, illud ipſum per 2^{dum} Lemma ſimiliter in duo inæqualia ſegmenta ſecare. Quocirca, ſupponendo rectam B vel D G maximam eſſe, ſi ea ſumatur pro baſi, & per Problema 10. p. 142 fiat, ut D G ad ſummam rectarum A & C, ita differentia earundem A & C ad 4^{tam}: indicabit ea, poſtquam à G ad E in recta D G poſita eſt,

per

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

per 3^{tium} Lemma, differentiam, quâ baſis D G ſuperat duplum minus ſegmentum D B. Hinc, [b] ſecando D E bifariam in B, erit D E minus, & BG majus baſis ſegmentum. Eò igitur Problema reductum eſt, ut [c] ex alterutro laterum circa rectum, & hypotenuſâ $\triangle^{li}$ rectanguli (ut hîc, ex DB & DF ſeu A trianguli DBF; vel ex BG & FG ſeu C trianguli B FG) inveniendum ſit 3^{tium} latus B F. Unde & $\triangle^{lum}$ quæſitum DFG obtinebitur. Hinc:

b p 1. Probl. pag. 128.

c p 2 Præcedens Probl.

Datis 3^{bus} rectis lineis terminatis A, B, & C, &c. Quod erat faciendum.

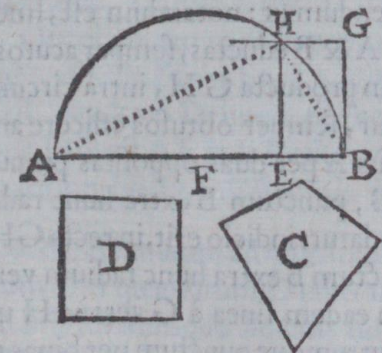
NOTA.

Id quod in hoc Problemate intendebamus, eſt, ut quæſito non niſi per unius tantùm circuli & rectarum linearum deſcriptionem ſatisfieret, vel etiam omnino per rectas lineas, ſi datæ omnes inter ſe æquales ſint. Quod alioquin duobus circulis deſcriptis fieri aſſolet. Idem quoque in iis, quæ in fine Præcedentis Problematis à nobis oſtenſa ſunt, animadvertere licet.

IV *PROBLEMA.*

Parallelogrammi rectanguli, datis A B, ſummâ laterum, & plano C, æquali ſpacio, quod ſub iis comprehenditur: invenire latera.

Conſtructio.



Converſo plano C [a] in quadratum D, ſecetur A B bifariam in F, & ex F intervallo A F vel F B ſuper A B deſcribatur ſemicirculus A H B. Deinde ex B erectâ ſuper A B perpendiculari B G æquali lateri quadrati D, agatur ex G ipſi AB parallela G H, ſecans vel tangens circumferentiam in H, & ex H ductâ H E parallelâ BG (hoc eſt, ſumptâ BE æquali G H): erunt AE & EB latera parallelogrammi quæſita, hoc eſt, id quod ſub A E & EB comprehenditur ſpacium, æquale erit dato plano C.

a p 1. Probl. pag. 151.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.

Primò enim, quòd G H ſemper circumferentiam A HB ſecet vel tangat, fit, quia quadratum D per conſtructionem eſt æquale plano C; & A B ex hypotheſi ſumma laterum parallelogrammi rectanguli æqualis quadrato D. Quorum quidem parallelogrammorum, quę ſub ſegmentis ipſius A B fiunt, [b] maximum eſt illud, quod ſuper A B vel FB deſcribitur, quadratum. Adeò ut EH vel BG, hoc eſt, latus quadrati D, nunquam excedere poſſit ſemidiametrum A F vel F B; ac proinde G H circumferentiam AHB in H ſemper ſecare vel tangere debeat. Deinde, quoniam rectangulum A E B, ut ex 14ta Propne 2di lib. Elem. Eucl. colligitur, æquale eſt quadrato ſuper E H vel B G, hoc eſt, quadrato D, id quod [c] æquale eſt plano C: patet, A E & E B eſſe latera rectanguli æqualis dato plano C, quorum laterum ſumma eſt AB. Quod faciendum erat.

[b] *p 5 Secundi Elem. Eucl.*

[c] *p Conſtructionem.*

Ut autem punctum H in campo inveniatur, in quo G H circumferentiam A H B ſecat vel tangit: oportet, eundo cum *cruce metatoria* in recta G H, à G ad H eouſque procedere, donec, dirigendo viſum per duas oppoſitas pinnulas versùs A, per duas reliquas oppoſitas conſpiciatur & ſimul B: Quoniam punctum H, ubi hoc contingit, exiſtens in linea G H, ut & in circumferentia A H B, quæſitum punctum eſt. Quocirca, ut, ad hoc explorandum, conſtet, utrum, dum in recta G H obambulamus, à G versùs H ulteriùs progrediendum, an verò ab H versùs G recedendum ſit: notandum eſt, lineas à puncto, inter G & H aſſumpto, ad A & B eductas, ſemper acutos angulos efficere; at, quæ ex puncto in producta G H, intra circumferentiam, ultra H ad A & B ducuntur, ſemper obtuſos efficere angulos. Adeoque, ſi, collimando versùs A per duas oppoſitas pinnulas, ac ſimul per reliquas duas versùs B, punctum B extra hunc radium viſualem versùs ſiniſtram deprehendatur: indicio erit, in recta GH ab H versùs G eundum eſſe; ſed ſi punctum B extra hunc radium versùs dextram appareat, è contra tunc in eadem linea à G versùs H ulteriùs procedendum eſſe, uſque dum utrumque punctum per binas pinnulas conſpicuum compererimus.

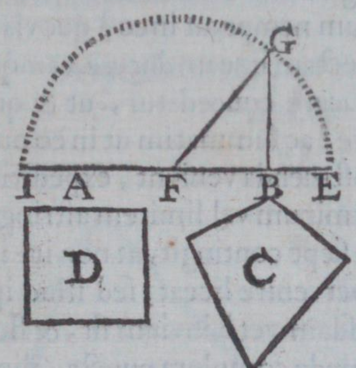
V *PRO-*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

V PROBLEMA.

Datis parallelogrammi rectanguli differentiâ laterum AB, & plano C, æquali ſpacio, quod ſub iis comprehenditur: invenire latera.

Conſtructio.



Mutato plano C, ut ante, in quadratum D, & AB in F[a] bifariam diviſâ, erigatur[b] ex B ſuper AB perpendicularis BG, æqualis lateri quadrati D, jungaturque FG. Deinde,[c] centro F & intervallo FG, deſcripto circulo IGE, ſecante AD hinc inde productam in I & E: erunt IB & BE quæſita rectanguli latera, hoc eſt, erit id, quod ſub IB & BE comprehenditur ſpacium, æquale dato plano C.

a p Probl. 2 pag. 128.
b p Probl. 5 pag. 139.
c p Antecedens Poſtul.

Demonſtratio.

Etenim exiſtente IF æquali FE, & AF æquali FB, erit & IA æqualis BE. Quibus ſingulis, ſi addatur AB, erit etiam IB æqualis AE. Quoniam autem rectangulum IBE, hoc eſt, AEB, ut ex 14[ta] Prop[ne] 2[di] lib. Elem. Eucl. colligitur, æquatur quadrato ſuper BG, hoc eſt, quadrato D, quod, per conſtructionem, æquale eſt plano C: manifeſtum eſt AE & EB eſſe latera rectanguli, dato plano C æqualis, quorum laterum differentia eſt AB. Quod erat faciendum.

Ubi obſervandum, ad quæſitum in campo obtinendum, poſtquam planum C in quadratum D eſt tranſmutatum, ut pag. 151 dictum eſt, quòd FE ſolummodo æqualis ſumenda ſit ipſi FG, ita ut ſemicirculum IGE deſcribere non ſit opùs.

FINIS.

APPEN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

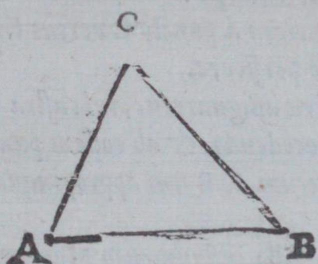
APPENDIX
SIMPLICIVM PROBLEMATVM.

HActenus de Simplicibus Problematis Geometricis actum fuit, quatenus ipſa in campo tanquam in plano infinito expediri poſſunt, ſupponendo, ubivis in illo aditum patere, haud ſecus ac vulgò Problemata Euclidis & aliorum abſolvi intelliguntur, poſtulantium nempe, ut in eo à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum, rectam lineam ducere, eamque ad utramque partem in infinitum producere concedatur, ut & quovis loco & intervallo circulum deſcribere: ac ſummatim ut in eo omnia, quæ communiter in Geometria conſtruenda veniunt, expediri queant, nullâ neceſſitate ea ad ullum terminum vel limitem aſtringente. Quoniam autem in praxi Geodætica ſæpe contingit, ut non ita indifferenter ad quævis loca hujus plani pervenire liceat, ſed illud ipſum quibuſdam in locis pervium, quibuſdam verò invium ſit, & fluviis, paludibus, foſſis ac aquis obſitum, unde complura puncta (alioquin data) inacceſſa fiunt; aut idem etiam quibuſdam in locis arboribus ac ſilvis conſitum, & in quibuſdam denique ædificiis, pagis, ac urbibus occupatum, aut etiam limitibus, collibus, ſimilibuſvé eminentiis impeditum, unde diverſa puncta, hîc quidem viſibilia, illîc autem inviſibilia & plerumque inacceſſa ſunt, quo fit, ut ductus quidam aut linearum poſitiones, quæ aliàs pro datis haberi poſſunt, hinc incertæ & incognitæ evadant: Patet, quòd, in præcedentium Problematum Simplicium aliorumque in campo conſtructione, plurima expedienda occurrant, quæ aliquatenus in hac Appendice, quoniam, ut ſupra quidem factum fuit, perfici nequeunt, afferenda & conſtruenda duximus. Ad quod magis adhuc me inſtigavit ac propenſum reddidit tractatus quidam, ad manus meas ante aliquod tempus delatus, cum hoc titulo: *Geometria Peregrinans*, dialogum continens, in quo Arithmetica & Geometria tanquam ſorores de fortuna ſua confabulantur & de temporis conditione doctè inter ſe contendunt. Hic autem cum ſine nomine Autoris & Typographi in lucem prodierit, ut & abſque anni & loci, ubi impreſſus ſit, indicatione; tamen ex iis, quæ in eo recenſentur, eum haud ita pridem editum, colligere non eſt difficile.

Quem tractatum, mihi à ſecundo commodatum (cum hîc nuſquam

quam cognitus, nedum venalis eſſet, nec etiam ob rationes dictas facilè comparandus; ſed ſolummodo conjecturâ conſtaret, eum in Polonia typis mandatum fuiſſe, & quòd ejus Author nobilis eſſet Polonus, qui aliquamdiu in Batavia ſe detinuerat, ibique pluribus luſtratis caſtris Celſiſſimo Principi Auriaco, Guilielmo Secundo, laudatiſſimæ memoriæ, fuerat familiaris), breviter perlegi, & ex eo Propoſitiones aliquot, quas in libello quodam pertractaſſe videbatur, annotavi, quarum hæc ſunt verba:

Propoſitiones, quæ in poſteriore libello explicantur, iſtæ ſunt.



1. Quomodo lineæ A B inacceſſibilis longitudo inveniri poſſit?

2. Quomodo lineæ propoſitæ, perticulis A, B terminatæ, eam non adeundo, ad indictam ab ipſa diſtantiam, linea parallela conformanda ſit?

3. Quomodo ad datæ lineæ inacceſſibilis A B longitudinem (ſive illa conſpectibilis ſit, ſive non) parallela eminus facienda ſit?

4. Ex puncto C, quocunque loco extra lineam AB conſtituto (modò illud lineæ, punctis A, B terminatæ, oppoſitum ſit) in eandem lineam A, B, ad illam non accedendo, perpendicularem demittere.

5. A dato puncto C ad lineam ſubjectam A B inacceſſibilem, perpendicularis longitudinem indicare.

6. A dato extra lineam propoſitam puncto, quod verſus lineæ propoſitæ extremitatem propoſitum ſit, perpendicularem eminus demittere.

7. Ad extremitatem datæ lineæ inacceſſibilis perpendicularem tantæ longitudinis, quanta poſtulabitur, demittere.

8. A puncto, extra datam lineam A B remotiùs aſſignato, in eandem lineam A B triplo vel quadruplo breviorem perpendicularem demittere.

9. Super data linea A B (ſive illa conſpectibilis ſit, ſive non) ipſam non attingendo, quadratum rectangulum æquilaterum, vel qualecunque aliud poſtulatum, conſtituere.

10. Dato in linea propoſita, ſive muro hoſtili, loco aliquo notabili, & certa diſtantia, ex qua tormentum ad locum aſſignatum juxta rectum angulum dirigendum ſit, locum eidem diſtantiæ & ſitui convenientem invenire.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

11. *Extra datam lineam, vel muri partem, punctis A, B terminatam, ad indictam ab ejuſdem muri oppoſito puncto diſtantiam, locum qui ab utroque A & B puncto æquali ſpatio diſtet, invenire.*

12. *Quomodo extra datam lineam inacceſsibilem, vel murum A B, punctum inveniri poſsit, quod à punctis A, B juxta indictam remotionem inæqualem, exactè diſtet?*

13. *Idem in ſylva, ubi puncta A, B eminus videri non poſſunt, artificiosè perficere.*

14. *Quomodo à puncto C versùs lineam oppoſitam A B, ob periculum vel impedimentum aliquod, propiùs non accedendo, & intra quartam, vel octavam totius diſtantiæ partem, à puncto C non recedendo, ex eodem puncto C in ſubjectam lineam A B perpendicularis demittenda ſit?*

15. *Idem vel ad aliquot perticarum diſtantiam à puncto C versùs lineam AB non procedendo, aliâ ratione, commodè perficere.*

16. *Si punctum C in margine lacus vel ſylvæ aſsignaretur, vel caſtra retrò nimis vicina eſſent, poſt punctum C non procedendo, & ab eodem puncto C ultra aliquot perticarum ſpatium versùs murum A, B non appropinquando, perpendicularem commodè producere.*

Hactenus recenſui Problemata, quæ abſque ullo inſtrumento Mathematico, etiam circini, ac regulæ uſu, lineam A, B non adeundo, in loco patenti & aperto, per ſolos bacillos expediri poßunt, &c.

Hinc cum ante complures annos in Simplicium Problematum contemplationem inciderim, nec tamen audiverim legerimvé cuidam aliquid eorum in mentem veniſſe, egoque interim illa, ſicut ſuperiùs pertractata ſunt, jam abhinc 13 circiter annis conſcripſerim, & poſtmodum amicis quibuſdam communicaverim, ac etiam nonnullorum praxin in campo auditoribus, lectiones meas publicas frequentantibus, oſtenderim: ſummopere miratus ſum, quòd allatas Propoſitiones, ex ſuperioribus Problematîs Simplicibus manantes, quæque non niſi pro ſedula eorundem in variis caſibus praxis Geodæticæ exercitatione & animadverſione haberi poſſunt, in prædicto tractatu offenderim. Inter quas Propoſitiones, cum aliquæ ſint, quas mihi olim in eodem ſenſu conſiderandas propoſuerim, invenerimque quo pacto abſque ullo inſtrumento in campo perfici poſſent, verbi gratiâ, rectam lineam ducere, parallelam rectæ inacceſſibili A B, ut &, idem perficere, quando quæſita linea per datum punctum C tranſire debet, ipſi A B non appropinquando, &c. nunquam mihi, quoad modum

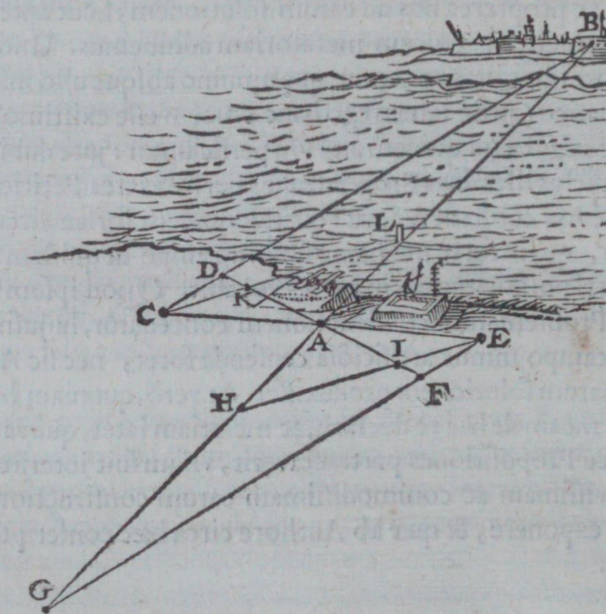
in

in hiſce uſitatum, ſatisfacere valui, quippe qui nonniſi inſtrumenti ope ac multùm tentando abſolvitur. Unde vel eo magis gaviſus fui, quòd exercitatum ingenium, mecum hac in re idem ſentiens, repererim, exinde judicans haud inutile fore, ſi tempus meum utcunque in hiſce inſumerem. Quocirca ad uſum Simplicium Problematum in diverſis caſibus praxis Geodæticæ exhibendum, & authorem ad operis ſui editionem inſtigandum, juxta quaſdam noſtras Propoſitiones etiam jam citatas dicti tractatus in hac Appendice breviter conſtruemus, exceptis 12 & 13 Propoſitionibus, quas inter Plana Problemata numeramus, adeoque abſque circuli deſcriptione ſolvi nequeunt, ac propterea nos ad earum ſolutionem, ſicut ante in Planorum conſtructione, crucem metatoriam adhibemus. Unde cum eæ ab Authore inter illas ponantur, quę omnino abſque ullo inſtrumento Mathematico (quale tamen ego hanc crucem eſſe exiſtimo) ac etiam circini & regulæ (ut quidem ait) uſu perficiuntur: jure dubito utrum Author dictas illas duas Propoſitiones per ſolas tres Petitiones, à nobis adductas, conſtruere ſciat: quandoquidem forſan circuli deſcriptionem, quam fortè mediante fune in campo ut quidem circino in charta fieri poſſe autumat, in partes vocabit. Quod ipſum ſi ad Simplicium Problematum conſtructionem concedatur, hujuſmodi operatio in campo minùs artificioſa cenſenda foret, nec ſic Autor novi quid in harum ſolutionem produxiſſet. At verò, quoniam hîc tantùm mentem meam de hac re declaro, ac me etiam latet, quâ ratione Author haſce Propoſitiones pertractaverit, viſum fuit interim modum, quo breviſſimam ac commodiſſimam earum conſtructionem quæſiverim, exponere, & quæ ab Authore circa hæc conſcripta ſint, exſpectare.

1 *PROPOSITIO.*

Invenire longitudinem lineæ A B, cùm ad alterutrum tantùm ejus extremum A aditus patet.

Erecto ubicunque in C baculo, ac deinde in recta C B utcunque alio, ut, ex. gr., in D, ſumantur in productis CA, DA rectæ A E, A F ipſis A C, A D æquales, & in directum ipſius E F retrocedatur, donec perventum fuerit in productam A B, hoc eſt, uſque dum utrumque



punctum A & B in eadem recta appareat. Id quod ſuppono fieri in G, eritque G A æqualis ipſi A B.

Quocirca, ut innoteſcat quot virgas, pedeſvé, &c. linea A B longa ſit, oportet tantùm catenâ aut perticâ longitudinem lineæ G A explorare, habebiturque numerus virgarum, pedumvé, &c. longitudinis lineæ A B, quæſitus.

2 *PRO-*

2 PROPOSITIO.

A puncto A in recta AB rectam datam definire A L.

Non rarò contingit, ut in conſtruendis chomatibus, promontoriis, ſimilibuſvé, recta linea determinanda ſit, datum virgarum aut pedum numerum continens: ad quod faciendum, oportet operando, ut ante, in linea AG ab A uſque ad H tot virgas, pedeſvé metiri, quot linea A L continere debet, ac ducere H E, quæ AF ſecet in I. Tum ſumptâ A K æquali A I, cum ſcapha navigandum erit ab A versùs B in recta A H, donec perventum fuerit in rectam K C, quod ſuppono fieri in L: eritque AL æqualis datæ rectæ AH.

3 PROPOSITIO.

Idem efficere ad alterum lineæ A B extremum B.

Accidit interdum, fluvios vel tranſitus aquâ terráve reperiri, adeò latos, ut bombardis aut ſclopetis defendi nequeant, quo caſu aggeres tormentarii, reductus, aliáve ſimilia fortalitia extrui ſolent, ad meatum præcludendum: quocirca ſuppoſitâ, ex. gr., diſtantiâ inter A & B majori, quàm ut globi ex iis emiſſi eandem emetiantur, oportet, ut à B versùs A in recta A B definiatur linea, ut B L, datæ longitudinis, quemadmodum in 1ma Propoſitione oſtenſum fuit, lineam invenire GA æqualem ipſi AB, ac deinde in ea aſſumere GH æqualem longitudini datæ: ductâ enim rurſus HE, ſecante AF in I, ſi A K ſumatur æqualis A I, &, ut ante, ab A versùs B in rectâ A H exeatur, donec perventum fuerit in rectam CK: erit LB æqualis GH. Ut requirebatur.

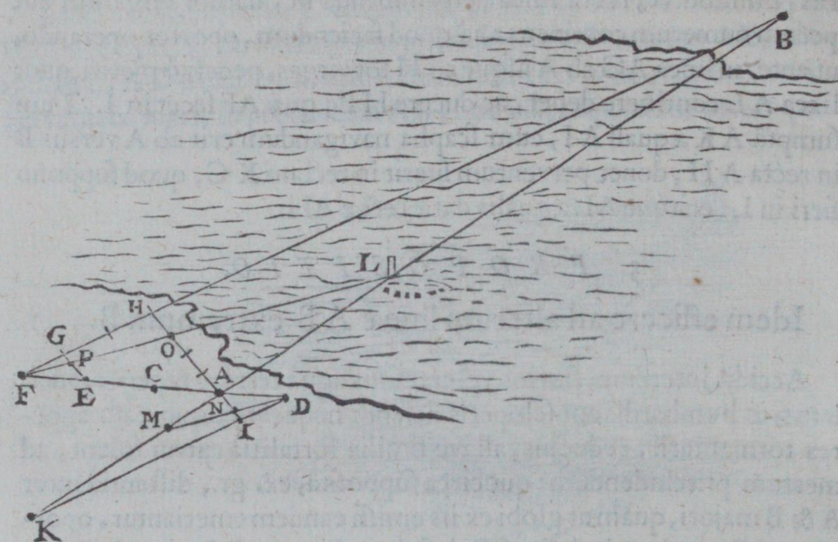
Quoniam autem plerumque fit, ut in linea A B non eò uſque retrogradi liceat, donec GA ipſi AB ſit æqualis, adeoque ad præcedentes Propoſitiones ſuperiori modo conſtruendas ad ſcopum pertingere non detur: idem tamen præſtari poteſt, faciendo tantùm G A ipſius A B partem qualemcunque aliquotam, accommodando ſe nimirum loco ad id conceſſo.

Quocirca, ut, exempli gratiâ, in producta A B inveniatur A K, quæ ſit ipſius A B $\frac{1}{3}$tia pars, oportet, ut ante, defixo alicubi baculo C in producta AC aſſumere hinc DA æqualem A C, & illinc A F æqualem triplo ipſius A C: ac deinde in recta F B erecto utcunque baculo

 G, fa-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

G, factâque FH triplâ FG, ponatur in producta HA recta AI æqualis GE, & ab I in directum ID retrocedatur, uſque dum perventum fuerit in lineam AB: eritque AK tertia pars ipſius AB. Quæ ſi in recta aliqua linea ter ſumatur, lineæ AB longitudinem exhibebit.

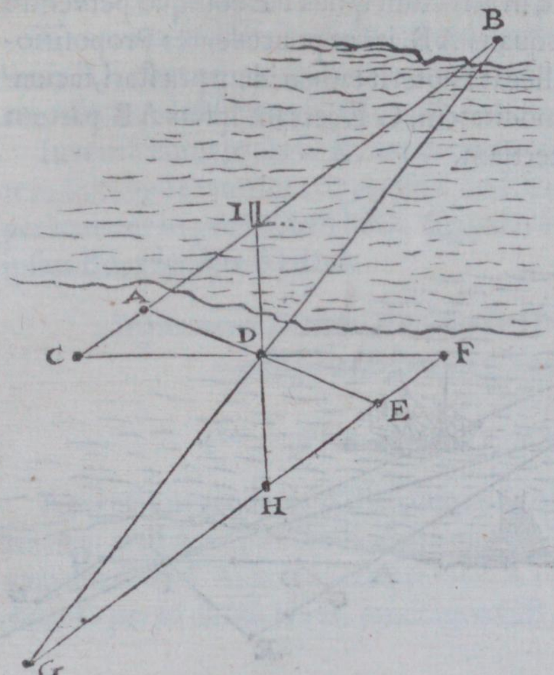


Haud ſecus, ſi ab A verſùs B in linea AB recta deſignanda ſit, quæ datæ AM tripla exiſtat, oportet, ut ante, ductâ MD, ſecante AI in N, factâque AO triplâ ipſius AN, exire ab A verſùs B, manendo continuò in recta AM, donec perventum fuerit in rectam FO; id quod ſuppono fieri in L: eritque AL tripla datæ AM.

Eodem modo procedendum erit, ſi LB requiratur datæ KL tripla. Ubi etiam facile eſt oſtendere, quo pacto, L & B duabus turribus aliiſvé eminentioribus locis exiſtentibus, ita ut ad ea acceſſus non pateat, ſed tantùm ad A, punctum aliquod in producta BL, diſtantia eorum LB inveniri poſſit. Etenim inventâ primùm, ut ante, rectâ AK æquali trienti ipſius AB (ſupponendo ſcilicet loci conditionem non permittere, ut ea inveniatur æqualis, quippe quod raro fit), ducatur FL ſecans GE in P; factâque AN æquali PE, ex D per N ducatur recta DNM, occurrens ipſi AK in M: erit KM tertia pars datæ LB. Quæ ſi ideo in recta aliqua linea ter ponatur, inventa erit longitudo ipſius LB.

I^mæ PRO-

1^{mæ} PROPOSITIONIS *alia Conſtructio.*



Sumpto in producta AB utcunque puncto C, ſumatur extra eam punctum aliud, ut D, & ex A & C per D rectis ductis lineis ADE & CDF, ponantur in iis DE, DF æquales DA, DC. Deinde ab E exeundo in directum ipſius EF donec perveniatur in rectam DB productam, id quod fieri ſuppono in G: erit GE æqualis AB, Ac proinde quoties data quævis menſura in GE continetur, toties eadem continebitur quoque in AB, unde & ipſa AB data erit.

2^{dæ} PROPOSITIONIS *alia Conſtructio.*

A puncto A in recta AB rectam definire AI, æqualem datæ.

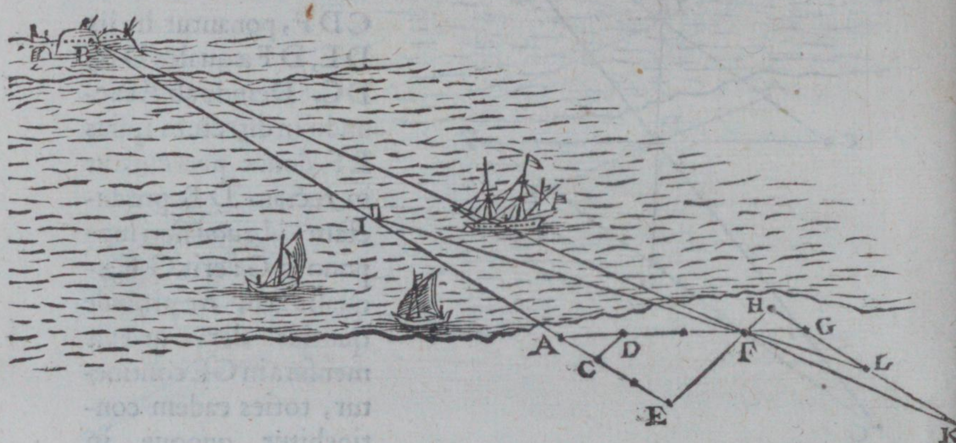
Accepto, ut ante, in producta AB puncto C, & extra eam puncto D, ducantur ADE & CDF, ita ut DE, DF ſint æquales DA, DC. Deinde productâ FE ad H, ita ut HE æquetur datæ rectæ definiendæ, oportet, ut ante, ab A versùs B exire in recta CA, uſque dum perventum fuerit in productam HD. Id quod ſi fieri ſupponatur in I, erit AI æqualis ipſi HE, hoc eſt, datæ rectæ. Ut requirebatur.

3^{tiæ} PROPOSITIONIS *alia Conſtructio.*

Quòd ſi autem IB æqualis facienda ſit datæ rectæ, oportebit primùm, juxta 1^{mam} Prop^{nem} invenire GE æqualem AB; ac deinde, collocatâ in ea GH æquali datæ rectæ definiendæ, erit rurſus, ſi ab A versùs

verſùs B in directum ipſius C A exeatur, donec perventum fuerit in productam HD, recta IB æqualis datæ GH.

Si verò retroeundo ab E in directum ipſius FE eouſque pervenire non detur, donec G E ſit æqualis A B, ita ut præcedentes Propoſitiones, ut ante, expedire non liceat: poterit tamen idem præſtari, faciendo ad hoc, juxta loci commoditatem, G E certam ipſius A B partem aliquotam, verbi gratiâ, tertiam.



Etenim erecto rurſus in productâ A B ubicunque baculo C, in eademque aſſumptâ AE æquali triplæ AC, extra eam, ut ante, defigendus erit utcunque baculus D, & in recta A D ſumenda A F æqualis triplæ AD. Dehinc in eadem linea producta ſumendo F G æqualem A D, & in producta E F ſumendo F H æqualem CD, oportet à G in directum ipſius HG retrogradi, donec perveniatur in productam BF, quod ſuppono fieri in K: eritque tum G K æqualis tertiæ parti ipſius AB.

Pari modò ſi à B verſùs A in recta A B linea abſcindenda ſit, quæ datæ rectæ, verbi gratiâ, KL, tripla exiſtat: oportebit, inventâ G K, in eadem à K verſùs G deſignare datam KL, ac deinde ab A verſùs B, ut ante, in recta AB exire, manendo in eum finem continuò in directum ipſius A C; donec perventum fuerit in productam F L, quod ſi fiat in I: erit I B tripla ipſius K L. Id quod etiam uſui eſſe poteſt, ſi B A, latitudinem fluvii deſignans, major fuerit, quàm ut tormentis bellicis ab hoſte integra ex B infeſtari poſſit, ad diverſos in fluvio ter-

terminos definiendos, ut I, extrema ictuum determinantes, quò ipſe ſecurè navigari poſſit.

Nec aliter fit, ſi AI ipſius GL tripla requiratur.

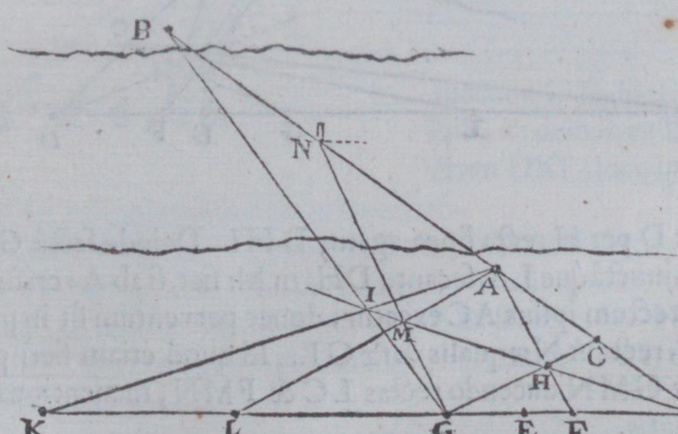
Cæterùm facilè hîc etiam oſtendi poteſt, quo pacto longitudo lineæ B I, cùm ad punctum duntaxat A in ejus producta pervenire licet, aliter quàm ſupra oſtenſum eſt, inveniri poſſit.

Inventâ enim priùs G K, æquali trienti ipſius A B, ut hîc expoſitum fuit, opùs tantùm erit prodire ab F in directum ipſius IF, donec perveniatur in productam HG. Quod ſi fiat in L, erit LK tertia pars ipſius B I, adeoque B I data.

Sequuntur tres præcedentes PROPOSITIONES *adhuc alio modo Conſtructæ.*

1ma *PROPOSITIO.*

Acceptis in producta AB utcunque duobus punctis C & D, & extra eam pro libitu puncto E, ſumantur in lineâ D E rectæ D F, F G æquales DC, CA, junganturque GC, A F, ſeſe ſecantes in H. Deinde ex D per H ductâ DHI, junctâque GB, eandem ſecante in I: fiet,



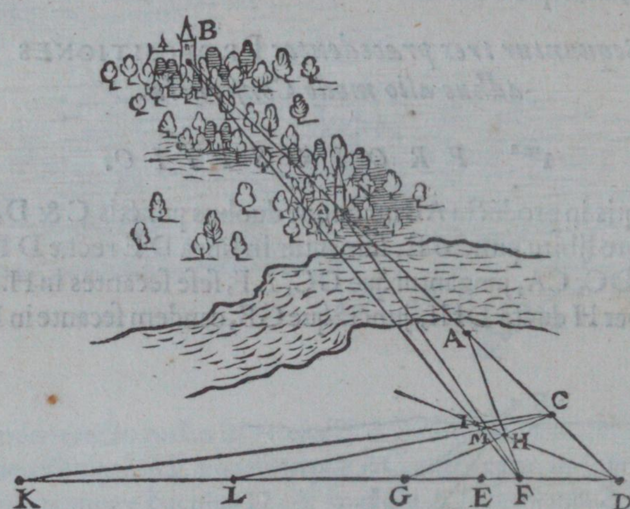
ſi per puncta A, I recta ducatur A I K, occurrens ipſi D E in K, linea GK æqualis propoſitæ AB. Hinc quoties data quævis menſura continetur in GK, continebitur eadem etiam in A B; ac proinde & ipſius AB longitudo data erit.

 Idem

Idem præſtare licet, ſi loco rectarum G B & A I K ducantur rectæ F B & C I K, reliquis manentibus, ut ante.

2da *PROPOSITIO.*

Si jam ab A verſùs B in recta A B linea determinanda ſit æqualis datæ, accipiantur, ut ante, in producta B A puncta C & D utcunque, & extra eam aſſumpto, ut libet, puncto E, ſumptiſque in linea D E rectis D F, F G æqualibus D C, C A, agantur G C, A F, ſeſe ſecantes



in H, & ex D per H recta linea agatur D H I. Deinde factâ G L æquali datæ, junctâque L A, ſecante D H I in M: fiet, ſi ab A verſùs B, ut ſupra, in directum ipſius A C exeatur, donec perventum ſit in productam G M, recta A N æqualis datæ G L. Id quod etiam fieri poteſt loco L A & G M N ducendo rectas L C & F M N, manentibus reliquis invariatis.

3^{tia} *PROPOSITIO.*

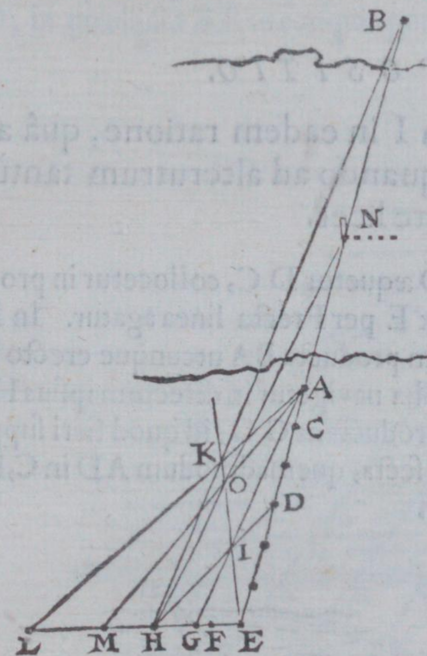
Huc pertinent binæ præcedentes figuræ.

At ſi B N requiratur æqualis datæ rectæ, oportet ut in 1ma $Prop^{ne}$ invenire G K æqualem A B, & in eadem aſſumptâ K L æquali datæ ducere L A aut L C, ſecantem D H I in M. Deinde eundo ab A verſùs B in

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

B in directum ipſius A C, uſque dum perventum fuerit in productam GM aut FM : erit BN æqualis ipſi K L.

Quod ſi contingat, ut in recta D E non eouſque progredi liceret, donec G K ipſi A B ſit æqualis, ad 1^{mam} & 3^{tiam} Propoſitionem juxta hunc modum conſtruendas : fieri poteſt, ut G K, ſit, ex. gr., ipſius A B tertia pars.



Etenim ſumendo in producta A B utcunque punctum C, & in eadem faciendo A D, D E ſingulas ipſius A C triplas, oportet extra eam ad libitum ſumere punctum F, & in recta E F ponere E G, G H ſingulas æquales A C. Deinde junctis H D, G A, ſeſe interſecantibus in I, & ex E per I ductâ rectâ EIK, agatur H B, ſecans EIK in K : fietque, ſi ex A per K recta linea ducatur, occurrens ipſi E F in L, rectæ H L tertia pars ipſius AB.

Idem etiam abſolvere licet, ducendo G B, ſecantem E I K in K, ac deinde ex D per K rectam DKL, loco ipſarum HB & A K L; reliquis exiſtentibus invariatis.

Porrò ſi à B ex AB reſecanda ſit linea BN, ita ut ipſa tripla ſit rectæ datæ : oportet tantùm, inventâ H L, in ea ab L ad M datam hanc collocare, ac deinde ducere M A, quæ EIK ſecet in O. Fiet enim, ſi agatur H O N, occurrens ipſi AB in N, ut recta BN ſit datæ L M tripla. Ut requirebatur.

Quod ipſum quoque facere licet, ſi agatur MD, ſecans EIK in O, ac deinde ex G per O ducatur G O N, loco ipſarum M A & H O N, reliquis, ut ante, manentibus.

Eodem modo procedendum, cùm AN tripla requiritur ipſius HM.

Ubi etiam facilè oſtendi poteſt : Quo pacto & aliâ ratione invenire liceat longitudinem lineæ B N, quum tantùm ad A in producta pervenire datur.

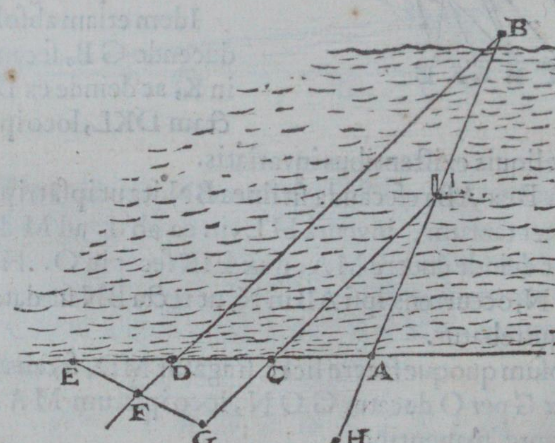
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Si enim primò inveniatur H L æqualis trienti ipſius A B, ut oſtenſum eſt, & ducatur HN aut GN ſecans EIK in O, ac deinde ab L eatur versùs H in linea E F, donec perveniatur in productam A O aut D O: erit, ſupponendo id fieri in M, L M tertia pars ipſius BN. Quocirca ſi longitudo lineæ L M per certam aliquam menſuram exploretur, eaque in recta aliqua ter collocetur, inventa etiam erit longitudo lineæ BN quæſitæ.

4 *PROPOSITIO.*

Lineam A B dividere in I in eadem ratione, quâ alia data A D in C diviſa eſt, quando ad alterutrum tantùm ejus extremum A pervenire licet.

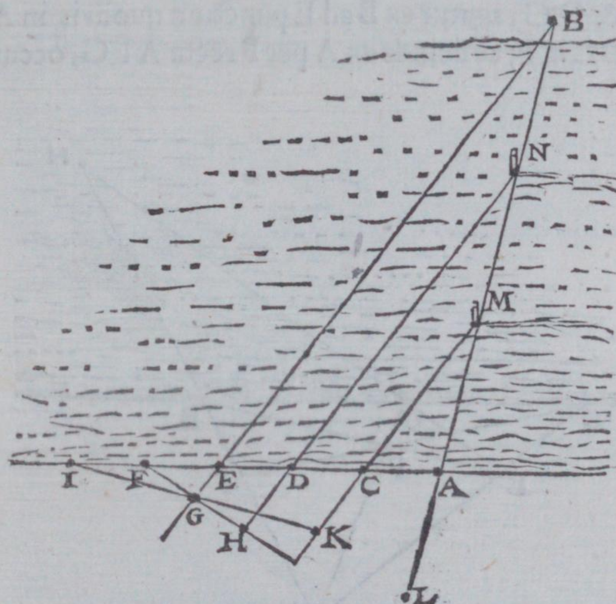
Productâ AD ad E, ita ut ED æquetur D C, collocetur in producta B D alicubi baculus F, & ex E per F recta linea agatur. In hac autem poſitâ FG æquali FE, & in producta B A utcunque erecto baculo H, ab A versùs B. Cum ſcapha navigetur in directum ipſius HA, uſque dum perventum fuerit in productam G C, id quod fieri ſuppono in I: eritque AB in I ſimiliter ſecta, quemadmodum AD in C, hoc eſt, erit A I ad IB, ut AC ad CD.



Eodem modo, ſi A C, C D, & D E omnes inter ſe accipiantur æquales, erit A B in I biſariam ſecta. Unde etiam liquet, quo pacto linea A B in 3 aut plures æquales partes ſit dividenda; vel etiam quâ ra-

ratione ex ea ad A vel B quæſita pars ſit auferenda. Quæ quidem omnia tam in imponendis fluvio pontibus quàm in delineandis variis operibus in locis paludoſis in primis uſui venire poſſunt.

Cæterùm, lineâ AE in plures quàm duas partes utlibet diviſâ, ut, exempli gratiâ, in C & D, ad dividendam AB in M & N in eadem ratione: oportet, ut ante, producendo AE ad F, ita ut EF ſit æqualis ED, in producta BE utcunque ponere baculum G; & ex F per G



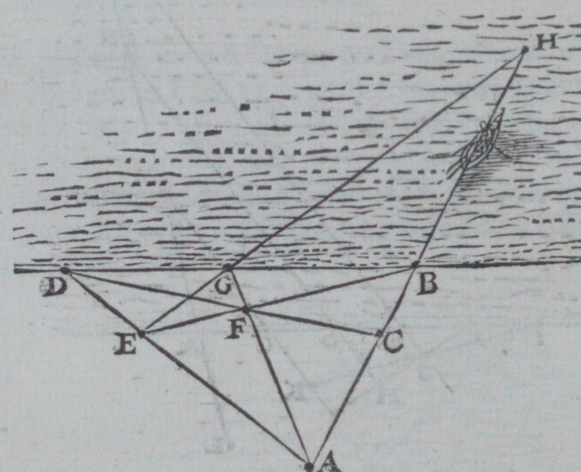
ductâ FGH in ea aſſumere GH æqualem GF. Deinde productâ AE ad I, ita ut EI ſit æqualis EC, ducatur ex I per G recta IGK; & in eadem aſſumptâ GK æquali GI, collocetur in producta AB alicubi baculus L. Porrò exeundo, ut ſupra, ab A versùs B in directum ipſius LA, donec perveniatur in productas KC & HD, id quod fieri ſuppono in M & N: erit AB in M & N diviſa, ſicut AE in C & D. Eodem modo procede, cùm AE in plures quàm tres partes eſt diviſa.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

5 PROPOSITIO.

Lineam A B, diviſam in C, ita ut A C major ſit quàm C B, producere versùs B, ut tota A H ſit ad productam BH, ſicut AC ad CB. Supponendo quòd ultra B progredi non liceat.

Ad quod faciendum, defixo alicubi extra AB baculo D, ductiſque A D, D B, & D C, agatur ex B ad E punctum quodvis in A D recta BE, ſecans DC in F; ac deinde ex A per F recta A F G, occurrens ipſi



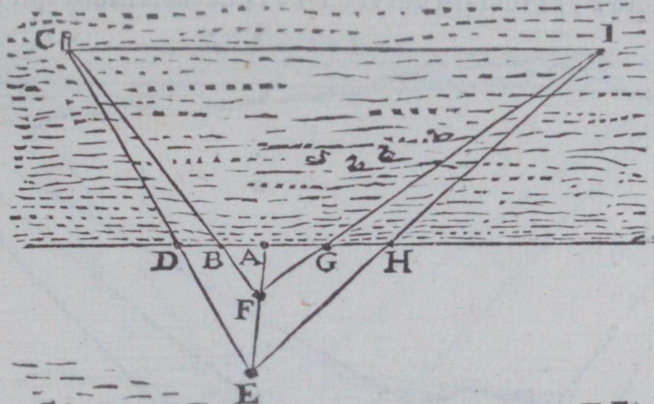
DB in G. Quo peracto, ſi à B cum ſcapha in directum ipſius A B navigetur, donec perventum ſit in productam E G, ut ad H; erit AH ad HB, ut AC ad CB. Ut requirebatur.

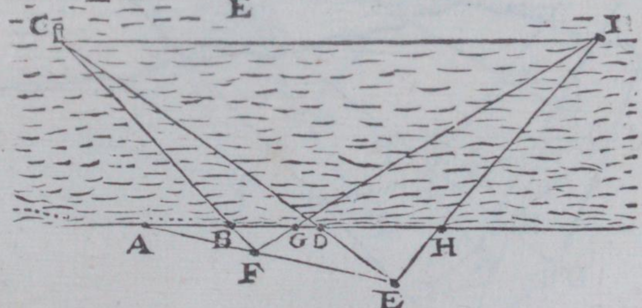
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

6 PROPOSITIO.

Per punctum C rectam lineam ducere CI, parallelam alteri AB, cùm intra utramque venire non licet.

Sumpto in AB utcunque puncto utroque A & B, & in ea acceptâ BD æquali BA, agatur ex C per D recta CDE. Deinde in hac aſſumpto pro lubitu puncto E, ductâque EA, agatur ex C per B recta





CBF, occurrens ipſi EA in F. Porrò accepto in AB utcunque alio puncto G, factâque in linea AB rectâ GH æquali GA: fiet, ſi à G cum ſcapha navigetur in directum ipſius FG, donec perveniatur in productam EH, quod fieri ſuppono in I, recta CI, quæ inter utrumque punctum C & I interjacet, ipſi AB parallela.

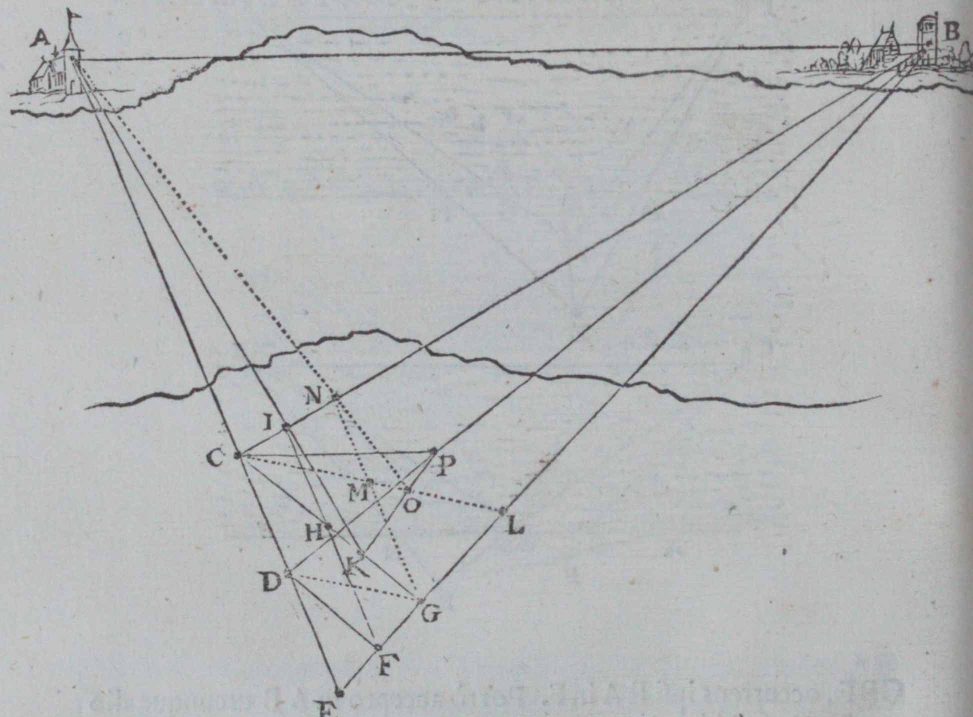
7 PRO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

7 PROPOSITIO.

Per datum punctum C rectam ducere CP, parallelam alteri AB, ad quam acceſſus non patet.

Sumpto enim in producta A C puncto utcunque D, ponatur in ea DE æqualis D C, ducanturque EB, B C. Deinde accepto in E B pro lubitu puncto F, collocetur in ea F G æqualis FE, junganturque FD, G C. Quo peracto, oportet ex CG abſcindere C H æqualem D F, & per puncta F, H rectam ducere F H I, occurrentem ipſi C B in I.

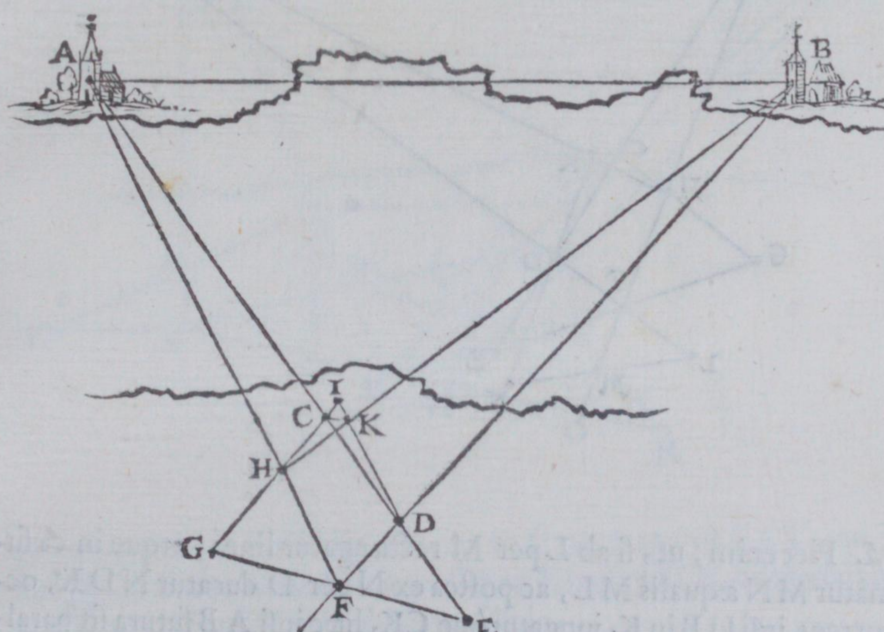


Eodem modo, aſſumpta GL æquali GE, junctiſque GD, LC, oportet ex CL auferre CM æqualem DG, & per puncta G, M rectam ducere G M N, occurrentem ipſi C B in N. Poſtea ductis ex A per I & N rectis A IK, A N O, occurrentibus ipſis C G, C L, aut poſtquam ſunt productæ in K & O, agatur ex K per O recta K O P, occurrens ipſi DB in P: eritque juncta C P ipſi A B parallela. Ut requirebatur.

Ali-

Aliter & breviùs.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque poſitâ D E æquali DC, accipiatur in producta BD pro libitu punctum F, & ex E per F agatur recta EFG. In qua aſſumptâ FG æquali FE, junctiſque



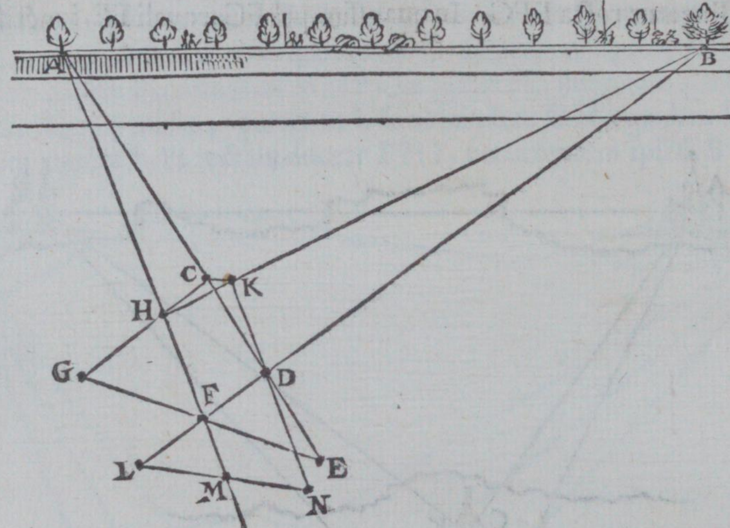
GC, FH, ſeſe interſecantibus in H, oportet HI æqualem facere FD, & jungere I D, quæ ab H B ſecetur in K: eritque juncta C K ipſi AB parallela.

Aliter, non appropinquando ipſi AB.

Porrò ſi accidat, ut ad evadendum aliquod periculum vel ob incommodum aliquod ultra C progredi non liceat: poterimus ad idem perficiendum, poſtquam, ut ante, inventa eſt linea G C, loco ſumen-

 di in

di in ea H I æqualem FD, &c. in producta B D F collocare FL æqualem F D, ac deinde in producta A H F accipere utcunque punctum

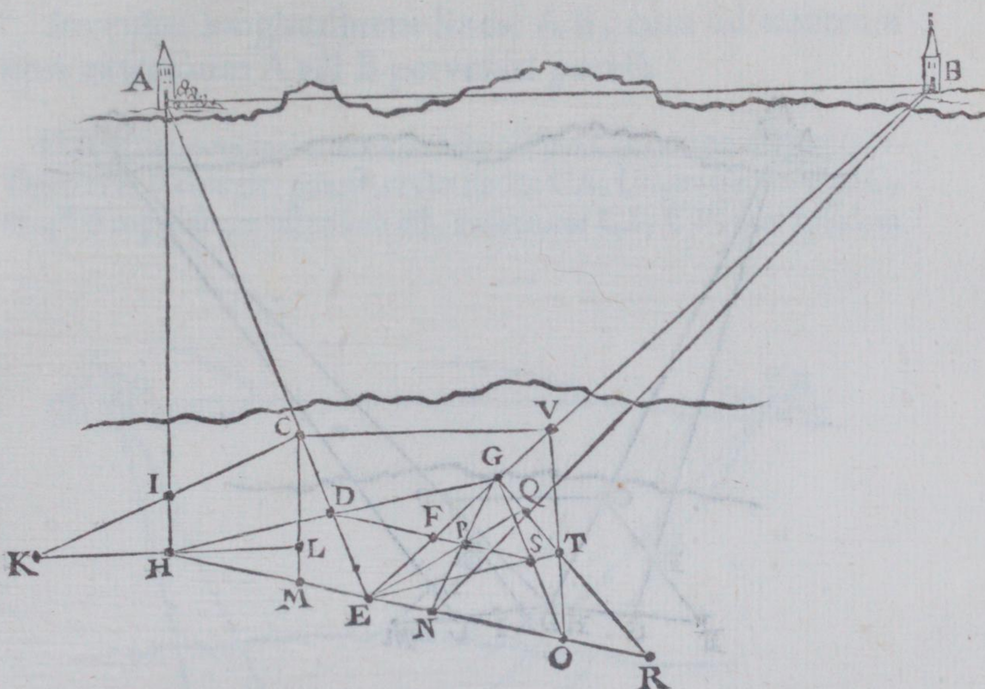


M. Fiet enim, ut, ſi ab L per M recta agatur linea, atque in ea ſumatur M N æqualis M L, ac poſtea ex N per D ducatur N D K, occurrens ipſi H B in K, jungaturque CK, hæc ipſi A B futura ſit parallela.

Idem aliter.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque poſitâ D E æquali D C, agatur EB. In qua aſſumptis E F, F G æqualibus E D, DC, & ex G per D ductâ rectâ G D H, collocetur in ea D H æqualis DG, junganturque H A, HE. Deinde accepto in H A pro libitu puncto I, oportet ex C per I rectam lineam ducere, & in ea aſſumere I K æqualem I C. Porrò ductâ ex K per H rectâ lineâ, in eaque acceptâ H L æquali H K, agatur per utrumque punctum C & L recta C L M, occurrens ipſi HE in M. Quo peracto, ſi in producta H E ſumantur E N, N O ipſis E M, M H æquales, ducanturque N G, G O, quæ à pro-

producta DF ſecentur in P & S, & ex E per P recta linea agatur EPQ, occurrens ipſi NB in Q, fiet, ut ſi à G per Q recta ducatur linea GQR,



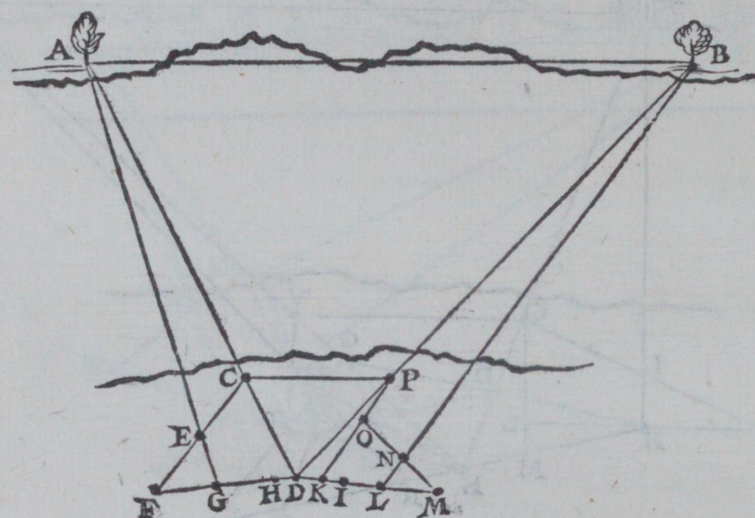
occurrens productæ HE in R, & ex E per S agatur EST, quæ à GQR ſecetur in T, ac deinde ex O per T recta OTV, occurrens ipſi EB in V, juncta CV ſit ipſi AB parallela.

Idem adhuc aliter & brevius.

Accepto, ut ante, in producta AC puncto D, atque extra eam utcunque puncto E, ducatur ex C per E recta CEF. In qua ponendo EF æqualem EC, ducendoque FD, quæ à producta AE ſecetur in G, fiat GH æqualis GF. Deinde ſumendo extra DB, eamvé productam, pro lubitu punctum I, oportet in linea DI aſſumere DK, KL, & LM æquales DH, HG, & GF, & in juncta LB accipere utcunque punctum N. Poſtremò ducendo ex M per N rectam MNO, in eaque collocando NO æqualem NM, oportet ex K per O rectam lineam ducere KOP, quæ à DB ſecetur in P: eritque juncta CP ipſi AB parallela.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ubi patet, poſtquam puncta D & E ita propè ipſum C aſſumuntur, quantum libet, quo pacto per C recta linea duci poſſit, quæ ipſi

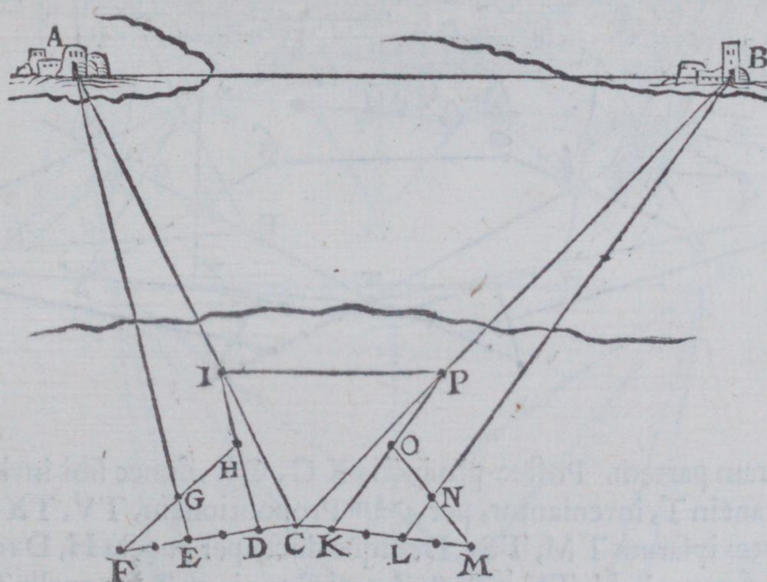


A B parallela exiſtat, non niſi ad certam diſtantiæ partem datumvè perticarum numerum retrogradiendo, neque etiam ullatenus ipſam AB appropinquando.

8 PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ AB, cùm ad neutrum ejus extremum A vel B perveniri poteſt.

Ut hoc fiat, concipiantur ex puncto aliquo C, è quo utrumque punctum A & B conſpici poteſt, rectæ ductæ CA, CB; ex quibus ſi ad C, ut 4ta Propoſitione oſtenſum eſt, auferantur CI, CP, quæ ipſarum

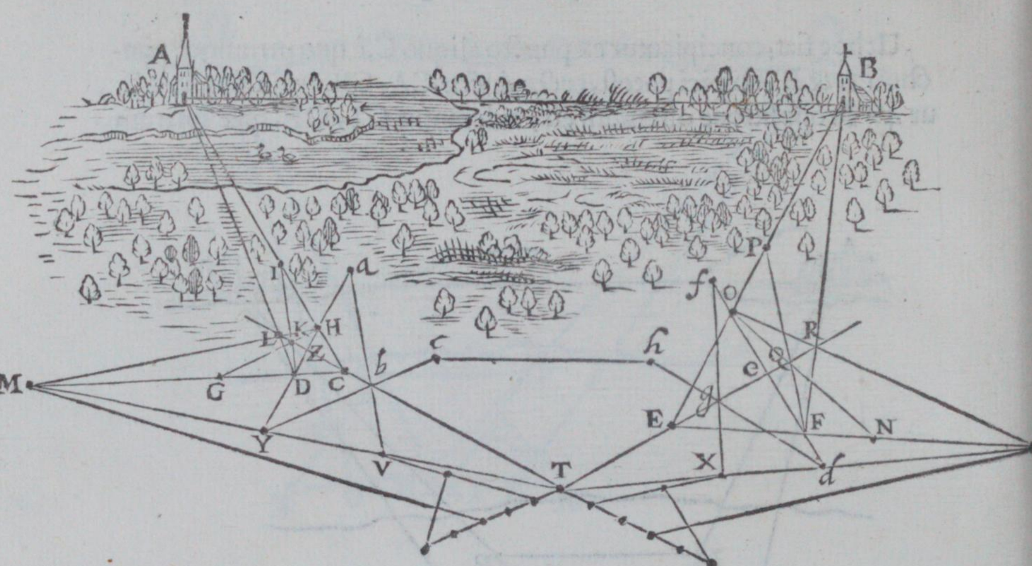


CA, CB partes ſint aliquotæ, ut, ex. gr., tertia pars: erit ſimiliter juncta IP tertia pars ipſius AB. Cujus itaque IP explorata longitudo ſi in recta aliqua ter ſumatur longitudinem quæſitæ AB exhibebit.

Ubi notandum, inventam IP parallelam quoque eſſe ipſi AB.

Porrò ſi contingat, ut puncta A & B alicubi commodè ſimul videri nequeant, ſed punctum A, exempli gratiâ, tantummodo in locis C & D; & punctum B ſolummodo in E & F, ſumatur in producta

CD utcunque punctum G, & in CA aſſumptis CH, HI æqualibu CD, DG, junctiſque GH, DI, ſeſe interſecantibus in K, agatur ex C per K recta CKL, ſecans DA in L. Deinde ductâ ex H per L rectâ HLM, occurrente productæ CD in M, procedatur eodem modo



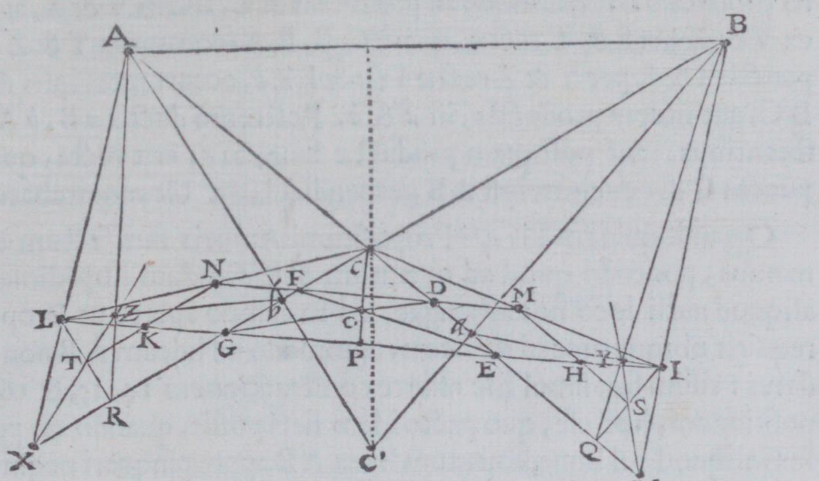
ad alteram partem. Poſtea productis KC, QE, donec ſibi invicem occurrant in T, inveniantur, per 4^{tam} Propoſitionem, TV, TX tertiæ partes ipſarum TM, TS. Denique ductâ per puncta H, D rectâ HDY, ſecante TM, TK in Y & Z, accipiatur in ea Z *a* æqualis ZY, junctâque *a* V, ſecante KT in *b*, agatur ex Y per *b* recta Y *bc*, aſſumendo in ea *bc* æqualem *b* V. Eodem pacto ſi ad alteram partem inveniatur punctum *h*, agaturque *ch*, erit ipſa rectæ AB pars tertia, ut & ipſi parallela. Patet itaque, per hanc Propoſitionem nec non præcedentem ac primam, factum eſſe, id quod ab Autore in tribus primis Propoſitionibus requirebatur.

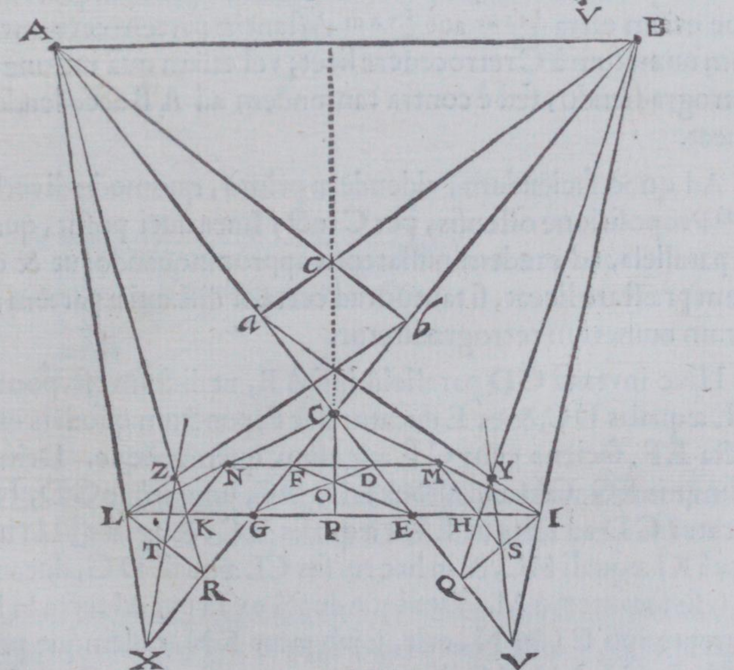
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

9 PROPOSITIO.

Ex puncto C, utcunque è regione lineæ inacceſſæ AB dato, in eandem lineam perpendicularem demittere.

Sumantur in productis AC, BC rectæ CD, DE, CF & FG omnes





inter ſe æquales, ductâque per G & E rectâ lineâ capiantur in ea hinc inde

inde EH, HI, GK, & KL præcedentibus æquales. Tum junctis CI, C L, quæ à recta per F & D ductâ ſecentur in M & N, agantur D G, F E, ſe mutuò ſecantes in O, & ex C per O recta linea agatur, occurrens ipſi GE in P. Deinde acceptis EQ, GR æqualibus E P, PG jungantur QI, RL, quæ à productis MH, NK ſecentur in S & T. Porrò productis BI, AL uſque ad productas A C, BC in V & X, agantur ex V & X per S & T rectæ, quæ à Q B, R A ſecentur in Y & Z, & ex punctis I & L per Y & Z rectæ IY*a* & LZ *b*, occurrentes ipſis A C & B C, aut iiſdem productis, in *a* & *b*. Poſtremò ductis *a* B, *b* A, ſeſe ſecantibus, aut poſtquam productæ ſunt, in *c*, erit recta, quæ per puncta C & *c* ducitur, ipſi A B perpendicularis. Ut requirebatur.

Quandoquidem his 4^tæ^ Propoſitioni Autoris ſatisfactum exiſtimamus, ponendo quòd ad quæſitum perficiendum impedimentum aliquod nulli loco nos aſtringat, ſed in campo aperto ut Propoſitio requirit ubique procedere liceat, dummodo ad lineam A B non accedatur: viſum fuit ſimul hîc afferre conſtructionem 14, 15, & 16 Propoſitionum, hoc eſt, quo pacto idem fieri poſſit, quando ob periculum aliquod vel impedimentum linea A B appropinquari nequit, neque etiam ultra $\frac{1}{4}$tam aut $\frac{1}{8}$vam diſtantiæ partem certumvé perticarum numerum à C retrocedere licet; vel etiam quâ ratione idem non retrogradiendo, ſed è contra tantundem ad A B accedendo, abſolvi queat.

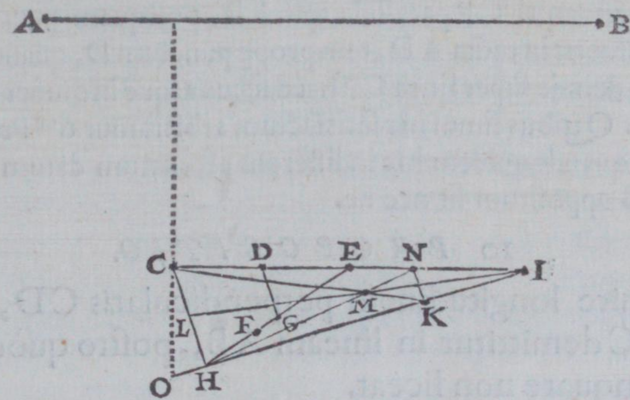
Ad quod faciendum, videndum primò, quomodo diverſis modis, 7mâ Propoſitione oſtenſis, per C recta linea duci poſſit, quæ ipſi A B ſit parallela, ad eandem nullatenus appropinquando; ut & quomodo idem præſtare liceat, ſi tantùm ad certam diſtantiæ partem aut perticarum numerum retrogradiretur.

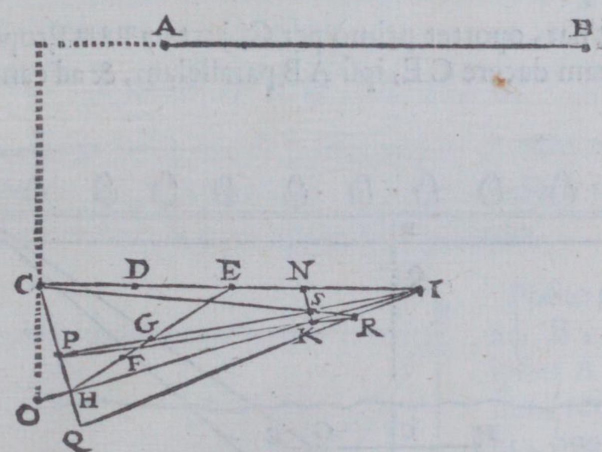
Hinc inventâ C D parallelâ ipſi A B, ut dictum eſt, ponatur in ea DE æqualis DC, & ex E ducatur per F, punctum quodvis extra CD, recta E F, faciens cum C E angulum quemcunque. Deinde in hac aſſumptis EG, GH æqualibus ED, DC, junctiſque G D, H C, producatur C D ad I, ita ut E I ſit æqualis E C, & agatur H I: in qua acceptâ KI æquali HC, & in hac rurſus CL æquali D G, ducantur CK, LI ſeſe ſecantes in M. Denique ductâ ex H per M recta HMN, occurrente ipſi CI in N, erit, ſi jungatur KN, eademque ponatur in producta I H ab H ad O, linea quæ per puncta O & C vergit ipſi A B perpendicularis.

Vel

Vel etiam ſic:

Ductâ ex I per C rectâ IGP, occurrente ipſi CH in P, & in producta CH aſſumptâ HQ æquali HP, agatur QI, ut & PKR, occurrens ipſi QI in R. Si enim junctâ CR, ſecante PI in S, ex K per S aga-





tur recta KSN, occurrens ipſi CI in N: erit, ut ante, aſſumptâ HO æquali KN, linea quæ per puncta O & C tranſit perpendicularis ipſi AB.

Ubi porrò notandum, quandoquidem liberum eſt in inventa linea CD accipere punctum D, ut & extra eam punctum F, quòd exinde tam parum à C in linea CD progredi poſſimus, ut libet, ſicut etiam ob angulum CEF pro libitu acutum puncta C & H tam propinqua,

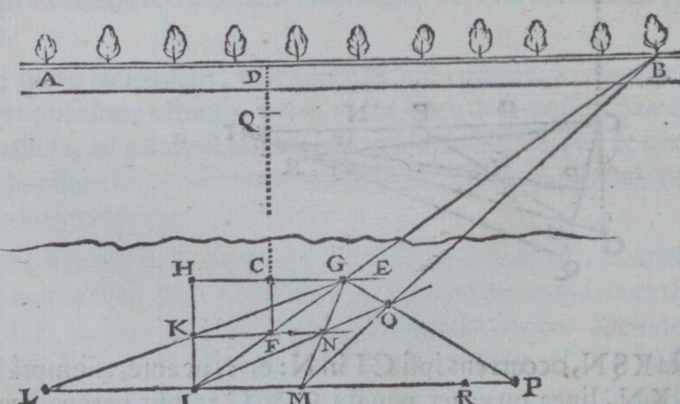
ita ut ad inveniendum punctum O non niſi ad certam diſtantiæ partem aut perticarum numerum retrocedere opùs ſit, nullatenus lineam AB appropinquando.

Denique ſi à C retrocedere non daretur, ſed duntaxat, quantum dictum eſt, ad AB accedere liceret: poterit, juxta ultimum modum 7^mæ^ Propoſitionis punctum C, hîc datum, illîc haberi pro puncto D, atque ſic inveniri CP parallela ipſi AB, poſtquam punctum C ibi ſumptum fuerit in recta AD, tam prope punctum D, quantum libet, operando deinde ſuper linea CP haud ſecus atque hîc ſuper CDE factum fuit. Quibus ſimul hîc ſatisfactum arbitramur 6^tæ^ Propoſitioni Autoris, quandoquidem hîc indifferens eſt, utrum datum punctum C ipſi AB oppoſitum ſit nec ne.

10 *PROPOSITIO.*

Invenire longitudinem perpendicularis CD, quæ ex puncto C demittitur in lineam AB, poſito quòd ad AB appropinquare non liceat.

Quod ut fiat, oportet primò per C, juxta 7^mam^ Propoſitionem, rectam lineam ducere CE, ipſi AB parallelam, & ad eam, ut modò



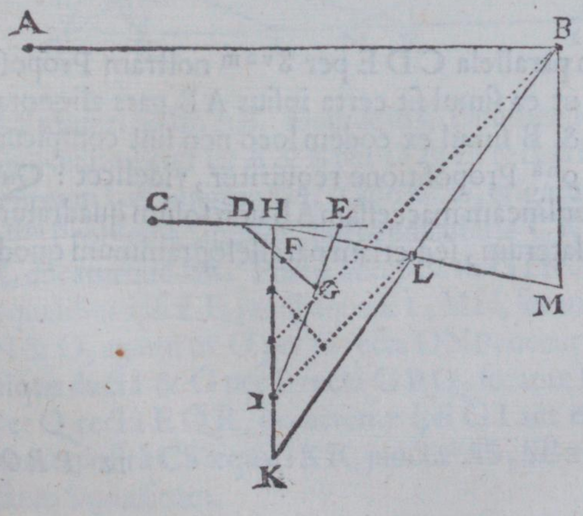
oſtenſum eſt, ex C erigere perpendicularem CF. Deinde ductâ FB, ſecante CE in G, factâque CH æquali CG, & FI æquali FG, poſitis nempe iiſdem in productis EC, BF, agatur HI: In qua aſſumptâ HK æquali

æquali CF, ducatur ex G per K recta linea, & in ea acceptâ KL æquali KG, agatur ex L per I recta linea. Porrò in hac poſitâ IM æquali IH, junctâque MG, ſecante KFN in N, ducatur MB, quæ ab INO ſecetur in O: eritque, ſi ex G per O recta linea agatru uſque ad productæ LI punctum P, abſciſſa MP æqualis perpendiculari CD. Hinc exploratâ longitudine lineæ MP, erit etiam longitudo perpendicularis CD data. Atque ita ſatisfactum eſt $5^{tæ}$ Propoſitioni, non appropinquando inſuper ad AB, nec etiam, quia punctum F ad arbitrium ſumitur in perpendiculari CF, ulteriùs retrocedendo quàm permittitur.

Ubi præterea notandum, ſi ex C ſuper AB deducenda ſit perpendicularis, quæ ipſius CD pars aliquota exiſtat, ut QD, verbi gratiâ, $\frac{1}{4}^{ta}$ ejus pars; vel quæ datæ rectæ æqualis aut certa ejuſdem pars ſit, utputa $\frac{1}{4}^{ta}$ pars: opùs tantùm eſſe, abſciſsâ per 4^{tam} Propoſitionem ex MP $\frac{1}{4}^{tâ}$ ejus parte RP, vel aſſumptâ RP æquali datæ aut ipſius parti aliquotæ $\frac{1}{4}^{tæ}$, à C versùs D in directum ipſius FC, juxta 2^{dam} Propoſitionem, rectam definire CQ æqualem MR, quo ſimul $8^{væ}$ Propoſitioni Autoris ſatisfactum erit.

II *PROPOSITIO.*

Ad punctum in linea AB utcunque datum rectam lineam ducere æqualem datæ, & ſuper eadem perpendicularem, lineam AB non appropinquando.



Poſito enim, quòd ad B, extremum ipſius AB, hujuſmodi recta ducenda ſit, oportet per C, punctum quodvis, per 7^{mam} Propoſitionem, ducere CD parallelam AB, & in ea ponere DE æqualem DC. Deinde aſſumpto extra eam utcunque puncto F, agatur ex D

 per

per F recta linea, acceptâque in ea DG æquali DE, & ex E per G ductâ rectâ lineâ, ponatur in ea EI æqualis EC. Porrò factâ EH æquali EG, erit HI perpendicularis ad CDE: in qua aſſumptâ HK æquali datæ rectæ, ducatur KB, quâ, per 4^{tam} Propoſitionem, bifariam ſectâ in L, agatur ex H per L recta linea. Denique acceptâ in hac LM æquali LH, ducatur MB, eritque ipſa æqualis datæ rectæ HK & perpendicularis ad AB, ut requirebatur.

Eodem modo operandum, ſi quæſita linea ad aliud quodvis punctum in recta AB ſit ducenda. Quibus ſimul ſatisfactum exiſtimamus 7^{mæ} & 10^{mæ} Propoſitionibus Autoris.

Porrò ſi requiratur, ut linea BM datum angulum cum AB efficiat, poterit, loco ducendi HI perpendicularem ad CDE, ea juxta 6^{tum} Problema Simplex ad aliquod punctum CDE ita duci, ut nimirum angulus CHI dato angulo ſit æqualis, operando ulteriùs, ut ſupra.

Præterea animadvertendum, quòd, ſi, BM exiſtente perpendiculari ſuper AB, per M, ut ante, recta linea ducatur, quæ ipſi AB ſit parallela, aut ad A eodem modo procedatur, quemadmodum hîc ad B, recta quæ bina hæc puncta connectit, ipſi AB futura ſit parallela, & in data diſtantia ab ipſa remota, ſimulque cum reliquis parallelogrammum rectangulum comprehenſura. Quo quidem ſenſu Autor ſecundam ſuam Propoſitionem procul dubio propoſuit, ſi forte in 7ma aut 8va noſtra Propoſitione verum ejus ſenſum non fuerimus aſſecuti.

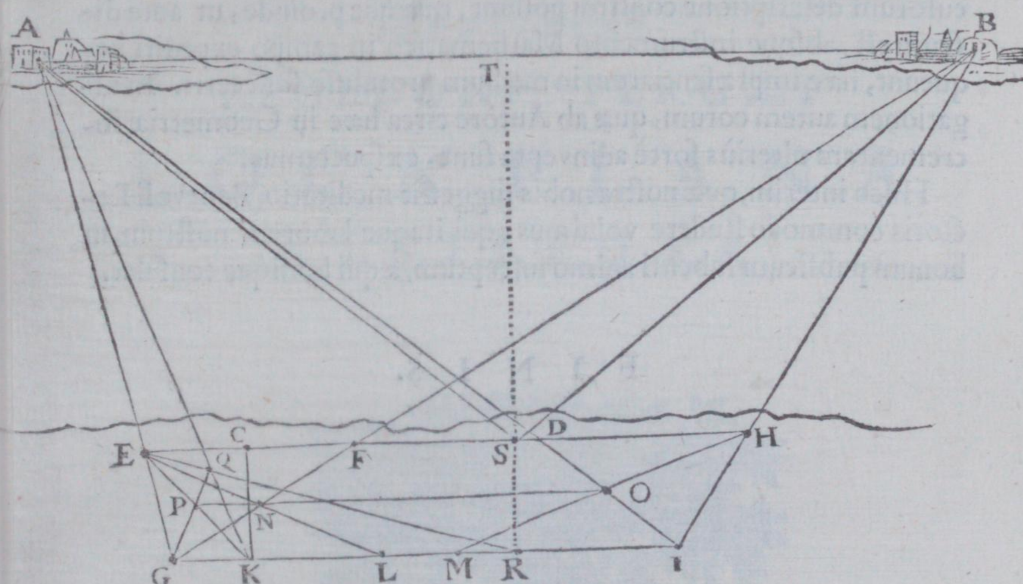
Denique, quoniam parallela CDE per 8^{vam} noſtram Propoſitionem ita invenitur, ut ea ſimul ſit certa ipſius AB pars aliquota, etiamſi duo puncta A & B ſimul ex eodem loco non ſint conſpicua, patet hinc id quod in 9na Propoſitione requiritur, videlicet: Quo pacto hoc in ſenſu ſuper lineam inacceſſam AB non ſolum quadratum ſeu rectangulum æquilaterum, ſed etiam parallelogrammum quodvis conſtitui poſſit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

12 PROPOSITIO.

In data diſtantiâ à linea A B, per punctum C determinatâ, invenire punctum S, æquidiſtans ab utroque extremo inacceſſæ AB.

Ad quod expediendum, oportet, ductâ per C, juxta 7^{mam} Propoſitionem, rectâ CD ipſi AB parallela, in eadem utrinque aſſumere CE, C F, inter ſe æquales, ita ut, ſi ex punctis A & B per E & F rectæ lineæ agantur, ipſæ concurrant in G. Id quod ſemper fit, exiſtente



E F minori quàm AB. Deinde in C D ſumendo D H æqualem E F, oportet ſimiliter ex A & B per D & H rectas lineas ducere, concurrentes in I, & jungere G I. Quo facto, erigatur ex C ſuper C D, per 4^{tum} Problema Simplex, perpendicularis C K, occurrens ipſi G I in K, ducaturque EK. Porrò acceptis in G I rectis G L, M I, ſingulis æqualibus ipſi E F, junctiſque E L, MH, ſecantibus G FB & ADI in N & O, agatur ex O per N recta ONP, occurrens ipſi E K in P. Denique ductâ & G per P rectâ G P Q, ſecante K A in Q, ac inde ex E per Q rectâ E Q R, occurrente ipſi G I aut eidem productæ in R: erunt, poſitâ CS æquali K R, junctæ AS, SB æquales, adeoque punctum S quæſitum.

Haud

Haud ſecus etiam quodvis punctum in recta RST aſſumptum à punctis A & B æquè remotum erit.

Ubi liquet, quæſitum hâc ratione non ſolùm inveniri, nullatenus ad AB accedendo (quo ſenſu 11^{mam} Propoſitionem Autoris intelligendam eſſe confido); verùm etiam haudquaquam ad eam appropinquando; ac inſuper, quoniam EC, CF pro lubitu ſumuntur æquales, non niſi ad certam diſtantiæ partem aut datum perticarum numerum retrocedendo.

Denique quod attinet ad 12 & 13^{tiam} Propoſitionem Autoris, quandoquidem eas tales cenſeo, quæ non niſi unius aut plurium circulorum deſcriptione conſtrui poſſunt, quæque proinde, ut ante dictum eſt, abſque inſtrumento Mathematico in campo expediri nequeunt, hæc impræſentiarum in medium protuliſſe ſuffecerit. Evulgationem autem eorum, quæ ab Autore circa hæc in Geometriæ incrementum ulteriùs fortè adinventa ſunt, exſpectamus.

Hiſce interim, quæ noſtra nobis ſuggeſſit meditatio, Benevoli Lectoris commodo ſtudere voluimus, qui itaque laborem noſtrum, in bonum publicum lubenti animo ſuſceptum, æqui boniq́ue conſulat.

FINIS.

FRAN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris,

EXERCITATIONVM MATHEMATICARUM,

LIBER III.

CONTINENS

APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIƆ IƆC LVI.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ILLVSTRISSIMO VIRO,

D^no PETRO CHANUTO,

Regis Chriſtianiſſimi in Concilio Status Conſiliario Ordinario & Quæſtorum Galliæ Conventu, Ricomagi Arvernorum, Pręſidi; antehac ad Coronam Sueciæ & Confœderati Belgii Ordines Legato.

Vir Illuſtriſſime,

QUemadmodum in veritatis inveſtigandæ ſtudio, quæ omnis ſcientiæ finis animiqúe cibus & genuinum alimentum eſt, nullæ utique Diſciplinæ animos diſcentium ad illam aſſequendam aptiores alacrioreſqúe reddunt, quàm quæ in veri inquiſitione continuè occupatæ certitudinis evidentiâ alias diſciplinas antecellunt; ita etiam Mathematicæ, quæ ferè hactenus ſolæ demonſtrationibus gaviſæ ſunt, præter ſummam ſuam ad vitæ commoda neceſſi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tatem, huc etiam ſemper quàm maximè utiles judicatæ, magnoqúe idcirco apud perſpicaciſſimos quoſque in pretio habitæ ſunt. Etenim ſi perpendamus, quo pacto ipſæ à rebus notiſſimis initium capientes ad abditiſſimarum rerum cognitionem brevi tempore nos perducant, ſicqúe mentem è terra quaſi in cœlum ſubvehant: facilè conſtabit, quam ob cauſam Veteres, quò ingenium adhuc infirmum in rectè judicando docile redderetur, eas ante alias omnes ſcientias ac artes excolendas ſibi duxerint. Hanc igitur viam ubi prudentiorum quiſpiam, ad præclara natus, seriò ſemel eſt ingreſſus, mirum quanto cum ſucceſſu tam in reliquis ſtudiis ritè pertractandis, quàm in ſummis muneribus fœliciter adminiſtrandis operam ille ſuam collocaverit. In te unum, Vir Illuſtriſſime, ſi intuear, cui μελετήματα hæc ſacra eſſe volui, non eſt quod alios hîc in teſtes advocem, quippe tu, quanta ex Diſciplinis hiſce emolumenta dimanent, ſæpiùs accurato tuo judicio prudentiqúe conſilio comprobâſti. Teſtatur hoc eximius ille tuus in Mathematicas Scientias amor, quo in earum adyta non modò jam dudum penetrâſti ac in iiſdem recolendis, ubi graviora id tua permittunt negotia, etiamnum maximopere delectaris; ſed etiam ſolidiori eruditioni

tioni

tioni vel uſque adeò faves, ut ſtrenuos ejuſdem cultores inſigni benignitate foveas, atque multis honorum titulis proſequaris. Quâ adeò ex re contigit, ut reliqua tua ſublimiora ſtudia ea hactenus ingenii dexteritate tractaveris, ut cordatiorum omnium acclamationes & ἐυφημίαι ad te concordantibus eant ſuffragiis. Porrò quantâ in rebus agendis prudentiâ valeas, teſtis eſt ſplendidiſſima tui nominis fama, quæ virtutes tuas paſſim promulgans, ubi in aulam pervolavit, effecit, ut meritiſſimo tibi Chriſtianiſſimus Rex ſuprema munera deſtinaverit. Vnde factum ut non ſolùm ipſius nomine ad Eruditiſſimam ac Sereniſsimam quondam Suecorum Reginam, & deinde ad Præpotentes ac Illuſtriſsimos Fœderati Belgii Ordines Legatus Ordinarius miſſus fueris, verùm etiam, quò ubique ſapienti prudentiqúe tuo conſilio prodeſſes, Lubecæ in componendis Poloniæ ac Sueciæ litibus Mediator extiteris. Et verò ne Gallia ipſa, ortis in ea diſsidiis, conſilii tui fœlicitate orbata foret, cùm præſentia tua illîc quàm maximè exigebatur, tu inquam, Vir Illuſtriſsime, domum revocatus tempore difficillimo, pacem inter diſſentientes cum applauſu conciliâſti. Quapropter, cum iſtam ſingularem ſapientiam ac prudentiam unuſquiſque

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

in te veneretur, eximiiqúe inſuper affectus tui erga verè eruditos teſtimonium hoc publicum extet, quòd monumentum Holmiæ admodum luculentum in perpetuam memoriam viri maximi ac Gallici nominis decoris ſempiterni, RENATI DES CARTES, erigi curaveris; haud committendum putavi, quum hoc ſtudii genere tibi conjunctiſsimus ſim, ut meum erga te affectum diutiùs occultarem. Hinc, quæ animo jam pridem volvere cœpi, atque in Mathematicarum Diſciplinarum incrementum ac reſtitutionem molitus ſum, ſub tuo auſpicio in publicum dare conſtitui. perſuaſus, quæ ſtrenuis Matheſeos cultoribus non ingrata fore intellexi, ea neque limato tuo judicio diſplicitura. Excipe ergo benigniter, Vir Illuſtriſsime, hanc devotæ mentis meæ teſſeram, &, qui me antehac inter tuos recepiſti, patere conatus etiam hoſce, tuo patrocinio munitos, ſub Illuſtris Tui Nominis ſplendore in lucem prodire. Quod ſupereſt, Deum Opt. Max. ſupplex rogo, ut te literatis omnibus, ſtudiorumqúe candidatis quàm diutiſsimè ſervet incolumem ac felicem.

Illuſtriſsimo Nomini Tuo

devotiſſimus

FR. à SCHOOTEN.

Dabam Lugd. Bat. Kalendis Ianuariis, Anni CIƆ IƆCLVII.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

Lector benevole,

GEometriam olim à Græcis ad ſummum faſtigium fuiſſe evectam, cum ex ingenii monumentis, vix dum ex naufragio nobis ſervatis; tum ex ſucceſſorum teſtimoniis luculenter colligimus. Omnium tamen illorum, quæ ab ipſis ingenioſè & ſummo acumine in Geometrico negotio inquiſita videntur (noſtrâ quidem ſententiâ) primam claſſem meretur Locus, ipſis vocatus ἀναλυόμενος, hoc eſt, reſolutus. De quo ſcripſerunt Euclides, Apollonius Pergæus, & Ariſtæus ſenior. Eſt enim, teſte Pappo Alexandrino in præfatione VII *libri Collectionum Mathematicarum, hæc propria quædam materia, poſt communium Elementorum conſtitutionem, iis parata, qui in Geometricis ſibi comparare volunt vim ac facultatem inveniendi Problemata, quæ ipſis proponuntur. Dictorum autem librorum, qui ad Reſolutum Locum pertinent, ordo, juxta Pappum, talis eſt.*

Euclidis Datorum liber unus. Apollonii λόγου ἀποτομῆς; *h. e, de Rationis ſectione libri duo.* χορίου ἀποτομῆς, *h. e, de Spatii ſectione duo.* Ἐπαφῶν, *h. e, Tactionum duo. Euclidis Poriſmatum tres. Apollonii* νεύσεων, *h. e, Inclinationum duo. Ejuſdem* τόπων ἐπιπέδων, *h.e, Planorum Locorum duo. Apollonii Conicorum octo. Ariſtæi* τόπων στερεῶν, *h. e, Solidorum Locorum quinque. Euclidis* τόπων πρὸς ἐπιφάνειαν, *h. e, Locorum ad Superficiem duo. Eratoſthenis de Medietatibus duo. Quorum omnium librorum ſola Euclidis Data, unà cum quatuor prioribus libris Conicorum Apollonii ad manus noſtras pervenerunt, reliqui omnes temporum injuriâ perierunt, magno ſanè Reipublicæ Literariæ detrimento: Imò, niſi Pappus eorum mentionem feciſſet, planè fuiſſent obliterati.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quapropter cum ipſe breviter nonnulla recenſeat Problemata & Propoſitiones iſtorum librorum, Recentiorum aliqui eorum jacturam dolentes ſummâ ope conati ſunt iſtos ex Pappi relatione reſtituere, atq; ſic quaſi mortuis vitam redonare. Ita paucorum annorum decurſu duo Apollonii libri de rationis ſectione, duo de ſpatii ſectione, duo determinatæ ſectionis nobis per Willebrordum Snellium reſtaurati ſunt, Tactionum per Franciſcum Vietam, Inclinationum per Marinum Getaldum, & Alexandrum Anderſonum, qui duos de determinatâ ſectione poſtea aliter quoque quàm Snellius demonſtravit. Quorum exemplo excitati, nos etiam in Apollonio noſtras vires periclitari, ejuſq; Loca Plana reſuſcitare aggreſſi ſumus, juxta illa quæ Pappus prædicto loco nobis reſervavit, quæq; ſecundùm Commandini verſionem ita ſonant.

De Locis Planis, ex Pappo.

Locorum omnium alii ſunt ἐφεκτικοὶ, hoc eſt, in ſe ipſis tantùm conſiſtentes, de quibus & Apollonius ante propria elementa dicit puncti quidem locum eſſe punctum, lineæ locum lineam, ſuperficiei ſuperficiem, & ſolidi ſolidum; alii autem διεξοδικοὶ, hoc eſt, ſeſe extra tendentes, ut puncti locum lineam, lineæ ſuperficiem, ſuperficiei ſolidum. Locorum autem, qui in reſoluto loco, alii quidem poſitione dati ἐφεκτικοὶ ſunt, alii autem plani dicti, & ſolidi, & lineares: διεξοδικοὶ verò ſunt punctorum, & alii ad ſuperficies. ἀναστροφικοὶ quidem punctorum, διεξοδικοὶ autem linearum. Lineares loci ex iis qui ſunt ad ſuperficies demonſtrantur.

Conferantur hæc cum iis, quæ extant pag. 39, lib. 2di Geometriæ Renati des Cartes, ubi hæc clariùs explicantur.

Dicuntur autem plani loci tum hi, de quibus agemus, tum universè quicunque ſunt rectæ lineæ, vel circuli. Solidi loci quicunque ſunt conorum ſectiones, parabolæ, vel ellipſes, vel hyperbolæ. Lineares loci, quicunque lineæ ſunt, neque rectæ, neque circuli, neque aliqua dictarum coni ſectionum.

Loci autem ab Eratoſthene inſcripti ad medietates ex præ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

prædictis genere ſunt à proprietate hypotheſeon in illis.

Antiqui igitur horum planorum ordinem reſpicientes elementa tradiderunt, quem cum negligerent poſteriores, alios appoſuerunt, tanquam non infinitos multitudine, ſi quis velit aſcribere quæ ordinem illum conſequantur. itaque ponam propoſiti quidem poſteriora, ordine autem priora, unâ propoſitione comprehendens, hoc modo:

Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à Prop. 1.
duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter ſe datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes ſpacium: contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, & alterius terminus locum planum poſitione datum continget, interdum quidem ejuſdem generis, interdum verò diverſum, & interdum ſimiliter poſitum ad rectam lineam, interdum contrario modo. Hæc autem fiunt juxta differentias ſubjectorum.

At propoſita in principio quidem tertii libri à Charmandro his congruunt.

Si rectæ lineæ poſitione datæ unus terminus datus ſit, 2.
& alter circumferentiam concavam poſitione datam continget.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, da- 3.
tum angulum continentes: commune ipſorum punctum continget circumferentiam concavam, poſitione datam.

Si trianguli ſpacii magnitudine dati, baſis poſitione & 4.
magnitudine data ſit, vertex ipſius rectam lineam poſitione datam continget.

Alia autem hujuſmodi:

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam poſitione 5.
datæ æquidiſtantis unus terminus contingat rectam lineam

am poſitione datam, & alius terminus rectam lineam poſitione datam continget.

6. Si à puncto quodam ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas, vel inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam habentes proportionem, vel quarum una ſimul cum eâ, ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam poſitione datam.

7. Et ſi ſint quotcunque rectæ lineæ poſitione datæ, atque ad ipſas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, ſit autem quod data linea & ducta continetur, unà cum contento data linea & altera ducta, æquale ei, quod data, & alia ducta, & reliquis continetur: punctum ſimiliter rectam lineam poſitione datam continget.

8. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas, vel proportionem habentes, vel ſpacium continentes datum, vel ita ut ſpecies ab ipſis ductis vel exceſſus ſpecierum æqualis ſit ſpacio dato: punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Secundus autem liber hæc continet.

1. Si à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & ſint quæ ab ipſis fiunt dato ſpacio differentia: punctum poſitione datas rectas lineas continget. Si ſint in proportione data, vel rectæ lineæ, vel circumferentiæ.

2. Si ſit poſitione data recta linea, & in ipſa datum punctum, à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipſius ducatur & ad poſitionem, & ſit quod fit à ducta æquale ei, quod à data, & abſciſſa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum datum in linea data poſitione: terminus ipſius poſitione datam circumferentiam continget.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & ſit quod

quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato major, quàm in proportione: punctum poſitione datam circumferentiam continget.

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & ſint ſpecies, quæ ab omnibus fiunt dato ſpacio æquales: punctum continget poſitione datam circumferentiam. 4.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad poſitione ductam lineam abſciſſa à recta linea poſitione data ad datum punctum, & ſint ſpecies ab inflexis æquales ei, quod à data, & abſciſſa continetur: punctum ad inflexionem poſitione datam circumferentiam continget. 5.

Si in circulo poſitione dato ſit datum punctum, perque ipſum agatur quædam recta linea, & in ipſa punctum extra ſumatur; ſit autem quod fit à linea ducta uſque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra ſumpta, vel ſoli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus continetur: punctum extra ſumptum poſitione datam rectam lineam continget. Et ſi hoc quidem punctum contingat poſitione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ ſunt ad utraſque partes dati puncti contingent poſitione eandem datam circumferentiam. 6.

In pertractatione harum Propoſitionum, ab Apollonio, uti apparet, inſtar Theorematum traditarum, operæ pretium nos facturos judicavimus, ſi maximam illarum partem ut Problemata expediremus, ut tantò inſignitior earum uſus extaret: adeò quidem, ut non modò nuda iſtarum veritas cuique in proclivi eſſet; verùm ipſe quoque eaſdem ſolvendi ac conſtruendi modus indicaretur. Quoniam autem in pleriſque harum propoſitionum propter caſuum multitudinem plures figuræ fuiſſent exhibendæ, quibus hujus operis ſumptus, magis quàm

par erat, excreviſſent, & in quibus omnibus explicandis longiores fuiſſemus: idcirco caſus tantùm præcipuos elegimus, ne illorum multitudine Lectorem confunderemus, nevé ipſius patientiâ abuteremur. Vbi porrò illud monendum duximus, nos conſultò in id allaboraſſe, ut ſingula hîc Theoremata & Problemata, quantùm fieri poſſet, à ſe invicem eſſent diſtincta, ne concatenato ordine à capite uſq; ad calcem forent evolvenda, ſed ubique pro arbitrio Lectoris ſtudium occuparetur.

Reſtat denique ut edocearis, Amice Lector, quo in primis conſilio laborem hunc ſuſceperimus: nimirum, ut novis exemplis ac nobilioribus Apollonii Problematîs Geometriæ Methodus, viri incomparabilis & nunquam ſatis laudati Renati des Cartes, in quam antehac commentaria edidimus, majorem lucem acciperet. Etenim ejus veſtigiis, quibus in ſua Geometria nobis præceſſit, inſiſtentes, ut calculi Geometrici ſtudioſis anſam ſe exercendi ſubminiſtraremus, nonnulla, ad ipſa univerſaliora reddenda, ab iiſq; parum aliena, de noſtro adjecimus. Ne autem frequentiori calculo dictæ Methodi imperitis aut minus exercitatis tædium excitaremus, nevé omnem ejus ſtudioſis ſe exercendi materiam præriperemus; ſed potiùs utrique parti, quantum in nobis eſt, ſatisfieret: ideo in his Locis reſtituendis, is noſter ſcopus fuit, ut ſolùm in difficilioribus, quæ non neminem remorari poſſent, analyſis noſtra exerceretur; in reliquis verò vulgaris pertractandi modus obſervaretur. E quibus (uti confidimus) Candido Lectori ſatis ſuperqúe conſtabit, quid cauſæ fuerit, cur ſola difficiliora per calculum Geometricum expediverimus, ſcilicet ut nimiam Lemmatum multitudinem, quibus aliàs difficulter carere licuiſſet, evitaremus; quamvis hæc via æquè nobis in promptu fuiſſet, atque altera. Studio itaque noſtro & inventis, quæ in artis propagationem elucubravimus, fave ac fruere. Vale.

APOL-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

APOLLONII PERGÆI
LOCA PLANA
RESTITUTA.

IN
PRIMI LIBRI
PROPOSITIONES,
THEOREMATA
ET
PROBLEMATA.

In 1^{mam} Propoſitionem

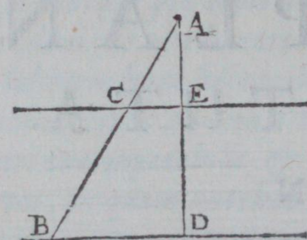
I *THEOREMA.*

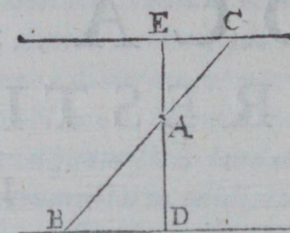
SI à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ AB, AC, datam inter ſe habentes rationem; & B terminus unius AB contingat locum planum BD poſitione datum: ſimiliter quoque C, terminus alterius AC, locum planum poſitione datum continget.

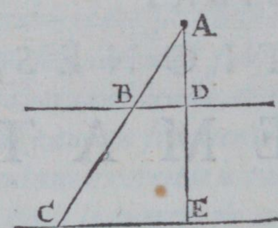
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 1^{mi} caſus.

Primò enim cadente B in recta linea BD, ſi ex alio quocunque in ea puncto D ad A recta linea perducatur, fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE: dico C punctum rectam lineam contingere, quæ per E ipſi BD ducitur parallela.







1^{mus} caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam rectam BD.

Demonſtratio 1^{mi} caſus.

Cum enim per conſtructionem BA ad AC ſit, ſicut DA ad AE: erit [a] juncta CE ipſi BD parallela. Hinc, quum una duntaxat recta per E duci poſſit, quæ ipſi BD parallela exiſtat, neceſſum eſt, ut C punctum eandem contingat. Quod erat propoſitum.

a ꝑ 2. libr. 6. Elem.

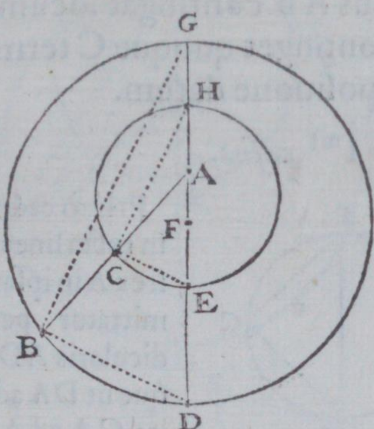
Conſtructio 2^{di} caſus.

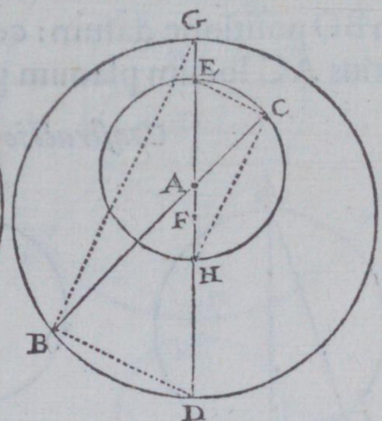
Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, agatur per puncta A, F recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, fiatque ut BA ad AC, ſic DA ad AE; ac rurſus ut BA ad AC, ſic GA ad AH. Tum deſcripto circa diametrum EH circulo, dico punctum C cadere in ipſius circumferentiam.

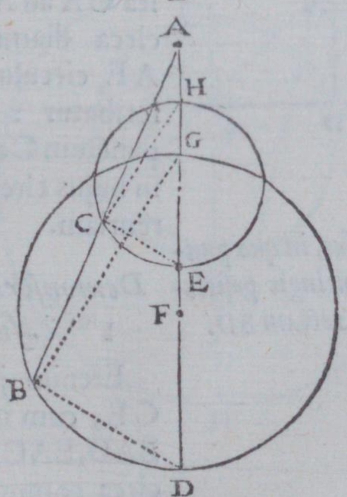
De-

Demonſtratio 2^di^ caſus.

Junctis enim DB, B G, ut & E C, CH, quoniam per conſtructionem B A eſt ad A C, ſicut D A ad A E: erit [b] recta B D rectæ CE parallela. Eodem modo, cum BA ad AC ſit, ſicut GA ad AH, erit recta BG rectæ CH parallela. Hinc, cum propter parallelas BD, CE an- *b ꝑ 2. libr. 6. Elem.*







2^dus^ *caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam circumferentiam B D.*

guli DBA & ECA [c] ſint æquales, ſimiliterque propter parallelas BG, CH anguli ABG & ACH æquales ſint, erit quoque DBG ipſi ECH æqualis. Eſt autem [d] DBG, in ſemicirculo, rectus. Quare etiam ECH rectus erit. Ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propoſitum.

c ꝑ 29. libr. 1. Elem.
d ꝑ 31. libr. 3. Elem.

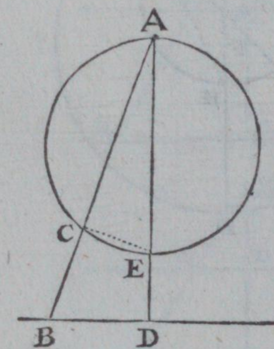
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

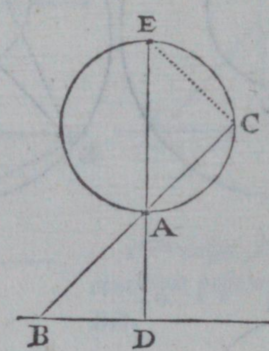
Si ergo à dato punĉto A in reĉtam lineam vel direĉtum, &c. Quod erat oſtendendum.

II THEOREMA.

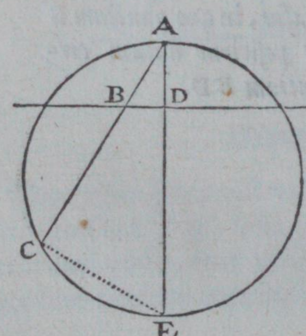
Si à dato punĉto A in reĉtam lineam vel direĉtum duæ agantur reĉtæ AB, AC, datum continentes ſpacium BAC; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD poſitione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum poſitione datum.

Conſtructio 1^{mi} *caſus.*





Primò cadente B in reĉta linea BD, ſi ex A in ipſam demittatur perpendicularis AD; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE, & circa diametrum AE circulus deſcribatur: dico punĉtum C cadere in hujus circumferentiam.



1^{mus} *caſus, in quo punĉtum B contingit poſitione datam reĉtam BD.*

Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

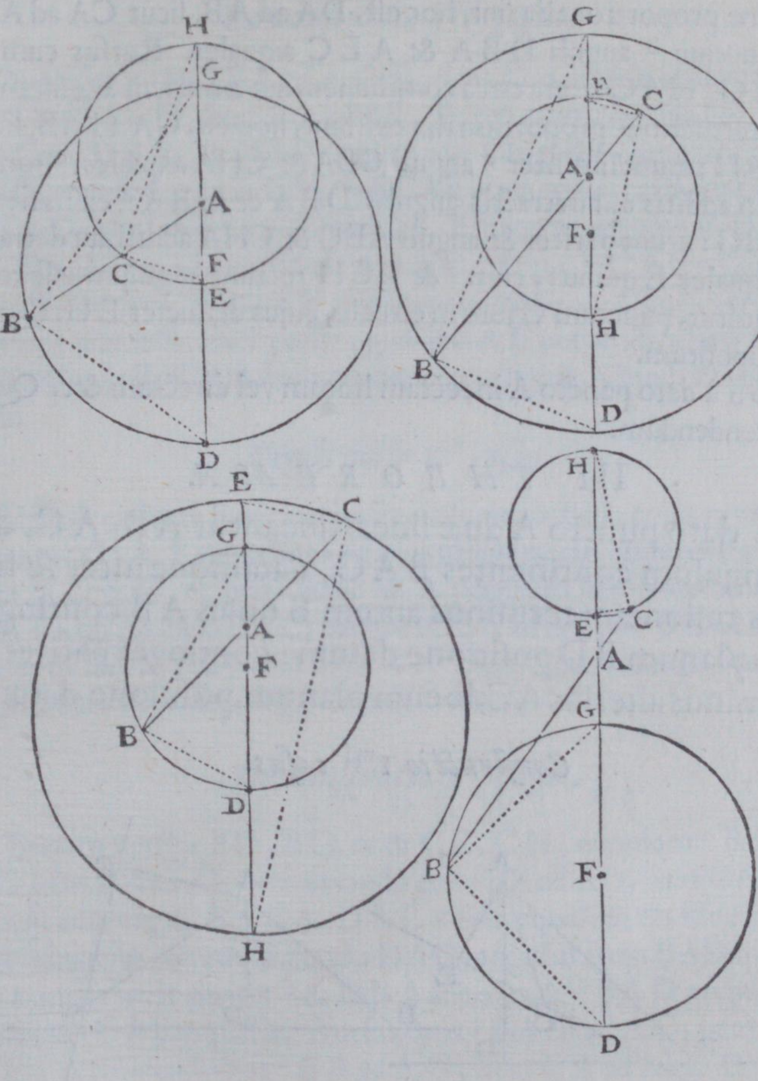
Etenim junĉtâ CE, cum in △^{lis} BAD, EAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex conſtruĉtione proportionalia exiſtant, hoc eſt, DA ad AB, ſicut CA ad AE: erunt quoque [a] anguli ad D & C æquales. Eſt autem D angulus in △^{lo} BAD per conſtruĉtionem reĉtus. Quocirca & angulus ad C in △^{lo} EAC reĉtus erit, ac proinde punĉtum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propoſitum.

[a] p 6. libr. 6. Elem.

Con-

Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, ſi per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^{dus} *caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam circumferentiam B D.*

nata in D & G, fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE; ac rurſus, ut GA ad AB, ita CA ad AH, & diametro EH circulus deſcribatur: Dico in hujus circumferentiam cadere punctum C.

De-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio 2^{di} *caſus.*

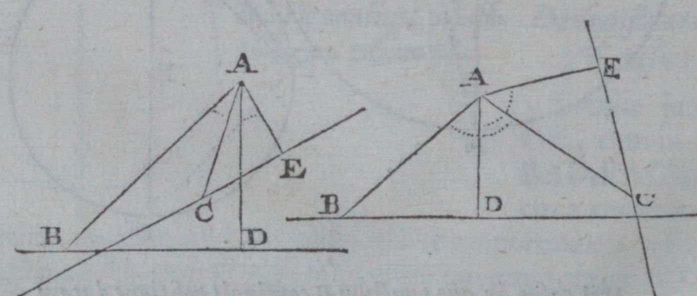
Junctis namque BD, BG, ut & CE, CH, quoniam in $\triangle^{lis}$ BAD, EAC circa communem aut æqualem angulum ad A latera ex conſtructione proportionalia ſint, hoc eſt, DA ad AB, ſicut CA ad AE:
b p 6. libr. 6. Elem. erunt quoque [b] anguli DBA & AEC æquales. Rurſus cum in $\triangle^{lis}$ BAG, HAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex conſtructione proportionalia exiſtant, hoc eſt, GA ad AB, ſicut
c p 6. libr. 6. Elem. CA ad AH: erunt ſimiliter [c] anguli GBA & CHA æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis DBA & GBA [d] ex iis fit re-
d p 31. libr. 3. Elem. ctus DBG: erunt pariter & anguli AEC & CHA additi aut detracti
e p 32. libr. 1. Elem. recto æquales. E quibus, cum [e] & ECH rectum angulum eſſe conſtet, ſequitur, punctum C fore in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propoſitum.

Ergo ſi à dato puncto A in rectam lineam vel directum &c. Quod erat oſtendendum.

III *THEOREMA.*

Si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, datum angulum continentes BAC, datamque inter ſe habentes rationem; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD poſitione datum: continget pariter & C, terminus alterius AC, locum planum, poſitione datum.

Conſtructio 1^{mi} *caſus.*



1^{mus} *caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam rectam BD.*

Primò cadente B in recta linea BD, ſi ex A ſuper ipſam demittatur perpendicularis AD, ac juxta hanc ad punctum A conſtruatur angu-
lus

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

lus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut B A ad A C, ita D A ad AE: Dico punctum C cadere in rectam lineam per E ductam, huic A E perpendicularem.

Demonſtratio 1^{mi} caſus.

Quoniam enim [a] B A ad A C eſt, ſicut D A ad A E; permutando erit [b] B A ad A D, ſicut C A ad AE. Porrò cum æquales ſint anguli B A C & D A E, & iiſdem addito aut ſubtracto communi angulo DAC, angulus quoque BAD ipſi CAE eſt æqualis: erit, junctâ CE, △ B A D ipſi C A E [c] æquiangulum. Eſt autem angulus ad D in △^{lo} B A D [d] rectus. Quare etiam angulus ad E in △^{lo} C A E rectus erit, hoc eſt, juncta C E ipſi A E erit perpendicularis. Quum verò ad E non niſi una recta duci poſſit, quæ ipſi A E perpendicularis exiſtat, manifeſtum eſt, C punctum eandem contingere. Quod erat propoſitum.

a Ex conſtructione.
b p 16. libr. 5. Elem.
c p 6. libr. 6. Elem.
d Ex conſtructione.

Conſtructio 2^{di} caſus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia B D, cujus centrum F, ſi per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, ac juxta hanc ad A punctum conſtituatur angulus D A E æqualis dato B A C; fiatque ut B A ad AC, ita DA ad A E; ac rurſus ut B A ad AC, ita A G ad A H: dico C punctum in circuli circumferentiam cadere, cujus diameter EH.

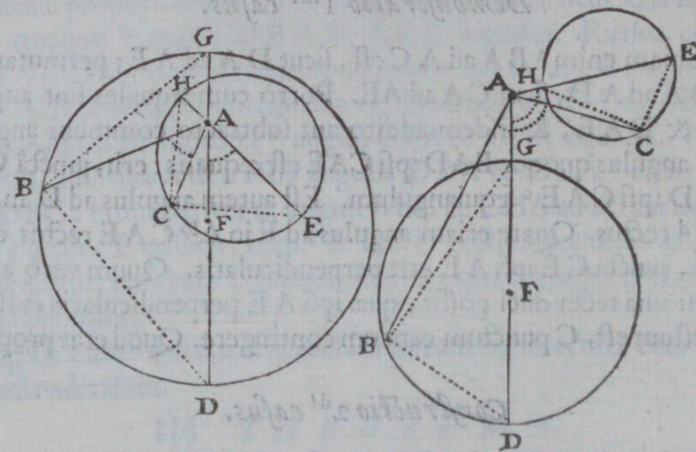
Demonſtratio 2^{di} caſus.

Etenim junctis BD, BG, ut & CE, CH, quoniam [e] B A eſt ad AC, ſicut D A ad AE: permutando erit [f] BA ad AD, ſicut CA ad AE. Porrò cum anguli B A C & D A E [g] ſint æquales, &, iiſdem addito aut ſubtracto communi angulo DAC, angulus item BAD ipſi CAE ſit æqualis: erit pariter [h] & D B A angulus △^{li} B A D angulo ECA trianguli C A E æqualis. Rurſus quia [i] B A eſt ad A C, ſicut A G ad A H: permutando erit [k] B A ad A G, ſicut C A ad A H. Unde cum hæc latera exiſtant △^{lorum} B G A & C H A, quæ ſunt circa æquales angulos B A G, C A H: erunt itidem anguli ABG & ACH in iiſdem △$^{li}{}_{s}$ [l] æquales. Quia autem anguli D B A, A B G additi aut detracti faciunt rectum angulum D B G; at verò anguli E C A, A C H ſimiliter additi aut detracti faciunt angulum E C H: erit pariter E C H rectus

e Ex conſtructione.
f p 16. libr. 5. Elem.
g Ex conſtructione.
h p 6. libr. 6. Elem.
i Ex conſtructione.
k p 16. libr. 5. Elem.
l p 6. libr. 6. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

angulus, ac proinde C punctum in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propoſitum.



2**[dus] **caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam circumferentiam B D.

Ergo ſi à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat oſtendendum.

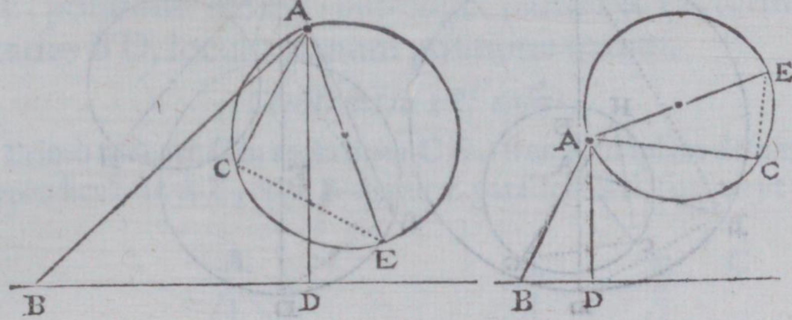
IV *THEOREMA.*

Si à dato puncto A duæ lineæ agantur AB, AC, datum angulum continentes B A C, datumque comprehendentes ſpacium B A C; & B terminus unius A B contingat locum planum B D, poſitione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum, poſitione datum.

Con-

Conſtructio 1^{mi} *caſus.*

Primò cadente B in recta linea B D, ſi ex A ſuper eam demittatur perpendicularis A D, ac juxta hanc ad punctum A conſtituatur angu-



1^{mus} *caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam rectam B D.*

lus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter AE.

Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

Angulo enim D A E per fabricam æquali exiſtente angulo BAC, ſi iis addatur auferaturvé communis angulus C A D: erit quoque angulus CAE ipſi BAD æqualis. Deinde junctâ CE cum latera △^{lorum} BAD & EAC circa hoſce æquales angulos ex conſtructione proportionalia ſint: nimirum, DA ad AB, ſicut CA ad AE: erunt ſimiliter qui ad D & C anguli in iiſdem △^{lis}, per 6 prop. 6^{ti} libr. Elem., æquales. Eſt autem qui ad D in △^{lo} BAD rectus. Quare etiam is, qui ad C, in △^{lo} EAC rectus erit: adeoque punctum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propoſitum.

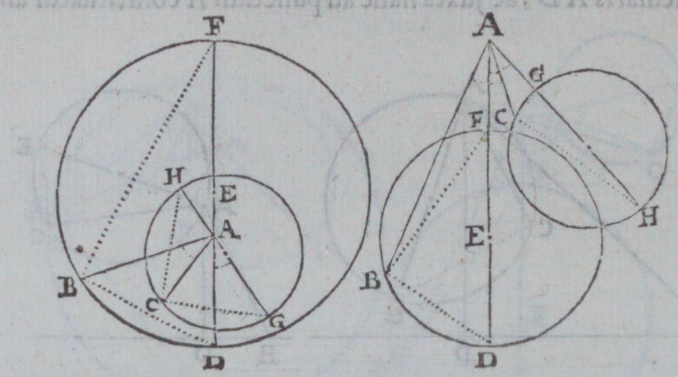
Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia B D, cujus centrum E, ſi per puncta A, E recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & F, ac juxta hanc ad A punctum conſtituatur angulus

 DAG

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

D A G æqualis dato B A C; fiatq́ue ut D A ad A B, ita C A ad AG; ac



2dus caſus, in quo punctum B contingit poſitione datam circumferentiam BD.

rurſus ut F A ad A B, ita C A ad A H: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GH.

Demonſtratio 2di caſus.

Junctis BD, C G, quoniam, ut ſupra, anguli B A D & CAG ſunt æquales, atque circa eos latera in $\triangle^{lis}$ BAD, CAG, per constructionem, proportionalia: videlicet, DA ad AB, ſicut C A ad AG: erunt quoque anguli D B A & A G C in iiſdem $\triangle^{lis}$, per 6 Prop. libr. 6. Elem., æquales. Rurſus, quoniam junctis B F, C H, in $\triangle^{lis}$ BFA & CHA latera, quæ circa æquales angulos BAF, CAH, ex fabrica ſunt proportionalia: nimirum, FA ad AB, ſicut CA ad AH: erunt ſimiliter anguli ABF & CHA in iiſdem $\triangle^{lis}$, per 6.6., æquales. Hinc cum anguli D B A & A B F additi aut detracti rectum efficiant angulum D B F: erunt pariter anguli A G C & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & G C H angulum rectum eſſe, per 32 prop. 1. libr. Elem., conſtet, ſequitur C punctum in circulo fore, cujus diameter eſt GH. Quod erat propoſitum.

Ergo ſi à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat oſtendendum.

V *THEO-*

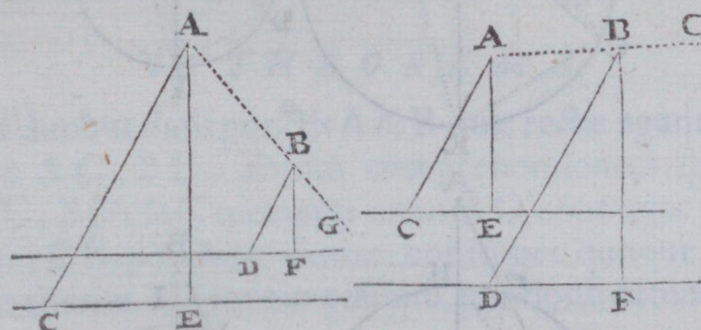
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

V THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ agantur rectæ parallelæ A C, B D, datam inter ſe habentes rationem A C ad B D; & C terminus unius A C contingat locum planum C E, poſitione datum: continget pariter & D, terminus alterius B D, locum planum poſitione datum.

Constructio 1*mi* *caſus.*

Primò cadente C in recta linea C E, ſi ex A in ipſam demittatur perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F, fiatque ut C A



1*mus* *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam rectam C E.*

ad D B, ita A E ad B F: Dico D punctum cadere in rectam lineam, ductam per F ipſi B F perpendicularem.

Demonstratio 1*mi* *caſus.*

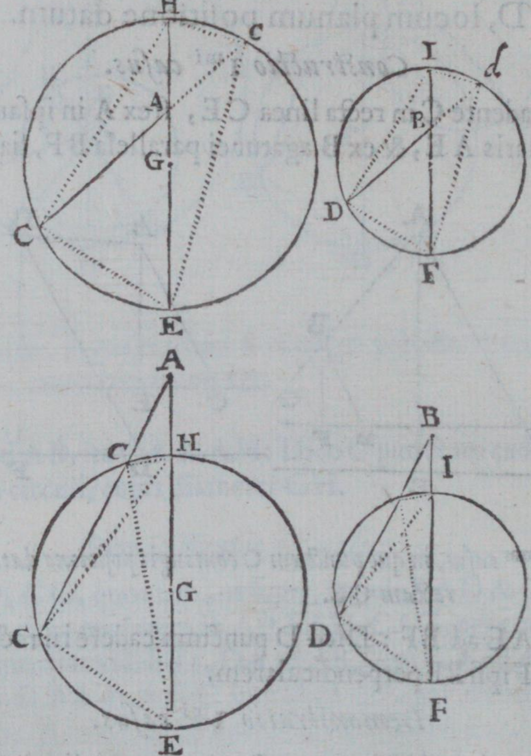
Quoniam enim, ductâ per puncta A, B rectâ lineâ ABG, anguli CAG, DBG, ut & EAG, FBG [a] ſunt æquales, erunt quoque CAE & DBF æquales. Deinde cum [b] CA ad DB ſit, ſicut A E ad BF, permutando erit [c] CA ad A E, ſicut DB ad BF. Hinc, junctâ D F, quoniam △lorum CAE, DBF anguli ad A & B ſunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter [d] ad E & F anguli æquales. Eſt autem qui ad E in △lo C A E rectus. Quare & is, qui ad F in △lo D B F rectus erit; adeoque D F ipſi B F perpendicularis. Unde cum una tantùm recta per F duci poſſit, quæ ipſi B F perpendicularis exiſtat, ſequitur D punctum eandem contingere. Quod erat propoſitum.

a p 29. libr. 1 Elem.
b p Conſtructionem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 2^di^ caſus.

Dein cadente C in circuli circumferentia C E, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H; ductâque per B rectâ BF ipſi AE parallelâ, fiat ut CA



2^dus^ *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam C E.*

ad DB, ita AE ad BF; ac rurſus ut CA ad D B, ita AH ad B I. Poſtea deſcripto circa diametrum F I circulo: Dico punctum D cadere in ipſius circumferentiam.

Demonſtratio 2^di^ caſus.

Etenim junctis C E, *c* H, ut & D F, *d* I, quoniam, ut ſupra, anguli

CAE

CAE & DBF æquales ſunt, & [e] CA ad DB, ut AE ad BF, hoc eſt, permutando [f] CA ad AE, ut DB ad BF: erunt quoque [g] qui ad C & D angulis in $\triangle^{lis}$ CAE & DBF æquales. Porrò cùm [h] CA ad DB ſit, ſicut AH ad BI: permutando erit [i] CA ad AH, ſicut DB ad BI. Unde cum hæc latera exiſtant $\triangle^{lorum}$ CHA & DIB, quæ circa æquales angulos CAH & DBI: erunt quoque [k] illi qui ad C & D anguli in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Quoniam autem anguli ECA & ACH additi aut detracti efficiunt rectum ECH; & anguli FDB & BDI ſimiliter additi aut detracti faciunt angulum FDI: patet angulum FDI quoque rectum fore. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propoſitum.

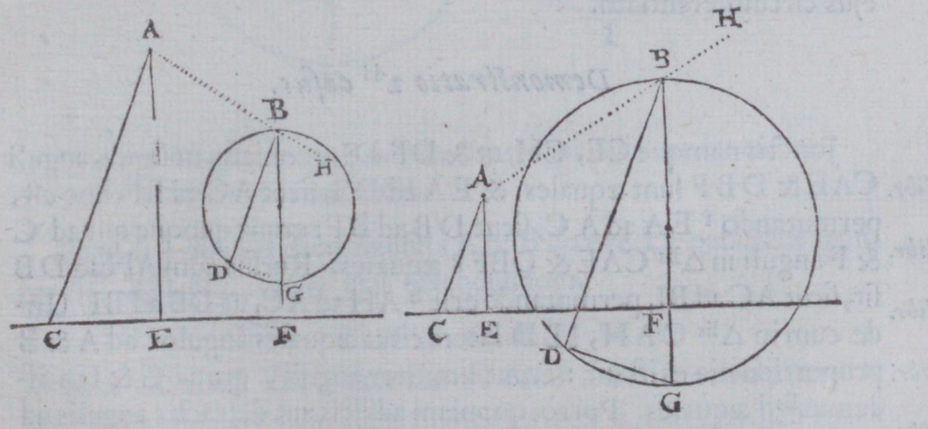
e ꝑ Conſtructionem.
f ꝑ 16. libr. 5. Elem.
g ꝑ 6. libr. 6. Elem.
h ꝑ Conſtructionem.
i ꝑ 16. libr. 5. Elem.
k ꝑ 6. libr. 6. Elem.

Ergo ſi à duobus datis punctis A & B, &c. Quod erat oſtendendum.

VI *THEOREMA.*

Si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ agantur parallelæ AC, BD, datum comprehendentes ſpacium ▭ AC, BD; & C terminus unius AC contingat locum planum CE, poſitione datum: continget quoque D terminus alterius BD locum planum, poſitione datum.

Conſtructio I^{mi} *caſus.*



I^{mus} *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam rectam CE.*

Primò cadente C in linea recta CE, ſi ex A in ipſam demittatur per-

perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F; fiatque ut EA ad D B, ita A C ad B G : Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter eſt BG.

Demonſtratio 1^mi^ *caſus.*

Ductâ enim per puncta A, B rectâ A B H, quoniam anguli CAH, DBH, ut & E A H, FBH [a] æquales ſunt: erunt quoque anguli CAE, DBG æquales. Deinde cum [b] EA ad D B ſit, ſicut A C ad BG, permutando erit [c] EA ad AC, ſicut DB ad BG. Hinc junctâ DG, quoniam $\triangle^{lorum}$ C A E, D B G anguli ad A & B ſunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter anguli ad E & D [d] æquales. Eſt autem qui ad E in $\triangle^{lo}$ C A E [e] rectus. Quare & is, qui ad D in $\triangle^{lo}$ D B G rectus erit; adeoque D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propoſitum.

a ꝑ 29. libr. 1. Elem. b ꝑ Conſtructionem. c ꝑ 16. libr. 5. Elem. d ꝑ 6. libr. 6. Elem. e ꝑ Conſtructionem.

Conſtructio 2^di^ *caſus.*

Deinde cadente C in circuli circumferentia CE, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H: ductâque per B rectâ B F ipſi AE parallelâ, fiat ut EA ad DB, ita AC ad BF; ac rurſus ut AH ad DB, ita AC ad BI. Poſtea deſcripto circa diametrum F I circulo, dico punctum D cadere in ejus circumferentiam.

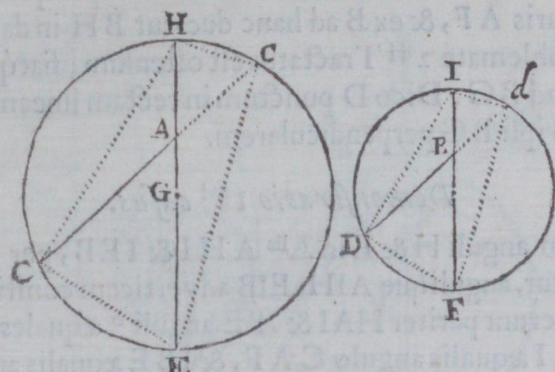
Demonſtratio 2^di^ *caſus.*

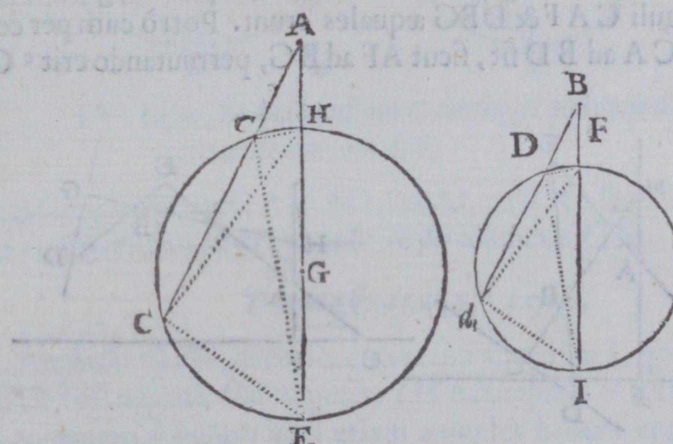
Junctis namque CE, CH, ut & DF, DI, quoniam, ut ſupra, anguli CAE & D B F ſunt æquales, & E A ad DB, ſicut AC ad BF, hoc eſt, permutando [f] E A ad A C, ſicut D B ad B F: erunt quoque qui ad C & F anguli in $\triangle^{lis}$ CAE & DBF [g] æquales. Rurſus cum AH ad D B ſit, ſicut AC ad BI, permutando erit [h] AH ad AC, ut DB ad BI. Unde cum in $\triangle^{lis}$ C A H, IBD latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia exiſtant : erunt ſimiliter anguli, qui ad C & I in iiſdem $\triangle^{lis}$ [i] æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis ad C, hoc eſt, E C A & A C H, ex iis [k] fit rectus ECH : erunt pariter & anguli ad F & I, hoc eſt, B F D & D I B, additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & F D I [l] rectum angulum eſſe conſtet : ſequi-

f ꝑ 16. libr. 5. Elem. g ꝑ 6. libr. 6. Elem. h ꝑ 16. libr. 5. Elem. i ꝑ 6. libr. 5. Elem. k ꝑ 31. libr. 3. Elem. l ꝑ 32. libr. 1. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quitur D punctum fore in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propoſitum.





2dus caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam C E.

Ergo ſi à duobus datis punctis A & B duæ rectæ parallelæ agantur AC, BD, &c. Quod erat oſtendendum.

VII *THEOREMA.*

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datam'que inter ſe habentes rationem, & C terminus unius AC contingat locum planum CF, poſitione datum: continget pariter & D terminus alterius BD locum planum, poſitione datum.

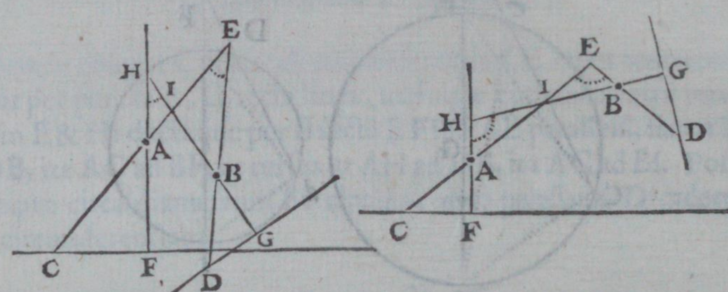
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 1^{mi} *caſus.*

Primò cadente C in recta linea CF, ſi ex A ſuper ipſam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc ducatur B H in dato angulo E, ſicut 7mo Problemate 2^{di} Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut C A ad BD, ita A F ad B G: Dico D punctum in rectam lineam cadere, ductam per G ipſi B G perpendicularem.

Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

Cum enim anguli H & E in △^{lis} A H I & I E B, per conſtructio-
a p 15. libr. 1. Elem. nem, æquentur, anguliqve AIH, EIB ad verticem conſtituti [a] æquales exiſtant: erunt pariter HAI & IBE anguli [b] æquales. Eſt autem
b p 32. libr. 1. Elem. angulus H A I æqualis angulo C A F, & I B E æqualis angulo DBG.
c p 16. libr. 5. Elem. Quare & anguli C A F & DBG æquales erunt. Porrò cum per conſtructionem C A ad B D ſit, ſicut AF ad B G, permutando erit [c] CA



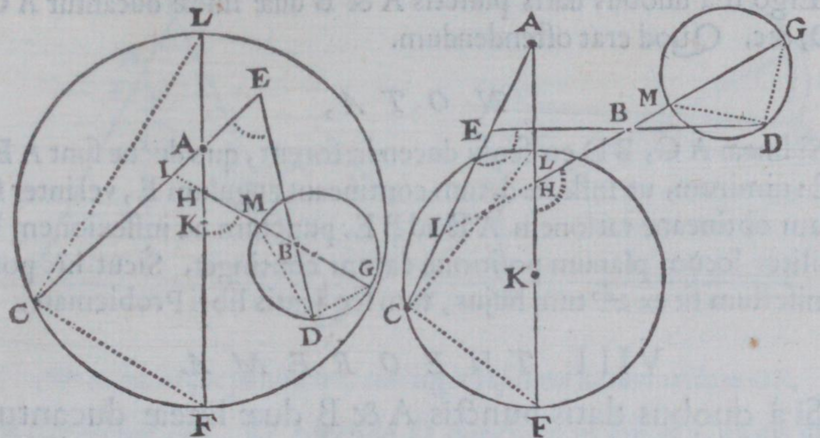
1^{mus} *caſus, in quo punctum* C *contingit poſitione datam rectam* CF.

ad A F, ſicut D B ad B G. Hinc, junctâ D G, quoniam △^{lorum} CAF, D B G latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia ſunt,
d p 6. libr. 6. Elem. erunt pariter & qui ad F & G anguli [d] in iiſdem △^{lis} æquales. Eſt autem angulus ad F in △^{lo} C A F, per conſtructionem, rectus. Quocirca & is, qui ad G in △^{lo} D B G, rectus erit. Adeoque, cum ad G ipſi B G unam ſolummodo perpendicularem ducere obtingat, patet eandem à D puncto contingi. Quod erat propoſitum,

Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Dein cadente C in circuli circumferentia, cujus centrum K; ſi per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in

in F & L, & ex B ad hanc ducatur BH in dato angulo E, ſicut 7mo Problemate 2^{di} Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut C A ad B D, ita A F



2^{dus} caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam C F.

ad B G; ac rurſus ut C A ad BD, ita AL ad BM: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter G M.

Demonſtratio 2^{di} caſus.

Productâ GBH, donec occurrat ipſi C A E in I, quoniam angulus FHB [e] eſt æqualis ſibi oppoſito I H A, ſicque $\triangle^{la}$ IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos I H A & IEB: erit pariter & 3^{tius} IAH æqualis 3^{tio} IBE, hoc eſt, DBG [f]. Porrò, junctis C F, D G, quoniam per conſtructionem C A eſt ad B D, ſicut A F ad B G: permutando erit [g] C A ad A F, ſicut D B ad B G. Unde cum $\triangle^{lorum}$ CAF & DBG anguli ad A & B æquales ſint oſtenſi, lateraque circa eos proportionalia: erunt ſimiliter [h] qui ad C & D anguli in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Eodem modo, junctis CL, DM, quoniam per conſtructionem C A eſt ad B D, ſicut A L ad B M, permutando erit CA ad AL, ſicut D B ad B M. Unde cum $\triangle^{lorum}$ C L A & DMB anguli ad A & B æquales ſint, lateraque circa eos proportionalia: erunt itidem qui ad C & D anguli in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Quia autem ad C anguli, hoc eſt, F C A & A C L additi aut detracti faciunt rectum angulum F C L; angulique ad D, hoc eſt, G D B & B D M

e ꝑ 15. libr. 1. Elem.
f ꝑ 32. & 15. lib. 1. Elem.
g ꝑ 16. libr. 5. Elem.
h ꝑ 6. libr. 6. Elem.

 ſimi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſimiliter additi aut detracti faciunt angulum G D M: erit pariter GDM angulus rectus. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propoſitum.

Ergo ſi à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur A C, BD, &c. Quod erat oſtendendum.

NOTA,

Si lineæ A C, B D eo ſenſu ducendæ forent, quo ductæ ſunt A E, B E: nimirum, ut inflexæ datum contineant angulum E, vel inter ſe datam obtineant rationem A E ad B E: punctum ad inflexionem E ſimiliter locum planum poſitione datum continget. Sicut hîc poſt manifeſtum fit ex 2do tum hujus, tum ſequentis libri Problemate.

VIII *THEOREMA*.

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datumq́ue comprehendentes ſpacium ▭ A C, B D; & C terminus unius AC contingat locum planum CF poſitione datum: & alterius quoque B D terminus D locum planum poſitione datum continget.

Conſtructio 1^{mi} *caſus*.

Primò cadente C in recta linea CF, ſi ex A ſuper ipſam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc agatur B H in dato angulo E, ſicut 7mo Problemate 2^{di} Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut A F ad B D, ita A C ad B G: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter B G.

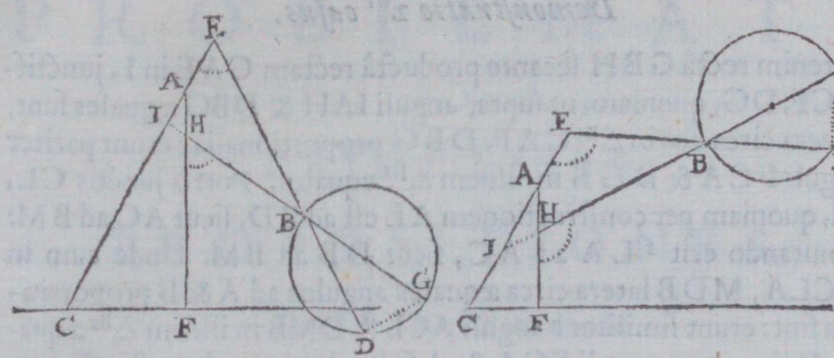
Demonſtratio 1^{mi} *caſus*.

Producta G B H, donec occurrat ipſi C A E in I, quoniam angulus FHB [a] æqualis eſt ſibi oppoſito I H A, ſicque $\triangle^{la}$ IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos I H A & I E B: erit pariter & 3^{tius} angulus I A H æqualis 3^{tio} I B E, hoc eſt, D B G [b]. Porrò, junctâ D G, quoniam per conſtructionem A F eſt ad BD, ſicut A C ad BG: permutando erit [c] FA ad A C, ſicut DB ad B D. Unde cum $\triangle^{lorum}$ C A F, D B G anguli ad A & B æquales ſint oſtenſi, & latera circa eos proportionalia: erunt ſimiliter [d] qui ad F & D

a p 15. libr. 1. Elem.
b p 32. & 15. libr. 1. Elem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

& D anguli in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Eſt autem angulus ad F in $\triangle^{lo}$ CAF per conſtructionem rectus. Quare & is, qui ad D in $\triangle^{lo}$

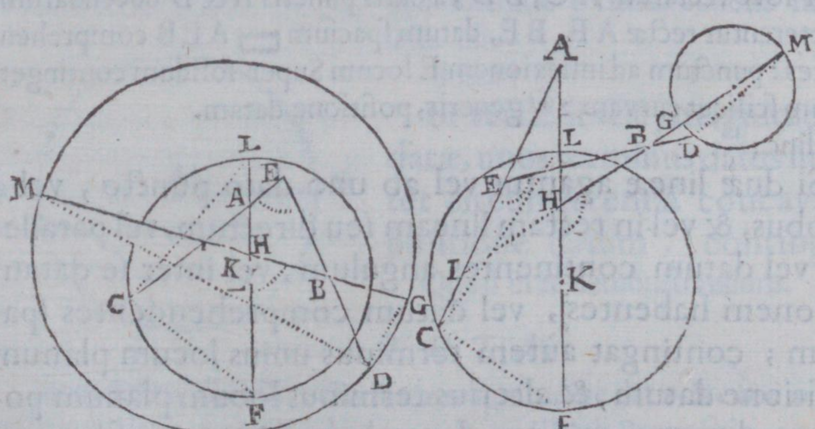


1^mus *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam rectam CF.*

DBG, rectus erit. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propoſitum.

Constructio 2^di caſus.

Dein cadente C in circuli circumferentia CF, cujus centrum K, ſi per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^dus *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam CF.*

nata in F & L, & ex B ad hanc in dato angulo E ducatur BH, ſicut 7mo Problemate 2^di Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut AF ad BD,

ita AC ad BG; ac rurſus ut AL ad B D, ita AC ad BM: Dico D punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GM.

Demonſtratio 2^{di} caſus.

Etenim rectâ G B H ſecante productâ rectam C A E in I, junctiſque CF, DG, quoniam, ut ſupra, anguli IAH & DBG æquales ſunt, & latera circa eos in $\triangle^{lis}$ C A F, D B G proportionalia: erunt pariter [e] anguli F C A & D G B in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Porrò junctis CL, DM, quoniam per conſtructionem A L eſt ad B D, ſicut AC ad B M: permutando erit [f] L A ad A C, ſicut D B ad B M. Unde cum in $\triangle^{lis}$ CLA, MDB latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia ſint: erunt ſimiliter [g] anguli ACL & DMB in iiſdem $\triangle^{lis}$ æquales. Quia autem anguli F C A & A C L additi aut detracti efficiunt rectum angulum F C L [h]: erunt pariter anguli D G B & DMB additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum [i] & G D M rectum angulum eſſe conſtet, ſequitur, D punctum fore in circulo, cujus diameter G M. Quod erat propoſitum.

e p 6. libr. 6. Elem.
f p 16. lib. 5. Elem.
g p 6 libr. 6. Elem.
h p 31. libr. 3. Elem.
i p 32. libr. 1. Elem.

Ergo ſi à duobus punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, &c. Quod erat oſtendendum.

N O T A,

Si loco rectarum A C, B D, à datis punctis A & B ducendarum, expeterentur rectæ A E, B E, datum ſpacium ▭ A E B comprehendentes: punctum ad inflexionem E locum Super-ſolidum continget, lineam ſcilicet curvam 2^{di} generis, poſitione datam.

Hinc:

Concluſio $1^{mæ}$ Propoſitionis.

Si duæ lineæ agantur vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam ſeu directum, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter ſe datam rationem habentes, vel datum comprehendentes ſpacium; contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, & alterius terminus locum planum poſitione datum continget. Interdum quidem ejuſdem generis, interdum verò diverſum, & interdum ſimiliter poſitum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

Pro diverſa ſcilicet datorum ſive ſubiectorum conſideratione. Quod erat demonſtrandum.

SE-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SEQVVNTVR
PROBLEMATA
IN
PRIMI LIBRI
PROPOSITIONES.

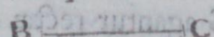
In 2^{dam} Propoſitionem

I *PROBLEMA.*

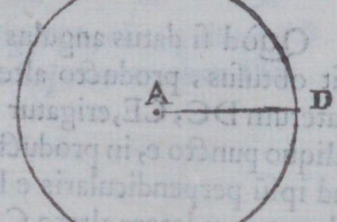
E dato puncto A rectam lineam ducere AD, datæ rectæ BC æqualem.

Conſtructio.

Ex A, tanquam centro, intervallo BC deſcribatur circulus; & ex A ad quodlibet in circumferentia punctum D agatur recta AD.



Dico AD æqualem eſſe BC. Cujus demonſtratio è conſtructione manifeſta eſt.



Hinc:

Si rectæ lineæ, magnitudine datæ, unus terminus datus ſit, alter circumferentiã concavam, poſitione datam, continget. *Concluſio 2dæ Propoſitionis.*

Quod erat demonſtrandum.

NOTA,

In concluſione dici: Si rectæ lineæ magnitudine datæ, &c. *non autem*, poſitione datæ, &c. Quod ipſum vult Apollonii Propoſitio, quæ intelligi nequit, niſi linea ſimul magnitudine data ſit. Dato autem rectæ alicujus, poſitione & magnitudine datæ, termino uno, alter quoque datus eſſe intelligitur, per 27 Datorum Euclidis. Eo ipſo tamen non dicimus, alterum hujus lineæ terminum indifferenter ad quodcunque in circumferentia punctum cadere, eo ſenſu, quem

omnes

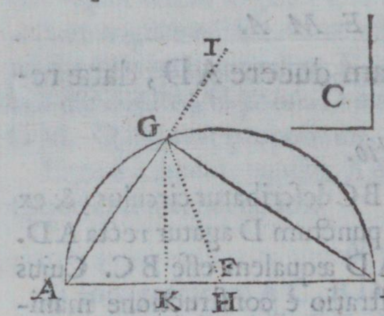
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

omnes Apollonii Propoſitiones hujus Tractatus præ ſe ferunt, ſed in unum duntaxat locum determinatum, ad quem inveniendum nullâ circuli deſcriptione opùs eſt. Immutavimus igitur has voculas, ſcribarum ignorantiâ & negligentiâ procul dubio illapſas; prout hanc licentiam, eandem ob cauſam in concluſione plurium aliarum Propoſitionum hîc ſequentium nobis ſumpſimus.

In 3tiam Propoſitionem,

II *PROBLEMA.*

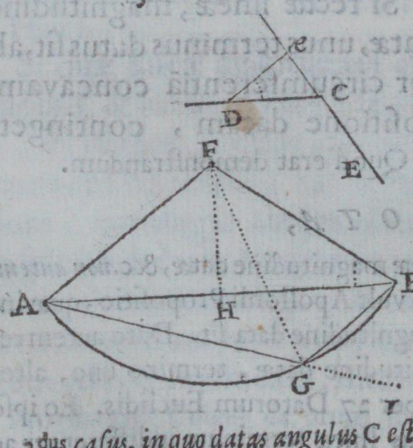
A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A G, B G, continentes angulum AGB, dato angulo C æqualem.



1mus *caſus, in quo datus angulus* C *eſt rectus.*

Conſtructio.

Primò. Si datus angulus C eſt rectus, ducta AB ſecetur bifariam in F, deſcriptoque ex F intervallo A F vel FB ſuper A B ſemicirculo AGB: Dico, ſi ex punctis A, B ad quodlibet in circumferentia punctum G agantur rectæ AG, BG, angulum AGB æqualem eſſe dato C.



2dus *caſus, in quo datas angulus* C *eſt obtuſus.*

Quòd ſi datus angulus C ſit obtuſus, producto altero laterum DC, CE, erigatur ex aliquo puncto e, in producto, ad ipſũ perpendicularis e D, donec cum latere altero CD concurrat in D, & ad A & B anguli B A F & ABF æquales conſtituantur angulo C D e. Tunc deſcripto ex F, ubi lineæ æquales angulos comprehendentes concurrunt, circuli ſegmento A G B, intervallo F A vel F B, ad alteram

ram partem lineæ AB : Dico, ſi ex punctis A, B ad quodcunque in circumferentia punctum G agantur AG, BG, angulum AGB æqualem eſſe dato DCE.

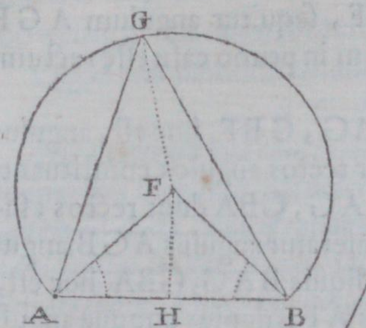
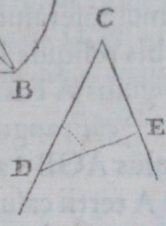


Figura A, ubi angulus AGB cadit ſupra angulum AFB.



Denique, ſi datus angulus C ſit acutus, agatur è quolibet puncto E, in altero laterum DC, CE, ad ipſum perpendicularis ED; occurrens lateri DC in D. Tum ad AB conſtitutis angulis BAF & ABF, angulo EDC, (ut ſupra) æqualibus, deſcriptoq́ue ex F ſuper AB, intervallo AF vel FB, ad eandemq́ue partem, circuli ſegmento AGB: Dico rurſus, ductis ex A & B ad quodvis in circumferētia punctū G rectis AG, BG, angulum AGB æqualem eſſe dato C. *Figuræ 3tii caſus, in quo datus angulus C eſt acutus.*

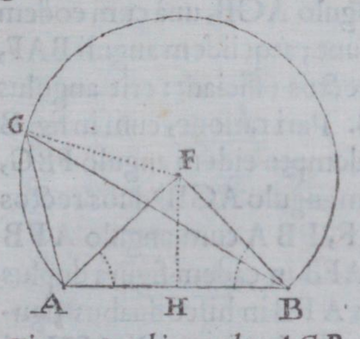


Figura B, ubi angulus AGB cadit juxta angulum AFB.

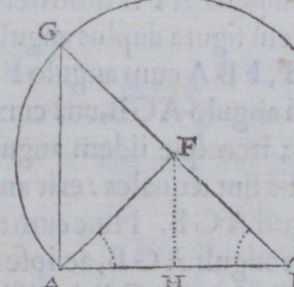


Figura C, ubi punctum G cadit in altera linearum productarum AF, FB.

Demonſtratio.

Jungatur enim FG, & ex F in AB demittatur perpendicularis FH. Deinde in 1mo & 2do caſu producatur AG ad I.

Quoniam itaque latera AF, FG △li AFG inter ſe æqualia ſunt, erunt quoque [a] anguli AGF, FAG æquales. Eodem modo, cum latera BF, FG △li BFG ſint æqualia, erunt etiam anguli BGF, FBG æquales. Ideoq́ue in 1mo & 2do caſu, ut & in figura A tertii caſus, angulus AGB æqualis erit angulis FAG, FBG ſimul ſumptis. At in

a p 5. libr. 1. Elem.

figura

figura B angulus A G B erit æqualis angulo F A G, ſubtracto eidem angulo FBG.

b p 32. libr. 1. Elem.

Siquidem igitur in 1mo caſu [b] angulus externus B G I itidem eſt æqualis duobus angulis F A G & G B F, ſequitur angulum A G B æqualem eſſe angulo BGI, adeoq́ue illum in primo caſu eſſe rectum, datoq́ue angulo C æqualem.

c p 32. lib. 1. Elem.

Porrò cum in 2do caſu bini anguli F A G, G B F, hoc eſt, angulus AGB cum binis AGB, B F A [c] quatuor rectos angulos conſtituant; atque etiam angulus A G B cum binis B A G, GBA duos rectos efficiant: ſequitur, ſi illîc bis & hîc ſemel auferatur angulus A G B, angulum reliquum B F A æqualem eſſe bis reliquis B A G, GBA, hoc eſt, [d] duplo anguli BGI. Eſt autem angulus A F B duplus quoque anguli A F H vel D C e [e]. Quocirca in 2do caſu angulus B G I erit æqualis angulo D C e, & conſequenter angulus AGB [f] æqualis angulo DCE.

d p 32. libr. 1. Elem.

e p Conſtr. & 32. libr. 1. Elem.

f p 13. libr. 1. Elem.

g p 32. libr. 1. Elem.

Eodem modo, quoniam in fig. A tertii caſus anguli B A F, F B A cum angulis FAG, GBF, hoc eſt, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [g] duos rectos angulos efficiunt; atq; iidem anguli BAF, F B A cum angulo A F B ſimiliter duos rectos efficiant: erit angulus AFB in eadem figura duplus anguli AGB. Pari ratione, cum in fig. B anguli B A F, F B A cum angulo F A G, dempto eidem angulo FBG, hoc eſt, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [h] duos rectos conſtituant; itemq́ue iidem anguli B A F, F B A cum angulo A F B duobus rectis ſint æquales: erit angulus AFB in eadem figura duplus quoque anguli A G B. Hinc cum angulus A F B in hiſce duabus figuris duplus ſit anguli A G B, ac ipſe quoque duplus ſit anguli AFH vel C: patet angulum A G B in iiſdem figuris eſſe æqualem dato angulo C.

h p 32. libr. 1. Elem.

i p 32. libr. 1. Elem.

Denique cum in fig. C [i] angulus externus AFB æqualis ſit duobus internis oppoſitis & æqualibus angulis A G F, F A G, iſque ideo duplus ſit anguli AGF ſeu A G B; ſimulq́ue AFB duplus ſit anguli AFH vel C: manifeſtum eſt, angulum A G B in eadem figura æqualem eſſe dato angulo C.

A datis ergo duobus punctis A & B duas rectas lineas infleximus AG, BG, angulum efficientes AGB, dato angulo C æqualem. Quod erat faciendum.

E quibus liquet, cum in genere ſit oſtenſum, lineas A G, B G, ex A & B ad quodcunque punctum G in circumferentia AGB eductas, angulum conſtituere AGB dato angulo C æqualem:

Quòd,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

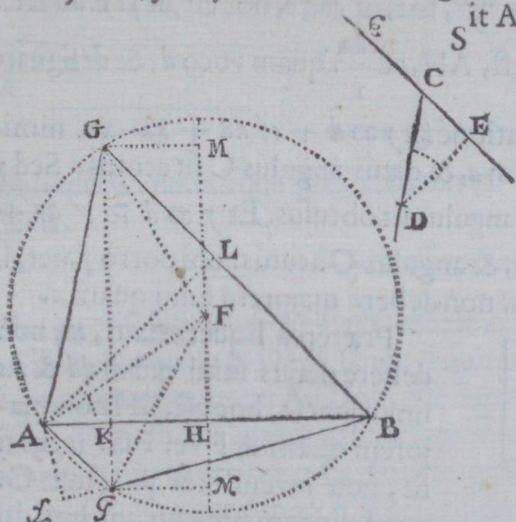
Quòd,

Si à duobus punctis datis duæ rectæ lineæ inflectantur, datum angulum continentes, commune ipſorum punctū contingat circumferentiam concavam, poſitione datam. *Concluſio 3tiæ Propoſitionis.*

Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

Hoc Problema unà cum præcedente aliter ab Euclide demonſtratum eſt in Geometriæ Elementis, uti videre eſt Prop. 32 tertii, & 2da primi. Quoniam autem ex allata demonſtratione aliarum inſignium Propoſitionum Euclidearum veritas conſtat, ut 20, 21, & 31 tertii: operæ pretium nos facturos arbitrati ſumus, ſi majoris exercitationis gratiâ operationem hîc adjiceremus.



Sit AH ∞ HB ∞ a

CE ∞ b

ED ∞ c

KH ∞ x, ergo KB ∞ $a+x$

KG ∞ y.

$$\begin{array}{r} a+x \\ \underline{a+x} \\ +ax+xx \\ \underline{aa+ax} \end{array}$$

add. $\left\{\begin{array}{ll} \square\ \text{KB.} & aa+2ax+xx \\ \square\ \text{KG.} & yy \end{array}\right.$

ſumma, ſeu $\square$ GB. $aa+2ax+xx+yy$

GB. $\sqrt{aa+2ax+xx+yy}$.

Pro qua radice ſcribatur brevitatis causâ z, & pro $aa+2ax+xx+yy$ ſcribatur zz.

Tum fiat propter ſimilitudinem $\triangle$rum KGB, ABL

$$\begin{array}{ll} \text{GB} & \text{BA} \\ z \text{------} & 2a \end{array} \left\{\begin{array}{l} \text{KG.}\ y \\ \text{KB.}\ a+x \end{array}\right\} \text{ad} \left\{\begin{array}{l} \text{AL.}\ \frac{2ay}{z} \\ \text{BL.}\ \frac{2aa+2ax}{z} \end{array}\right.$$

quâ ſubtractâ ex GB, z, relinquitur LG $\frac{zz-2aa-2ax}{z}$.

Rurſus cum propter ſimilitudinem $\triangle$rum DCE, AGL proportionales ſint,

$$\begin{array}{cccc} \text{DE} & \text{EC} & \text{AL} & \text{LG} \\ c & b & \frac{2ay}{z} & \frac{zz-2aa-2ax}{z} \end{array}$$

: erit productum ſub extremis DE, LG, [a] æquale producto ſub mediis EC, AL, *a p 16. libr. 6. Elem.*

 hoc

hoc eſt, $\frac{czz-2caa-2cax}{z} \infty \frac{2bay}{z}$

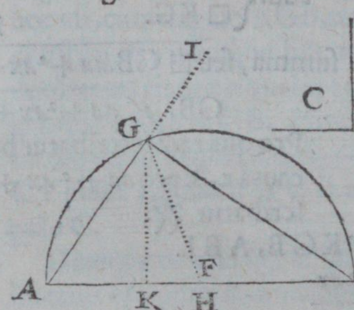
vel $\overline{czz-2caa-2cax \infty 2bay}$

Dividatur utrinque
per c, fit $zz-2aa-2ax \infty \frac{2bay}{c}$

Unde reſtituendo
valorem ipſius zz, erit $aa+2ax+xx+yy,-2aa-2ax$, hoc eſt,
$--aa+xx+yy \infty \frac{2ba}{c}y$, vel in debita forma: $yy \infty \frac{2ba}{c}y \begin{matrix} +aa \\ -xx. \end{matrix}$

Ad tollendam fractionem $\frac{2ba}{c}$, fiat, ut c ad b, hoc eſt, ut DE ad EC, ita $2a$ ad $\frac{2ba}{c}$, vel ita a, hoc eſt, AH, ad $\frac{ba}{c}$. quam voco d, & deſignare ſuppono lineam HF. Quâ ratione fit $y \infty d + \sqrt{dd+aa--xx}$. nimirum, ſi x minor ſumatur quàm a, & datus angulus C ſit acutus. Sed $y \infty --d + \sqrt{dd+aa-xx}$, ſi angulus ſit obtuſus. Et $y \infty d \pm \sqrt{dd+aa--xx}$, ſi x ſit major quàm a, & angulus C acutus. ubi porrò patet, ſi datus angulus C ſit obtuſus, x non debere majorem ſumi quàm a.

$\pm$ deſignat + vel --



Præterea liquet etiam, xx non debere majus ſumi quàm dd & aa ſimul juncta, hoc eſt, KH non majorem quàm AF vel FG. ſecus ſi ſit, non inveniretur punctum G. quod quidem hîc, uti apparet, in circuli peripheriam cadit, cujus centrum eſt F, & radius AF.

Denique ſi datus angulus C eſt rectus, quoniam eo caſu CE æqualis b eſt æqualis o: erit æquatio $yy \infty aa-xx$, hoc eſt, $y \infty \sqrt{aa-xx}$. Oſtendens punctum G repertum iri in circumferentiam ſemicirculi, cujus diameter ſit AB, & centrum H. Quo caſu x ſemper minor erit quàm a.

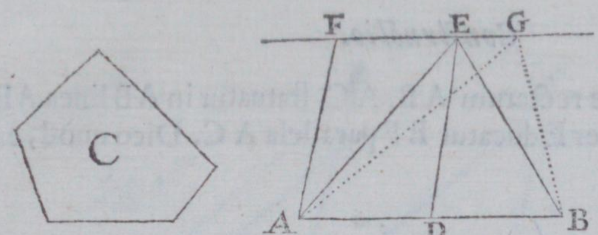
In

In 4^{tam} Propoſitionem.

III *PROBLEMA.*

Super data recta AB triangulum deſcribere AEB, dato rectilineo C æquale.

Conſtructio.



Secetur AB bifariam in D, & ſuper AD in quovis angulo conſtituatur juxta 45 Prop. 1^{mi} libri Elem. parallelogrammum ADEF, æquale dato rectilineo C: junctiſque AE, EB, erit $\triangle^{lum}$ AEB dato rectilineo C æquale.

Demonſtratio.

Per 34. 1^{mi} Elem. $\triangle$ AFE eſt æquale $\triangle^{lo}$ AED, & per 38 ejuſdem $\triangle$ AED eſt æquale $\triangle$ DEB. Unde ſequitur bina $\triangle^{la}$ AFE AED, hoc eſt, parallelogrammum ADEF, eſſe æquale binis $\triangle^{lis}$ AED, DEB, id eſt, $\triangle^{lo}$ AEB. Eſt autem parallelogrammum ADEF per conſtructionem æquale rectilineo C. Æquale igitur etiam eſt $\triangle$ AEB ipſi rectilineo C: adeoque ſuper AB deſcriptum $\triangle$ AEB, dato rectilineo C æquale. Quod erat faciendum.

Porrò, quoniam per 37. 1^{mi} Elem. omnia $\triangle^{la}$, ut AEB, AGB, ſuper eadem baſi AB, & inter eandem parallelam FEG conſtituta, æqualia ſunt: patet, ſi ex duobus terminis lineæ AB ad quodcunque in linea FEG punctum G ducantur rectæ AG, BG, ipſas conſtituere $\triangle$ AGB, dato rectilineo C æquale.

Si ergo trianguli ſpacii magnitudine dati, baſis poſitione & magnitudine data ſit: vertex ipſius continget rectam lineam, poſitione datam. *Concluſio $4^{tæ}$ Propoſitionis.*

Quod erat demonſtrandum.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

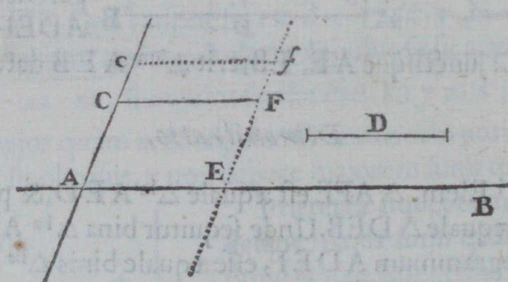
In 5^{tam} Propoſitionem.

IV PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis lineis AB, AC, ad unam AC rectam lineam ducere CF, datæ rectæ D æqualem, & alteri AB parallelam.

Conſtructio.

Ex A, interſectione rectarum AB, AC, ſtatuatur in AB linea AE æqualis datæ D, & per E ducatur EF parallela AC. Dico quòd, ex



puncto quolibet C in linea AC ducta CF parallela AB, donec attingat lineam EF, ipſa CF ſit quæſita. Cujus Demonſtratio ex 34. 1^{mi} Elem. eſt manifeſta.

Concluſio 5^{tæ} Propoſitionis. Si ergo rectæ lineæ, magnitudine datæ, & cuipiam poſitione datæ æquidiſtantis, unus terminus contingat rectam lineam, poſitione datam: & alter terminus rectam lineam, poſitione datam, continget.

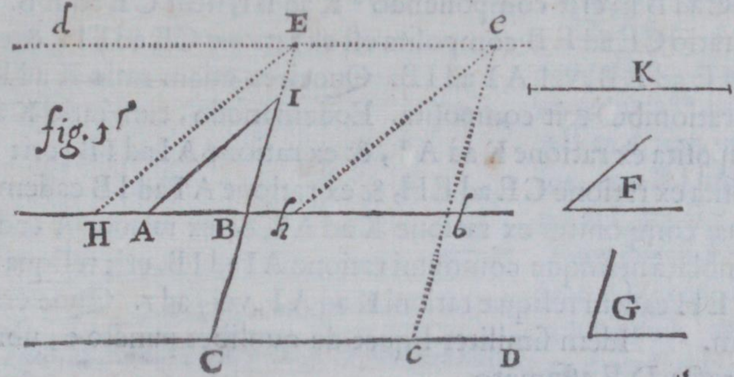
Quod erat demonſtrandum.

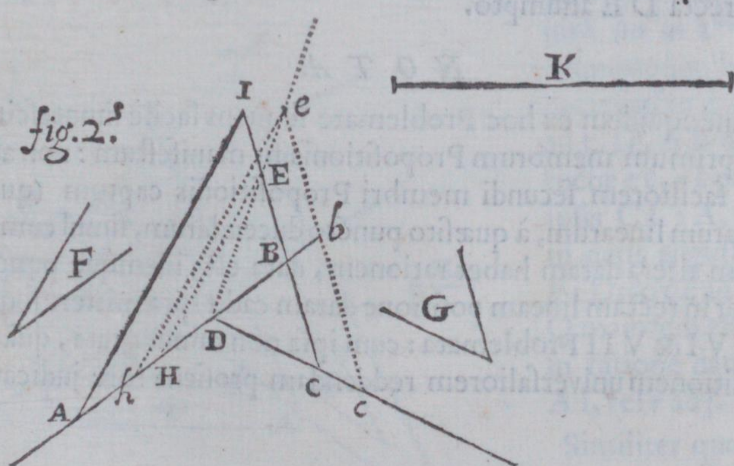
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

In 6^tam Propoſitionem.

V PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD; invenire extra ipſas punctum E, à quo ad poſitione datas AB, CD eductæ duæ rectæ EH, EC in datis angulis F, G ſint ad ſe invicem in ratione data *r* ad *ſ*.





Ponamus angulos B A I, D C B eſſe æquales datis angulis F, G; itemque lineas AI, CB (ubicunque ad AB, CD ductas) concurrere in I. Deinde ſit AI ad K, ſicut *r* ad *ſ*.

Con-

Conſtructio.

Fiat, ut exceſſus, quo K ſuperat B I, ad B I, ita B C ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ A B vel C D (ut in 1ma figura), vel ductâ ex D per E rectâ (ut in 2da fig.): ſi ab aliquo in ea puncto *e* ad A B, C D ducantur rectæ *e h*, *e c* parallelæ A I, I C, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit *h e* ad *e c*, ſicut A I ad K, vel *r* ad *ſ*.

Demonſtratio.

a p 18. libr. 5. Elem. Cum, per conſtructionem, exceſſus, quo K ſuperat B I, ſit ad B I, ſicut B C ad B E; erit componendo [a] K ad B I, ſicut C E ad E B. Jam autem ratio C E ad E B compoſita eſt ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad B I ex iiſdem rationibus erit compoſita. Eodem modo, cum ratio K ad B I ſit compoſita ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio compoſita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B. Unde ſublatâ utrinque communi ratione A I ad I B, erit reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, vel *ſ* ad *r*. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto e, ubicunque in recta D E aſſumpto.

N O T A.

Quandoquidem ex hoc Problemate ſequens facilè innoteſcit, ex eoque primum membrum Propoſitionis ſit manifeſtum: non abs re erit ad faciliorem ſecundi membri Propoſitionis captum (quando una duarum linearum, à quæſito puncto ducendarum, ſimul cum illa, ad quam altera datam habet rationem, data eſt, idemque punctum ſimiliter in rectam lineam poſitione datam cadit) præmittere ſequentia duo VI & VII Problemata: cum ipſa non minus grata, quàm ad Propoſitionem univerſaliorem reddendam proficua fore judicaverimus.

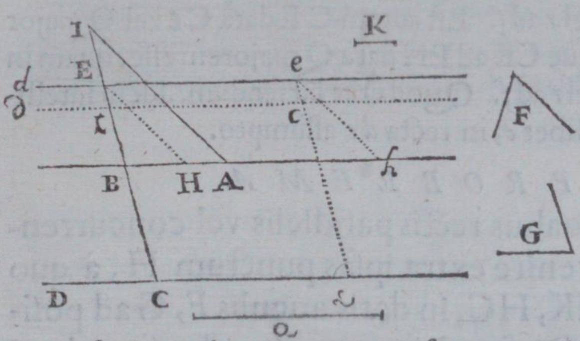
VI PRO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

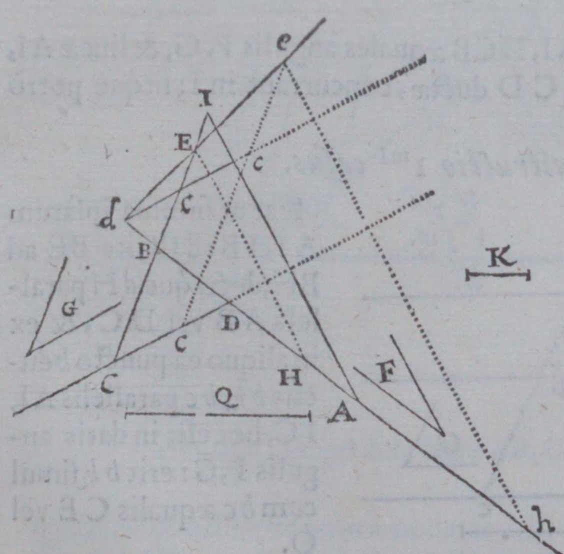
VI *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipſas punctum E, à quo in datis angulis F, G eductis duabus rectis E C, E H ad poſitione datas A B, C D, altera E C ad alteram E H datâ lineâ Q ſit major quàm in ratione data *r* ad *ſ*.

Sint (ut ante) anguli B A I, D C B æquales angulis F, G, & lineæ A I, C B, ubicunque ad A B, C B ductæ, concurrant in I. Deinde ſit C c æqualis Q, & K ad A I, ut *r* ad *ſ*.



1mus *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD ſunt parallelæ.*



2dus *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

Conſtructio.

Ductâ ex c rectâ c *d* parallelâ DC, occurrente in 2do caſu cum AB in *d*, fiat, ut exceſſus, quo B I ſuperat K, ad B I, ita B c ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ AB vel C D (ut in 1mo caſu), aut ductâ ex *d* per E rectâ indefinitâ (ut in 2do caſu), aſſumptoque in ea aliquo puncto e, à quo, ſi ad C D, A B ducantur rectæ e c, e *h* parallelæ ipſis C I, I A, hoc eſt, in datis angulis G & F: Dico c e ad e *h* datâ Q majorem eſſe, quàm in ratione data K ad A I, vel *r* ad *ſ*.

Similiter quoque invenitur punctum e, ſi c e ad e *h* datâ lineâ Q minor ſit, quàm in ratione data K ad AI, vel *r* ad *ſ*.

Demonſtratio.

Cum, per conſtructionem, exceſſus, quo B I ſuperat K, ſit ad B I, ſicut B 𝔠 ad BE: erit invertendo dividendoque [a] K ad B I, ſicut 𝔠 E ad E B. Eſt autem ratio 𝔠 E ad E B compoſita ex ratione 𝔠 E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad BI ex iiſdem rationibus erit compoſita. Eodem modo, cum ratio K ad BI componatur ex ratione K ad AI, & ex ratione A I ad IB: erit ratio compoſita ex ratione 𝔠 E ad E H, & ex A I ad IB eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex A I ad I B. Hinc ſi utrinque auferatur communis ratio A I ad I B, erit ratio reliqua 𝔠 E ad E H eadem rationi K ad A I, vel *r* ad *ſ*. Eſt autem C E datâ C 𝔠 vel Q major quàm 𝔠 E. Conſtat itaque CE ad EH datâ Q majorem eſſe, quàm in ratione data K ad A I, vel *r* ad *ſ*. Quod erat faciendum. Idem intelligendum de puncto quolibet *e*, in recta *d e* aſſumpto.

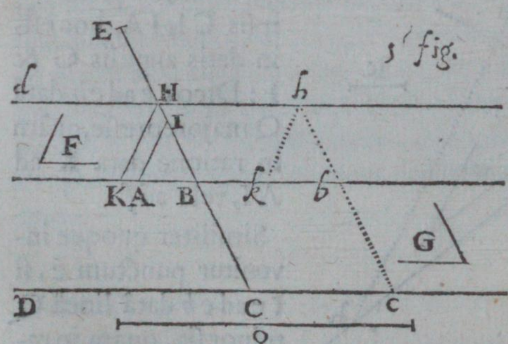
a ꝑ Cor. 4. Prop. libr. 5. & Prop. 17. lib. 5. Elem.

VII *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductæ duæ rectæ HK, HC, in datis angulis F, G ad poſitione datas AB, CD, ſimul ſumptæ æquales ſint alteri datæ Q.

Sint, ut ante, anguli BAI, DCB æquales angulis F, G, & lineæ AI, CB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I; ſitque porrò CE æqualis Q.

Constructio 1[mi] *caſus.*



1[mus] *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD ſunt parallelæ.*

Fiat ut ſumma ipſarum A I, I B ad IB, ita BE ad BH; ductaque *d* H parallelâ A B vel D C, & ex in aliquo ea puncto *h* ductis *h k*, *h* c parallelis AI, I C, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit *h k* ſimul cum *h* c æqualis C E vel Q.

De-

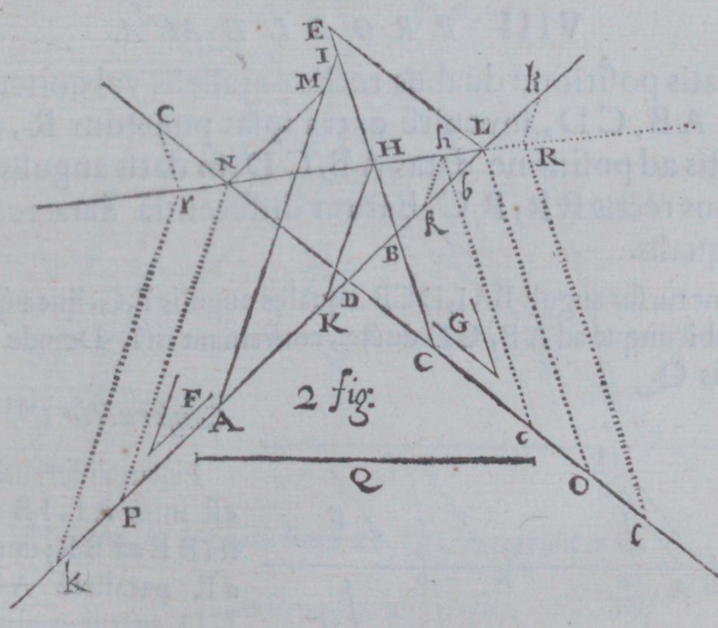
Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

Cum △^{la} KHB, AIB ſimilia ſint, [a] erit KH ad HB, ut AI ad IB, & componendo [b] KH, HB ad HB, ut AI, IB ad IB. Sed ſicut AI, IB ad IB, ita per conſtructionem eſt quoque BE ad BH. [c] Æquales itaque ſunt KH, HB ſimul ſumptæ ipſi BE. Unde communi additâ BC, erunt quoque KH, HC ſimul ſumptæ æquales EC, hoc eſt, Q. Eadem eſt ratio de quolibet puncto *h*, ubicunque in recta *d* H aſſumpto.

a ꝑ 4. libr. 6. Elem.
b ꝑ 18. libr. 5. Elem.
c ꝑ 9. libr. 5. Elem.

Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Ducatur ex E recta EL parallela DC, occurrens ipſi AB in L. Deinde ſumatur AM æqualis CE, ducaturque ex M recta MN parallela AB, occurrens ipſi DC in N, jungaturque NL. Dico, ſi ex ali-



2^{dus} *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

quo in ea puncto *h* ad poſitione datas AB, CD ducantur *hk*, *hc* parallelæ AI, IC, hoc eſt, in datis angulis F, G, quòd aggregatum ipſarum *kh*, *hc* ſit æquale datæ rectæ CE vel Q.

Demonſtratio 2^{di} caſus.

Ductis L O, N P parallelis C I, I A, occurrentibus datis D C, A B in O & P: erit L O [d] æqualis C E, & N P æqualis A M vel C E. Porrò cum propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ N H C, N L O, N H ſit ad N L, ut H C ad L O vel E C; itemque propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ L H K, L N P, L H ſit ad L N, ut H K ad N P, hoc eſt, C E: erit quoque [e], (quia N H, ceu prima, eſt ad N L, ceu ſecundam, ſicut H C, ceu 3^{tia}, ad E C, ceu 4^{tam}; nec non H L, ceu 5ta, ad N L 2^{dam}, ſicut H K, ceu 6ta, ad E C 4^{tam}), ut aggregatum ipſarum N H, H L, $1^{mæ}$ & $5^{tæ}$, ad 2^{dam} N L, ita aggregatum ipſarum H C, H K, $3^{tiæ}$ & $6^{tæ}$, ad 4^{tam} E C. Quocirca ſicut aggregatum ipſarum N H, H L eſt æquale ipſi N L, ita quoque aggregatum ipſarum H C, H K erit ipſi E C vel Q æquale. Eadem eſt ratio de quovis puncto *h*, ad libitum aſſumpto in recta N L, inter puncta N, L. Datis ergo poſitione &c. Quod faciendum erat.

d p 34. *libr.* 1. *Elem.*

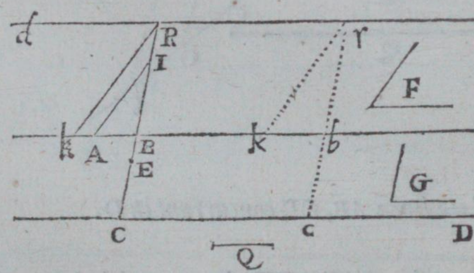
e p 24. *libr.* 5. *Elem.*

VIII *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipſas punctum R, à quo eductis ad poſitione datas A B, C D, in datis angulis F, G, duabus rectis R k, R C, harum differentia datæ rectæ Q ſit æqualis.

Fiant rurſus anguli B A I, D C B æquales angulis F, G, lineæque A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, conveniant in I. Deinde ſit C E æqualis Q.

Conſtructio 1^{mi} caſus.



1^{mus} *caſus, in quo datæ lineæ A B, C D ſunt parallelæ.*

Fiat ut differentia, quæ eſt inter A I, I B ad I B, ita B E ad B R; ductâque *d* R parallelâ A B vel C D, agatur ex aliquo in ea puncto r ad ipſas A B, C D rectæ r k, r c parallelæ A I, I C, hoc eſt, in datis angulis F, G: eritque differentia ipſarum c r, r k æqualis datæ C E vel Q.

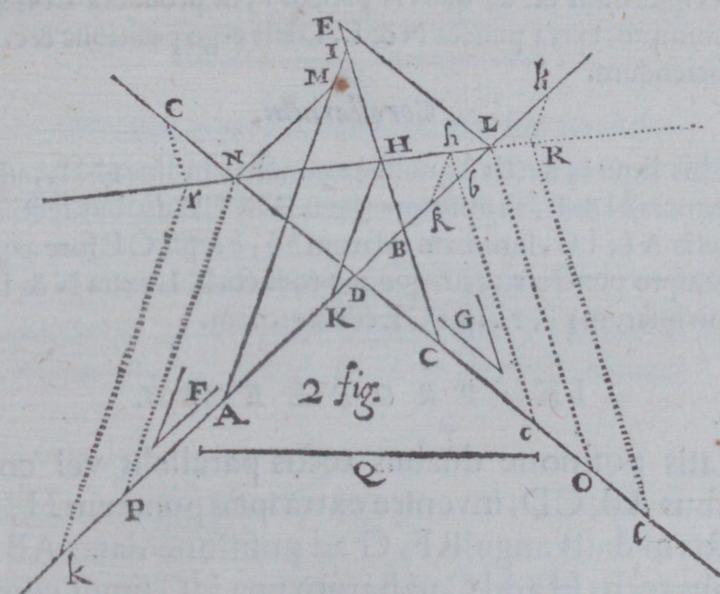
De-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

Quoniam, propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ 𝔨 R B, A I B [a], 𝔨 R eſt ad RB, ut AI ad IB, erit dividendo [b] ſicut differentia ipſarum 𝔨 R, RB ad R B, ita differentia ipſarum A I, IB ad I B. Sed ut differentia ipſarum A I, I B ad I B, ita quoque per conſtructionem eſt B E ad B R. Quocirca [c] differentia ipſarum 𝔨 R, RB æqualis eſt ipſi BE, ideoque & R 𝔨 æqualis R E; ac proinde CE, hoc eſt, Q, differentia, quæ eſt inter R C, R 𝔨. Idem ſimiliter accipe de quolibet puncto r, ubicunque in recta *d* R aſſumpto.

a ꝑ 4. libr. 6. Elem.
b ꝑ 17. libr. 5. Elem.
c ꝑ 9. lib. 5. Elem.



2^{dus} *caſus, in quo datæ lineæ AB,* CD *concurrunt in* D.

Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Inventâ, ut priùs in 2do caſu præcedentis Problematis, lineâ N L, eductiſque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta aſſumpto, rectis R 𝔨, R 𝔠 parallelis A I, I C, hoc eſt, in datis angulis F, G ad poſitione datas A B, C D: erit differentia ipſarum R 𝔠, R 𝔨 æqualis datæ C E vel Q.

Demonſtratio 2^{di} *caſus.*

d p 4. libr. 6. Elem.

Cum $\triangle^{la}$ N R 𝔯, N L O [d] ſimilia ſint, erit N R ad N L, ut R 𝔯 ad L O vel C E. Rurſus, quoniam $\triangle^{la}$ L R 𝔨, L N P ſimilia ſunt, erit L R ad L N, ſicut R 𝔨 ad N P vel C E. Quocirca cum N R ceu 1ma ſit ad N L 2^{dam}, ſicut R 𝔯 ceu 3^{tia} ad E C 4^{tam}; itemque L R ceu 5ta ad N L 2^{dam}, ſicut R 𝔨 ceu 6ta ad E C 4^{tam}: erit quoque [e] differentia inter primam N R & 5^{tam} L R ad 2^{dam} N L, ſicut differentia, quæ eſt inter 3^{tiam} R 𝔯 & 6^{tam} R 𝔨, ad 4^{tam} E C. Eſt autem differentia ipſarum NR, LR æqualis $2^{dæ}$ N L. Quare etiam differentia ipſarum R 𝔯, R 𝔨 eſt æqualis $4^{tæ}$ EC, hoc eſt, datæ Q. Idem ſimiliter accipiendum eſt de quovis puncto r, in producta LN, ad libitum aſſumpto, extra puncta N & L. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

e Vide Clavium ad 24. libr. 5. Elem.

Corollarium.

Ex his liquet, ductis à quolibet puncto *h* in linea N L, aſſumpto inter puncta N & L, ad poſitione datas AB, CD duabus rectis *h k*, *h c* parallelis A I, I C, ſummam ipſarum *h k*, *h c* ipſi C E fore æqualem; At aſſumpto puncto r utcunque in producta N L extra N & L, differentiam ipſarum r k, r c ipſi C E eſſe æqualem.

IX. PROBLEMA.

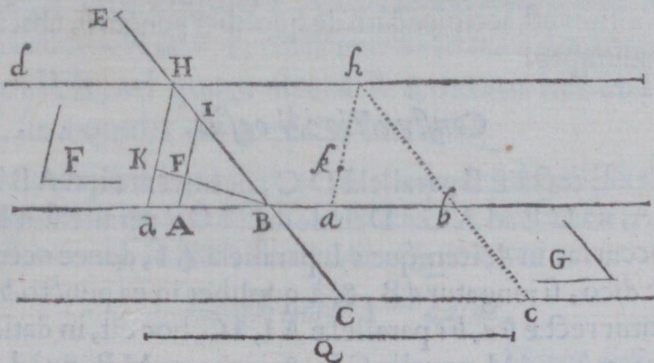
Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis in datis angulis F, G ad poſitione datas AB, C D duabus rectis H a, H C, ut harum una HC ſimul cum HK, eâ, ad quam altera H a datam habet rationem *r* ad *ſ*, ſit æqualis datæ rectæ Q.

Fiant, ut ante, anguli BAI, DCB æquales datis F, G; & lineæ A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I. Deinde ſit A I ad IF, ut *r* ad *ſ*; & C E, ſicut ante, æqualis Q.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 1

Fiat ut aggregatum ipſarum FI, IB ad IB, ita BE ad BH; ductâque *d* H parallelâ AB vel DC: dico, ſi ex B per F agatur recta BFK, do-



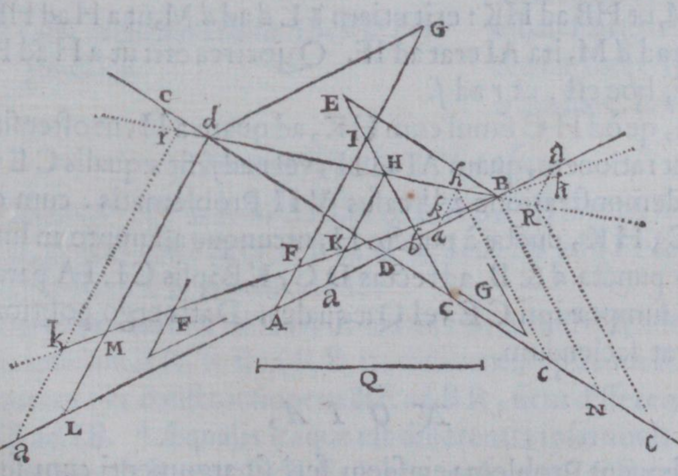
1^{mus} *caſus, in quo datæ lineæ AB, DC ſunt parallelæ.*

nec occurrat rectæ *a* H ipſi AI parallelæ in K, *a* H eſſe ad HK, ſicut AI ad IF, vel *r* ad *ſ*; & HC ſimul cum HK eſſe æqualem ipſi CE vel Q.

Demonſtratio 1^{mi} *caſus.*

Quoniam [a] △^{la} *a* HB, AIB, ut & KHB, FIB ſimilia ſunt: erit *a* H ad HB, ut AI ad IB; & HB ad HK, ut IB ad IF: ideóque [b] *a* H ad

a p 4. libr. 6 Elem.
b p 22. libr. 5. Elem.



2^{dus} *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

HK, ut AI ad IF. Porrò cum KH ſit ad HB, ſicut FI ad IB; compo-

nendo

nendo erit [c] ſicut aggregatum ipſarum KH, HB ad HB, ita aggregatum ipſarum FI, IB ad IB. Eſt autem per conſtructionem BE ad BH, ſicut aggregatum ipſarum FI, IB ad IB. Æquale igitur eſt [d] aggregatum ipſarum KH, HB ipſi BE. Quarum unicuique additâ communi BC, erunt & KH, HC ſimul ſumptæ ipſi EC vel Q æquales. Id quod ſimiliter eſt accipiendum de quolibet puncto *h*, ubicunque in lineâ *d* H aſſumpto.

c ℘ 18. *libr. 5. Elem.*

d ℘ 9. *libr. 5. Elem.*

Conſtructio 2^di^ caſus.

Ductâ ex E rectâ EB parallelâ DC, occurrente ipſi AB in B, fiat ut FI ad IA, ita CE ad AG. Deinde ductâ G *d* parallelâ AB, donec ipſi CD occurrat in *d*; itemque *d* L parallelâ AI, donec occurrat ipſi AB in L: dico, ſi jungatur *d* B, & à quolibet in ea puncto *h* ad AB, CD ducantur rectæ *h a*, *h c* parallelæ AI, IC, hoc eſt, in datis angulis F, G, ſumaturque *d* M æqualis CE, & jungatur MB, quòd *a h* ſit ad *h k*, ut AI ad IF, hoc eſt, *r* ad *ſ*; & quòd *hc* ſimul cum *h k* ſit æqualis ipſi CE vel Q.

Demonſtratio 2^di^ caſus.

Per 34. 1^mi^ Elem. L *d* eſt æqualis AG, & per conſtr. *d* M æqualis CE, & FI ad IA, ut CE ad AG, hoc eſt, *d* M ad *d* L: & invertendo [e] L *d* ad *d* M, ut AI ad IF. Quoniam autem [f] △^la^ L *d* B, a HB, ut & M*d*B, KHB, ſimilia ſunt, & idcirco L *d* ad *d* B, ut a H ad HB; & *d* B ad *d* M, ut HB ad HK: erit etiam [g] L *d* ad *d* M, ut a H ad HK. Sed ut L *d* eſt ad *d* M, ita AI erat ad IF. Quocirca erit ut a H ad HK, ſic AI ad IF, hoc eſt, ut *r* ad *ſ*.

e ℘ Cor. 4. *lib. 5. Elem.*

f ℘ 4. *lib. 6. Elem.*

g ℘ 22. *libr. 5. Elem.*

Porrò, quòd HC ſimul cum HK, ad quam à H, ut oſtenſum eſt, eam habet rationem, quam AI ad IF, vel *r* ad *ſ*, ſit æqualis CE vel Q, patet ex demonſtratione 2^di^ caſus VII Problematis: cum omnes lineæ HC, HK, ductæ à puncto H, utcunque aſſumpto in linea *d* B inter duo puncta *d* & B, ad rectas DC, KB ipſis CI, IA parallelæ, ſint ſimul ſumptæ ipſi CE vel Q æquales. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

NOTA,

Cum ſequens Problema ejuſdem ferè ſit argumenti cum ſuperiori, facilique viâ per illud ſolvi poſſit, placuit nobis id hîc ſubjungere, ut ſequitur.

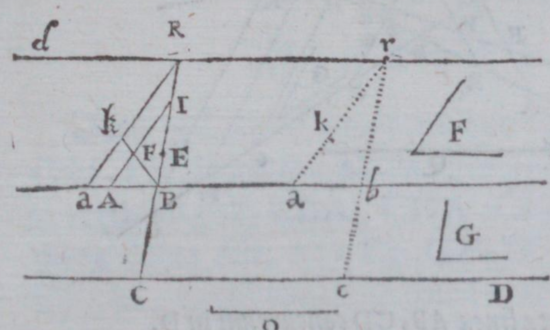
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

X PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipſas punctum R, à quo eductis in datis angulis F, G ad poſitione datas A B, C D duabus rectis R 𝔞, R 𝔠, differentia inter harum unam R C & aliam R 𝔨, ad quam altera R 𝔞 datam habet rationem *r* ad *ſ*, ſit æqualis datæ rectæ lineæ Q.

Fiant anguli B A I, D C B, ut ante, æquales angulis F, G, & rectæ A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I. Deinde ſit A I ad I F, ut *r* ad *ſ*; ſitque C E æqualis Q, ut ante.

Conſtructio 1^mi^ *caſus.*



1^mus^ *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD ſunt parallelæ.*

Fiat ut differentia ipſarum F I, I B ad I B, ita B E ad B R; agaturque *d* R parallela A B vel C D. Tum ductâ ex R rectâ R 𝔞 parallelâ A I, & ex B per F rectâ B F 𝔨, occurrente ipſi 𝔞 R in 𝔨, erit 𝔞 R ad R 𝔨, ſicut A I ad I F, hoc eſt, ut *r* ad *ſ*; itemque differentia inter R C & R 𝔨 æqualis C E vel Q.

Demonſtratio 1^mi^ *caſus.*

Quoniam [a] △^la^ 𝔞 R B, A I B, ut & 𝔨 R B, F I B ſimilia ſunt, erit 𝔞 R ad R B, ſicut A I ad I B; & R B ad R 𝔨, ſicut I B ad I F: & per conſequens [b] 𝔞 R ad K 𝔨, ſicut A I ad I F.

Porrò cum 𝔨 R ſit ad R B, ut F I ad I B; erit dividendo [c] ut differentia ipſarum 𝔨 R, R B ad R B, ita differentia ipſarum F I, I B ad I B. Eſt autem per conſtructionem B E ad B R, ſicut differentia ipſarum F I, I B ad I B. [d] Æqualis itaque eſt differentia ipſarum 𝔨 R, R B ipſi B E: ideoque 𝔨 R æqualis R E, & per conſequens C E vel Q æqualis differentiæ, quæ eſt inter R C, R 𝔨. Quod eodem modo intelligendum eſt de quolibet puncto r, in linea *d* R aſſumpto.

a p 4. libr. 6. Elem.

b p 22. libr. 5 Elem.

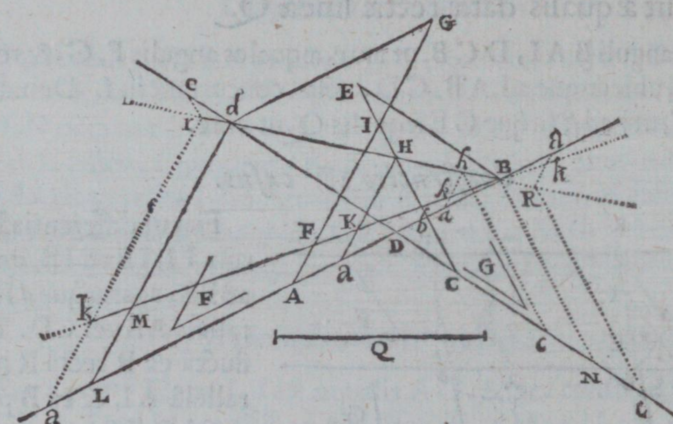
c p 17. libr. 5 Elem.

d p 9. libr. 5. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 2^{di} *caſus.*

Inventâ, ut in 2do caſu præcedentis Problematis, lineâ *d*B, ductiſque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta, ad AB, CD rectis Ra, Rc, parallelis AI, IC, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit



2^{dus} *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

aR ad Rk, ut AI ad IF, vel *r* ad *ſ*; & Rk ſubducta ex Rc æqualis CE vel Q.

Demonſtratio 2^{di} *caſus.*

Quòd aR ſit ad Rk, ut AI ad IF, vel *r* ad *ſ*, patet ex eadem ratione, quâ in 2do caſu ſuperioris Problematis demonſtravimus, aH eſſe ad HK, ut AI ad IF, vel *r* ad *ſ*. Eodem modo liquet ex demonſtratione 2^{di} caſus VIII Problematis, differentiam ipſarum Rc, Rk æqualem eſſe CE vel Q. Quod ſimiliter intelligendum eſt de quolibet puncto r, ubicunque aſſumpto in producta *d*B ad alteram partem. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

Hinc:

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Hinc:

Si à puncto quodam ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas vel inter ſe convenientes ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis, datam inter ſe habentes rationem; vel quarum una, ſimul cum aut minus datâ lineâ, ad alteram ſit in ratione data; vel quarum aggregatum aut differentia ſit datæ rectæ æqualis; vel denique quarum una ſimul cum ea aut minus eâ, ad quam altera datam habet rationem, datæ rectæ ſit æqualis: continget punctum rectas lineas, poſitione datas. *Concluſio 6tæ Propoſitionis.*

Quod erat demonſtrandum.

In 7mam Propoſitionem.

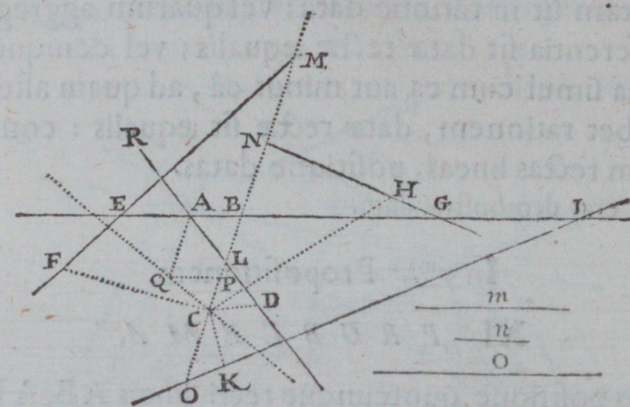
XI *PROBLEMA.*

Datis poſitione quotcunque rectis lineis AB, AD, EF, GH, IK: invenire extra ipſas punctum C, à quo eductis in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, CKO ad poſitione datas AB, AD, EF, GH, IK rectis CB, CD, CF, CH, CK, id, quod ſub data linea *m* & una ducta CB comprehenditur rectangulum, unà cum eo, quod ſub alia ducta CD & data *n* comprehenditur, æquale ſit ei, quod ſub alia data *o* & reliquis ductis CF, CH, & CK continetur.

Cum propter datarum linearum atque angulorum multitudinem explicatio conſtructionis prolixior futura eſſet, quàm ut votis hujus & alterius reſponderet, brevitati conſulentes ſatis fore duximus, ſi calculo Geometrico operationem expediremus, ut ſequitur.

Primò itaque rem ut jam factam ſuppono, atque, ut ex omnium harum linearum confuſione me expediam, conſidero unam ex datis atque unam ex quæſitis, ut ex. gr. AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Pono itaque lineam AB vocari *x*, BC autem vocari *y*, & alias lineas datas omnes productas eſſe, donec ſecent haſce duas, etiam productas, ſi opùs fuerit, & ipſis non ſint parallelæ, utputa AB, in punctis A, E, G, I; at BC in punctis L,

M, N, & O. Deinde obſervans angulos $\triangle^{li}$ ABL eſſe datos, datamque ideo rationem laterum ipſius AB ad BL, quam pono ut z ad a: erit, exiſtente AB ∞ x, BL ∞ $\frac{ax}{z}$, & CL ∞ $y - \frac{ax}{z}$. nimirum, ſi punctum L cadit inter B & C; cadente verò B inter C & L, erit CL ∞



$y + \frac{ax}{z}$; & $-y + \frac{ax}{z}$, ſi C ceciderit inter B & L. Eodem modo, datis angulis $\triangle^{li}$ LCD datur & ratio laterum, quæ eſt inter CL & CD, quæ ſi ponatur eſſe, ut z ad b: erit, exiſtente CL ∞ $y - \frac{ax}{z}$, CD ∞ $\frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$. Porrò, quoniam lineæ AB, AD, EF poſitione datæ ſunt, dabitur etiam intervallum inter puncta A & E, quod ſi vocetur i, erit EB ∞ $i + x$; at $i - x$, ſi punctum B ceciderit inter A & E; & $-i + x$, cadente E inter A & B. Similiter, datis angulis $\triangle^{li}$ EBM, datur ratio laterum, quæ eſt inter EB & BM, quæ ſit ut z ad c. Cumque EB ſit $i + x$, erit BM ∞ $\frac{ci + cx}{z}$, & CM ∞ $\frac{zy + ci + cx}{z}$. Haud ſecus datis angulis $\triangle^{li}$ FCM, datur ratio laterum, quæ eſt inter CM & CF. Quæ ſi ponatur ut z ad d, erit CF ∞ $\frac{dzy + cdi + cdx}{zz}$. Pari ratione, datis poſitione rectis lineis AB, AD, & GH, datur quoque intervallum inter puncta A & G, quod ſi vocetur k, erit BG ∞ $k - x$; at $k + x$, cadente A inter B & G; & $-k + x$, cadente G inter A & B. Eodem modo, cùm dantur anguli $\triangle^{li}$ BNG, datur & ratio laterum, quæ eſt inter

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

inter BG & BN. Quæ ſi ponatur ut z ad e, BG exiſtente $k - x$, erit BN $\propto \frac{ek - ex}{z}$, & CN $\propto \frac{zy + ek - ex}{z}$. Rurſus datis angulis $\triangle^{li}$ CNH, dabitur ratio laterum, quæ eſt inter CN & CH. Quæ ſi ponatur ut z ad f: erit CH $\propto \frac{fzy + efk - efx}{zz}$. Denique, cum, datis poſitione rectis AB, AD, KI, detur & AI, intervallum inter puncta A & I: id quod ſi vocetur l, erit BI $\propto l - x$; ſed $l + x$, cadente A inter B & I; & $-l + x$, cadente I inter A & B. Porrò, cum, datis angulis $\triangle^{li}$ OBI, detur ratio laterum BI ad BO: ſi ponatur illa ut z ad g, erit, exiſtente BI $\propto l - x$, BO $\propto \frac{gl - gx}{z}$; & CO $\propto \frac{-zy + gl - gx}{z}$. Eodem modo datis angulis $\triangle^{li}$ OCK, atque ideo ratione laterum, quæ eſt inter CO & CK: ſi illa ponatur ut z ad h, erit CK $\propto \frac{-hzy + ghl - ghx}{zz}$. Et ſic ulteriùs, ſi plures lineæ poſitione datæ fuerint.

Ubi conſtat, datis poſitione quotcunque lineis rectis, in ſimilibus terminis inveniri ſemper quantitatem cujuſque lineæ, ex puncto C ad quamlibet datarum linearum in dato angulo eductæ.

Notandum autem, quòd ſi datæ lineæ ſunt ipſi AB parallelæ, in nulla iſtarum quantitatum x reperiri. Aſt ubi datæ lineæ ipſi CB ſunt parallelæ, nullos invenitum iri terminos, quantitatem y involventes. Denique quod attinet ſigna + & —, poſſunt ipſa tot modis variari, quot excogitari queunt datarum linearum poſitiones. Tandem cum conſtet longitudinem cujuſque ductarum linearum iis terminis exprimi, in quibus ſolummodò x vel y continetur, non autem xx vel yy: ſequitur, non obſtante multiplicatione uniuſcujuſque earundem linearum per quantitatem alterius datæ, nunquam tamen ad xx vel yy adſcendi. Id quod arguit punctum C in rectam lineam cadere, poſitione datam, ut hîc deinceps oſtenditur.

Idcirco ad determinandum punctum C, cum CB, hoc eſt, y, multiplicata per m producat my; & CD, hoc eſt, $\frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$ multiplicata per n, producat $\frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz}$; ac porrò CF, CH, & CK multiplicatæ per o producant $\frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko - efox - hozy + ghlo - ghox}{zz}$:

erit æquatio $my + \frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz} \propto \frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko - efox - hozy + ghlo - ghox}{zz}$. Hoc eſt, multiplicatis utrinque per zz, & æqualitate ad legitimam formam reductâ:

$$y \propto \frac{+ cdio + abnx + efko + cdox + ghlo - efox - ghox}{mzz + bnz - doz - foz + hoz.}$$

Nempe ſi ponatur $mz + bn + ho$ majus quàm $do + fo$. Cum aliàs, ſi $mz + bn + ho$ minus eſſet quàm $do + fo$, ſigna + & - forent immutanda. Quòd ſi contigerit y eſſe æqualem nihilo aut minorem quàm o, poſtquam ſuppoſitum fuerit punctum C cadere intra angulum DAE, oporteret idipſum quoque ſumere intra angulum DAG, GAR, vel RAE, mutando ad hoc ſigna + & —, prout requiritur. Quòd ſi verò in hiſce quatuor poſitionibus, y deprehenderetur eſſe æqualis o, indicio eſſet Problema hujuſmodi conditionibus circumvallatum eſſe impoſſibile. Poſito autem quòd ſit poſſibile, pro $\frac{cdio + efko + ghlo}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ ſcribatur, brevitatis causâ, p; & loco $\frac{abn + cdo - efo - gho}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ ſcribatur $\frac{q}{r}$ habebiturque $y \propto p +$ vel $- \frac{q}{r}x$. Nimirum erit $y \propto p + \frac{q}{r}x$, ſi $abn + cdo$ majus ſit quàm $efo + gho$; ſed $y \propto p - \frac{q}{r}x$, ſi $abn + cdo$ eſt minus quàm $efo + gho$.

Quapropter cum omne illud, quod in Problemate requirebatur, ſit peractum, nihilque amplius relictum ſit cujus ope æquatio inveniri poſſit ad obtinendam quantitatem indeterminatam x, liberum erit x pro lubitu ſumere; ita ut hoc pacto innumera puncta C, quæſito ſatisfacientia, inveniri queant.

Hinc ſumptâ AB ad lubitum, fiat BP æqualis p, ponaturque à B versùs C, ſi habeatur $+p$; quæ aliàs versùs N eſſet ſumenda, ſi haberetur $-p$; aut, ſi p fuiſſet æqualis nihilo, nullo modo ducenda fuiſſet. Deinde eductâ ex P lineâ PQ parallelâ & æquali AB, duco QC, ita ut QP ſit ad PC, ut r ad q. hoc eſt, ſi QP eſt x, tum PC ſit $\frac{qx}{r}$; ita ut

pun-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

punctum C cadat inter B & P, ſi habeatur $-\frac{qx}{r}$. Contra ſi habeatur $+\frac{qx}{r}$, faciendum eſt, ut C cadat ad alteram partem extra P. quemadmodum hîc factum apparet. Ubi obſervandum, nullo modo ducendam fuiſſe lineam QC, ſi $\frac{qx}{r}$ fuiſſet æqualis o. Id quod argumentó fuiſſet, punctum quæſitum C caſurum fuiſſe in inventa PQ, ab utraque parte in infinitum producta.

Eodem modo ſumendo aliam ſemper atque aliam magnitudinem pro A B, hoc eſt, ducendo C B in dato angulo C B A, ex alio atque alio puncto B, invenientur innumera puncta C, quæſito ſatisfacientia. Quæ quidem omnia cadent in rectam lineam Q C, utrinque in infinitum productam.

Ubi porrò notandum ducimus, quo pacto quæſitum punctum C non ſolùm in rectam lineam ſit caſurum, quæ poſitione eſt data, quotieſcunque illud, quod ſub data *m* & ducta C B, unà cum eo, quod ſub data *n* & ducta C D continetur, æquale eſt ei, quod ſub data *o* & reliquis C F, C H, & C K comprehenditur; verùm etiam quoties unum productum ad alterum datam habet rationem; ſicut etiam quoties unaquævis ductarum C F, C H, & C K per peculiarem quandam datam fuerit multiplicata, & producta ipſarum ad ſe invicem utcunque fuerint comparata.

Patet igitur:

Si ſint quotcunque rectæ lineæ poſitione datæ, atque ad ipſas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, ſit autem quod ſub data linea & ducta continetur, unà cum contento ſub data linea & altera ducta, æquale ei, vel datam habens rationem ad illud, quod ſub data & alia ducta & reliquis continetur: punctum rectam lineam poſitione datam contingere. *Concluſio 7mæ Propoſitionis.*

Quod erat demonſtrandum.

In

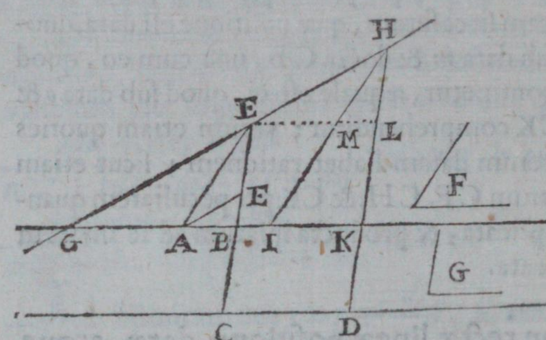
In 8^{vam} Propoſitionem.

XII *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad poſitione datas AB, CD duæ rectæ HI, HD, ipſæ ad data puncta A & C in poſitione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter ſe habentes rationem *c* ad *b*.

Fiant anguli BAE, DCB æquales datis angulis F, G; rectæque AE, CB productæ concurrant in E. Deinde ſit FE ad EB, ſicut *c* ad *b*.

Conſtructio.



Ductâ AF, agatur per E ipſi parallela EH; ductiſque ex aliquo in ea puncto H ad poſitione datas AB, CD duabus rectis HI, HD, ipſis AE, EC parallelis, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut FE ad EB, vel *c* ad *b*.

Demonſtratio.

Ductâ HE occurrente ipſi AB in G; & ex E ductâ EL parallelâ AB, ſecante IH in M, & ipſi DKE occurrente in L: erit propter ſimilitudinem $\triangle^{rum}$ ELH, GBE, ut & EMH, GAE [a], LE ad EH, ut BG ad GE; & EH ad EM, ut GE ad GA: ac proinde ex æquo [b] LE ad EM, hoc eſt, CD ad AI, ut BG ad GA. Porrò cum [c] BA ſit ad AG, ut BF ad FE, hoc eſt, componendo [d] BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG ſit ad GA, ſicut CD ad AI: [e] erit CD ad AI, ut BE ad EF, hoc eſt, ut *b* ad *c*. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intelligendum eſt de quovis puncto in linea EH aſſumpto.

a *p 4. libr. 6. Elem.*
b *p 22. libr. 5. Elem.*
c *p 2. libr. 6. Elem.*
d *p 18. libr. 5. Elem.*
e *p 11. libr. 5. Elem.*

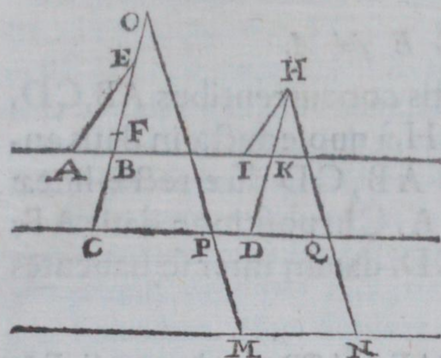
NOTA

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

NOTA I[ma].

Quamvis hæc Propoſitio univerſalis ſit, & in quotcunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operæ pretium tamen nos facturos exiſtimavimus, ſi ad majorem ejus perfectionem ſequentem operationem hîc adjiceremus.

In 3^{bus} lineis.



Sit AB $\propto a$
BE $\propto b$
EF $\propto c$
OC $\propto d$
CP $\propto e$
BC vel DK $\propto f$
CD ad MN, ut d ad g
AK $\propto x$
KH $\propto y$.

BE AB KH
$b - a - y$ | IK. $\frac{ay}{b}$ } AK. x } ſubtr.

FE EB
$c - b -$ AI. $\frac{bx -- ay}{b}$ | CD. $\frac{bx -- ay}{c}$ } add.

OC CP DH
$d - e - y + f$ | DQ. $\frac{ey + ef}{d}$

CQ. $\frac{bdx -- ady + cey + cef}{cd}$

ſubtr. CP. e

CD
$d - g - \frac{bx -- ay}{c}$ | PQ vel MN. $\frac{bdx -- ady + cey + cef -- cde}{cd}$

$bdx -- ady + cey + cef -- ced \propto bgx -- agy$

$agy -- ady + cey \propto bgx -- bdx + ced -- cef$

fit $y \propto \frac{bgx -- bdx + ced - cef}{ag -- ad + ce}$.

Quod arguit punctum H in rectam lineam cadere, poſitione datam.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Idem ſimiliter liquet de quotcunque datis parallelis.

NOTA 2da.

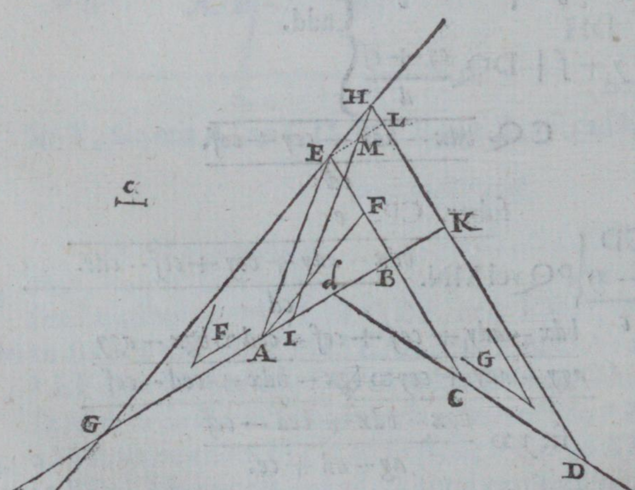
Quoniam quæſitum non tantùm in lineis parallelis, prout ab Apollonio propoſitum eſt, ſed in concurrentibus quoque locum habet, ideo ſequens addere nobis placuit

PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis concurrentibus AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad poſitione datas AB, CD duæ rectæ lineæ HI, HD, ipſæ ad data puncta A, C in poſitione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter ſe habentes rationem.

Fiant, ut ante, ad A & C anguli BAE & *d* CB æquales angulis F & G; rectæque AE, CB æquales hoſce angulos conſtituentes concurrant in E. Deinde ſit data ratio ut *c* ad EB.

Constructio.



Fiat ut B *d* ad *d* C, ita *c* ad EF; junctæque AF agatur per E parallela EH. Tum ductis ex aliquo in ipſa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, EC, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut *c* ad EB.

De-

Demonſtratio.

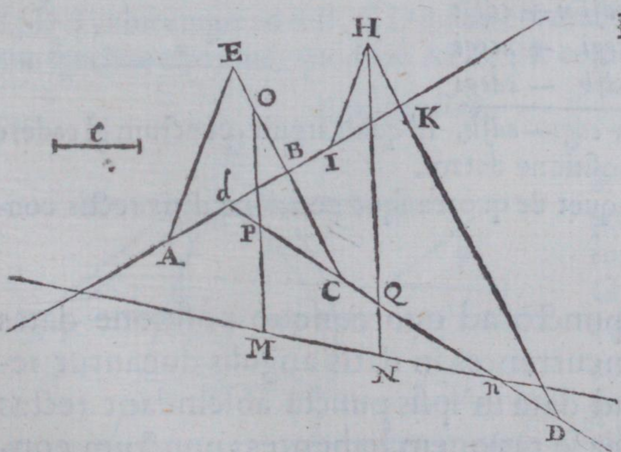
Cum propter △^la ſimilia ELH, GBE, ut & EMH, GAE [a], LE ſit ad EH, ſicut BG ad GE; & EH ad EM, ſicut GE ad GA: ex æquo erit [b] LE ad EM, hoc eſt, KB ad AI, ſicut BG ad GA. Porrò cum [c] BA ſit ad AG, ut BF ad FE, hoc eſt, componendo [d] BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG ſit ad GA, ut KB ad AI: [e] erit KB ad AI, ut BE ad EF; & invertendo [f] AI ad BK, ut FE ad EB. Sed ut BK ad CD, ita eſt B*d* ad *d*C; itemque ut B*d* ad *d*C, ita per conſtructionem *c* eſt ad EF. [g] Erit igitur BK ad CD, ut *c* ad EF. Hinc cum AI, BK & CD ſint 3 magnitudines ab una parte, & *c*, FE, & EB 3 aliæ ab altera parte, quæ binæ ſint in eadem ratione, ſitque earum proportio perturbata, [h] erit quoque ex æquo 1ma AI ad 3^am CD (in 3^bus primis), ſicut 1ma *c* ad 3^tiam EB (in 3^bus poſtremis). Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intelligi debet de quolibet puncto in linea EH aſſumpto.

a p 4. libr. 6 Elem.
b p 22. libr. 5. Elem.
c p 2. libr. 6. Elem.
d p 18. libr. 5. Elem.
e p 11. lib. 5. Elem.
f p Cor. 4. libr. 5. Elem.
g p 11. libr. 5. Elem.
h p 23. libr. 5. Elem.

NOTA.

Cum hæc Propoſitio verificetur in tot lineis concurrentibus, quot quis voluerit, itaque ad majorem ejus perfectionem ſequentem operationem adjecimus

In 3^bus lineis.



Eſto AB ∞ *a*
BE ∞ *b*
AI ad CD, ut *c* ad *b*
B*d* ∞ *d*
BC ∞ *e*
OC ∞ *f*
CP ∞ *g*
P*n* ∞ *h*
*n*M ∞ *i*
CD ad MN, ut *h* ad *k*
AK ∞ *x*
KH ∞ *y*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

$$\left.\begin{array}{l} \text{AK. } x \\ \text{BE AB HK} \\ b - a - y \mid \text{IK. } \dfrac{ay}{b} \end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

$$\text{BE}$$

$$c - b - \text{AI. } \frac{bx - ay}{b} \mid \text{CD. } \frac{bx - ay}{c}$$

$$\text{BK. } x - a$$

$$d\text{B BC add. } d\text{B. } d \qquad \text{add. CP. } g$$

$$\left.\begin{array}{l} d - e - d\text{K. } x - a + d \mid \text{KD. } \dfrac{ex - ae + de}{d} \qquad \text{PD. } \dfrac{bx - ay + cg}{c} \\ \text{add. HK. } y \\ f - g - \text{HD. } \dfrac{ex - ae + de + dy}{d} \mid \text{DQ. } \dfrac{egx - aeg + deg + dgy}{df} \end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

$$\text{P}n \quad n\text{M}$$

$$h - i - \text{PQ. } \frac{bdfx - adfy + cdfg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdf},$$

$$\text{ad MN. } \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$\text{CD} \qquad\qquad \text{MN}$$

$$h - k - \frac{bx - ay}{c}, \text{ ad } \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy \infty bdfkx - adfky.$$

$$adfiy + cdgiy - adfky \infty bdfix - cegix - bdfkx + cdfgi + acegi - cdegi$$

$$\text{fit } y \infty \frac{\begin{array}{ll} +\,bdfi\,x & +\,cdfgi \\ -\,cegi & +\,acegi \\ -\,bdfk & -\,cdegi \end{array}}{adfi + cdgi - adfk}.$$

Id quod arguit, punctum H cadere in rectam lineam, poſitione datam.

Idem ſimiliter liquet de quotcunque poſitione datis rectis concurrentibus.

Hinc:

Concluſio prioris partis 8væ Propoſitionis.

Si ab aliquo puncto ad quotcunque poſitione datas parallelas vel concurrentes in datis angulis ducantur rectæ lineæ, quæ ad data in ipſis puncta abſcindant rectas lineas datam inter ſe rationem habentes; punctum continget poſitione datam rectam lineam.

Quod erat demonſtrandum.

NOTA.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

NOTA.

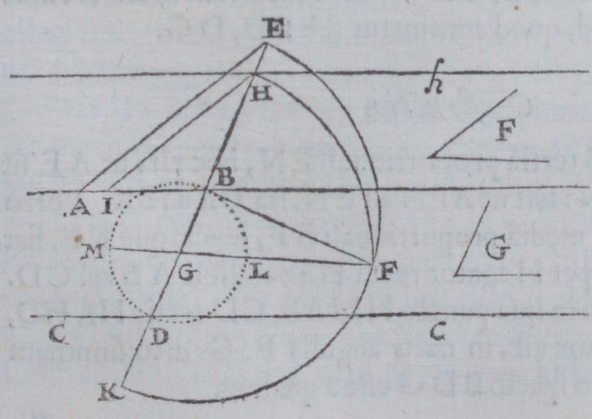
Cum in 7ma Propoſitione ulteriùs quoque habeatur, quòd, ſi abſciſſæ rectæ lineæ datum ſpatium comprehendant, quæſitum punctum contingat rectam lineam poſitione datam, nec tamen id ipſum ſive in parallelis ſive in concurrentibus locum inveniat, quoniam punctum eâ ratione non in rectam lineam ſed Hyperbolam cadit: idcirco caſum iſtum, ceu ab imperito quodam inſertum, negleximus & repudiavimus, ejuſque loco ſequens Problema 13, genuinam illius mentem exponere nobis viſum, ſubrogavimus. Deinde cum ibidem adhuc dicatur, quòd, ſi rectæ poſitione datæ ſunt parallelæ, & ſpecies ab ipſis ductis vel exceſſus ſpecierum dato ſpacio eſt æqualis, punctum ſimiliter contingat poſitione datas rectas lineas: idcirco illud oſtenſuri, antequam poſteriorem $7^{mæ}$ Propoſitionis partem concluderemus, duo reliqua ſequentia 14 & 15 Problemata huic adplicavimus.

XIII *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis A B, C D, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis ad poſitione datas A B, C D in datis angulis F, G duabus rectis H I, H D, rectangulum I H D, ſub ipſis comprehenſum, dato ſpacio ſit æquale.

Fiant, ut ante, anguli BAE, *c* DE æquales angulis F, G; lineæque A E, D B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in E. Deinde datum ſpacium eſto illud, quod ſub AE & BK continetur.

Conſtructio.



Inventâ inter EB & BK mediâ proportionali BF, ſecetur BD bifariam in G, jungaturque GF. Porrò factâ GH æquali GF, agatur per H recta H *h* parallela A B vel C D; ductiſque ab aliquo in ea puncto H ad

AB, CD rectis HI, HD parallelis A E, E D, hoc eſt, in datis angulis F, G: dico quod ſub I H, H D continetur rectangulum eſſe æquale dato ſpacio ſive rectangulo contento ſub AE, BK.

Demonſtratio.

Deſcripto ex G intervallo D G vel G B circulo D M B L, ſecetur ejus circumferentia ab F G in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ M F L, hoc eſt, D H B æquale □to ex B F. Eſt autem [b] □tum ex B F etiam æquale ▭lo K B E. Æquale igitur eſt ▭ DHB ipſi ▭lo KBE. Unde erit [c] ut DH ad KB, ita BE ad BH. Sed ut BE ad B H, ita eſt quoque [d] A E ad I H. Quare erit ut D H ad K B, ſic A E ad I H: ideoque [e] id, quod ſub extremis continetur ▭ D H I æquale ▭lo ſub mediis KB, A E, hoc eſt, dato ſpacio. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto *h* in linea H *h* aſſumpto.

a p Cor. 36. libr.3.Elem.
b p 14. libr. 2, vel 17. libr.6.Elem.
c p 16. libr. 6. Elem.
d p 4.libr.6. Elem.
e p 16. libr. 6. Elem.

XIV *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis A B, C D, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis ad poſitione datas AB, CD in datis angulis F, G duabus rectis HI, HD, quæ ab ipſis fiunt quadrata ſimul ſumpta ſint æqualia dato ſpacio.

Fiant, ut ante, anguli BAE, *c* DE æquales angulis F, G; lineæque A E, D E, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in E. Deinde ſit datum ſpacium, illud, quod continetur ſub B D, D G.

Conſtructio.

Inventâ ad A E, E B tertiâ proportionali E N, hoc eſt, ut A E ſit ad E B, ſicut EB ad EN: fiat ut AEN ad E N, ita DB ad BK. Porrò inventâ inter K B, B G mediâ proportionali B F, junctâque K F, fiat eidem æqualis K H, & per H agatur recta H *h* parallela A B vel C D. Tum eductis ex aliquo in ipſa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD, parallelis A E, E D, hoc eſt, in datis angulis F, G: dico ſummam □torum ex I H, H D dato ſpacio B D G eſſe æqualem.

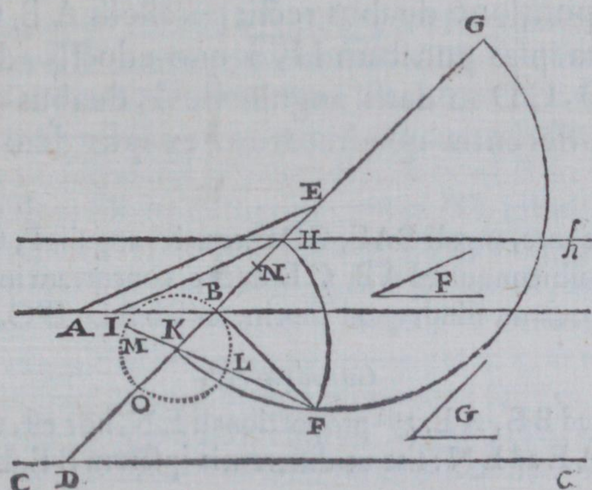
De-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio.

Deſcripto ex K intervallo K B circulo O M B L, ſecetur ejus peripheri ab FK in L, atque ab eadem producta in M: eritque [a] ▭ MFL, hoc eſt, OHB æquale □to ex BF. Eſt autem [b] □tum ex BF æquale ▭lo KBG. Quare etiam ▭ OHB æquale erit ▭lo KBG. Porrò,

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.



quoniam per conſtructionem AE eſt ad EB, ſicut E B ad E N. id eſt, [c] A E ad E N, ſicut □tum ex A E ad □tum ex EB, vel ut □tum ex IH ad □tum ex HB: erit componendo [d] ut AEN ad EN, hoc eſt, DB ad BK, ita ſumma □rum ex IH, HB ad □tum ex HB. Quoniam verò [e] DB eſt ad BK, ſicut ▭ DBK ad ▭ HBK, vel [f] ſicut duplum ▭ DBH ad duplum ▭ HBK, hoc eſt, ad ▭ HBO: erit quoque ſumma □rum ex IH, HB ad □tum ex HB, ſicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO. Ac proinde, per 12. 5, ut ſumma □rum ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH ad ſummam □ti ex HB & ▭li HBO, hoc eſt [g], ad ▭ OHB, ita ſumma □rum ex IH, HB ad □tum ex HB, ſeu DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita quoque [h] eſt ▭ DBG ad ▭ KBG. Quocirca ut ſumma □rum ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [i] ut ▭ OHB ad ſummam □rum ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH, ita ▭ KBG ad ▭ DBG.

c p Cor. 20. libr. 5. Elem.
d p 18. libr. 5. Elem.
e p 1. libr. 6. Elem.
f p 15. libr. 5. Elem.
g p 3. libr. 2. Elem.
h p 1. libr. 6. Elem.
i p Cor. 4. lib. 5. Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

▭ D B G. Unde, cum ▭ O H B æquale ſit oſtenſum ▭^{lo} K B G,
k p 14. libr. 5. Elem. erit quoque [k] ſumma □^{rum} ex I H, H B unà cum duplo ▭ D H B æquale ▭^{lo} D B G. Et proinde ſi addatur utrinque □^{tum} ex D B,
l p 4. & 3. libr. 2. Elem. erit [l] ſumma □^{rum} ex I H, H D æqualis dato ſpacio ſeu ▭^{lo} B D G. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto *h*, in linea H *h* aſſumpto.

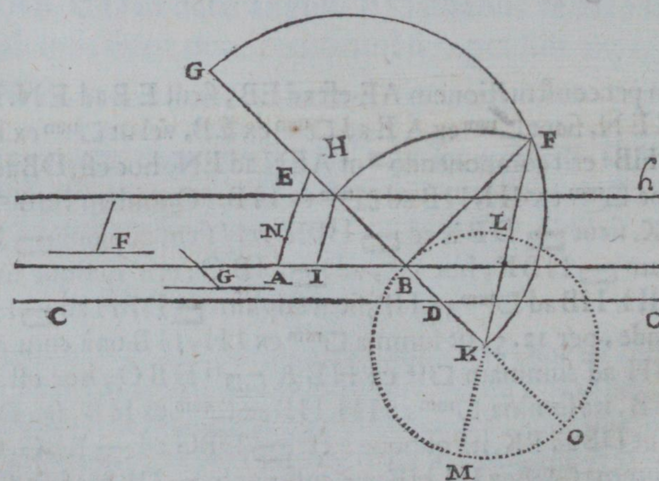
XV *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis A B, C D, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis ad poſitione datas A B, C D in datis angulis F, G, duabus rectis H I, H D, differentia quadratorum ex ipſis dato ſpacio ſit æqualis.

Fiant, ut ante, anguli BAE, CDE æquales angulis F, G; lineæque A E, D E, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in E. Deinde ſit datum ſpacium, illud, quod continetur ſub B D, D G.

Conſtructio.

Inventâ ad B E, A E, 3^{tiâ} proportionali E N, hoc eſt, ut B E ſit ad E A, ſicut A E ad E N: fiat ut differentia ipſarum B E, E N ad E N,



ita DB ad BK. Tum inventâ inter KB, BG mediâ BF, jungatur KF, fiatque KH æqualis KF. Deinde per H ductâ rectâ H *h* parallelâ AB vel

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

vel CD, ductiſque ex aliquo in ea puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit differentia □rum ex DH, HI æqualis dato ſpacio BDG.

Demonſtratio.

Deſcripto ex K intervallo KB circulo OMBL, ſecetur ejus peripheria ab FK in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ MFL, hoc eſt, OHB æquale □to ex BF. Eſt autem □tum ex BF [b] æquale ▭lo KBG. Quare ▭ OHB æquale quoque erit ▭lo KBG. Porrò cum per conſtructionem BE ſit ad EA, ut AE ad EN. id eſt [c], BE ad EN, ſicut □tum ex BE ad □tum ex EA, vel ut □tum ex BH ad □tum ex HI: erit quoque [d] per converſionem rationis & invertendo ut differentia rectarum BE, EN ad BE, hoc eſt, per conſtr. ut DB ad BK, ita differentia □rum ex BH, HI ad □tum ex BH. Quoniam verò DB eſt ad BK [e], ſicut ▭ DBH ad ▭ HBK, vel [f], ut duplum ▭ DBH ad duplum ▭ HBK, hoc eſt, ad ▭ HBO: erit quoque differentia □rum ex BH, HI ad □tum ex BH, ſicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO: & per conſequens, per 12. 5, ut exceſſus, quo □tum ex BH ſimul cum duplo ▭ DBH ſuperat □tum ex HI, ad ſummam □ti ex BH & ▭li HBO, hoc eſt, ad ▭ OHB, ita differentia □rum ex BH, HI, ad □tum ex BH, vel ut DB ad BK. Sed ut DB ad BK, ita [g] eſt quoque ▭ DBG ad ▭ KBG. Quocirca ut exceſſus, quo □tum ex BH unâ cum duplo ▭ DBH ſuperat □tum ex HI ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [h] ut ▭ OHB ad exceſſum, quo □tum ex BH unà cum duplo ▭ DBH ſuperat □tum ex HI, ita ▭ KBG ad ▭ DBG. Unde, cum ▭ OHB ſit æquale oſtenſum ▭lo KBG, erit etiam [i] exceſſus, quo □tum ex BH unà cum duplo ▭ DBH ſuperat □tum ex HI, æqualis ▭lo DBG. Ac proinde ſi utrinque addatur □tum ex DB, erit quoque [k] differentia □rum ex DH, HI æqualis dato ſpacio ſeu ▭lo BDG. Quod erat faciendum.

a ꝑ Cor. 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.
c ꝑ Cor. 20. libr. 6. Elem.
d ꝑ Cor. 19. & Cor. 4. libr. 5. Elem.
e ꝑ 1. libr. 6. Elem.
f ꝑ 15. libr. 5. Elem.
g ꝑ 1. libr. 6. Elem.
h ꝑ Cor. 4. libr. 5. Elem.
i ꝑ 14. libr. 5. Elem.
k ꝑ 4 & 3. libr. 2. Elem.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto *h* in recta H*h* aſſumpto.

NOTA,

Cum 7ma Propoſitio in genere doceat, quòd, ſi ſpecies vel exceſſus ſpecierum, quæ à ductis fiunt, ſint dato ſpacio æquales, quæſitum punctum rectam lineam contingat poſitione datam (id quod in binis proximè præcedentibus Problematîs de quadratis tantùm

 oſten-

oſtendimus) : ſciendum erit, poſtquam ex demonſtratione 77^{mæ} Prop^{nis} Datorum Euclidis conſtet, datis ſpecie duabus figuris ad invicem datam rationem habentibus, quadratum quoque cujuſlibet lateris unius ad quadratum cujuſlibet lateris alterius datam rationem habere, quòd, datâ ratione iſtarum figurarum, detur quoque ratio horum quadratorum. Id quod ſimiliter in ſequentibus Problematibus, in quibus de figuris, ſpecie datis, ſermo fit, intelligendum eſt. quo ipſo ſeptimæ Propoſitioni colophonem imponimus.

Hinc:

Concluſio poſterioris partis 8væ Propoſitionis.

Si ab aliquo puncto ad poſitione datas duas parallelas ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis datum ſpatium continentes; vel quarum ſpecies vel exceſſus ſpecierum ſit dato ſpacio æqualis: punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Quod erat demonſtrandum.

S E-

SEQVVNTVR PROBLEMATA IN SECUNDI LIBRI PROPOSITIONES.

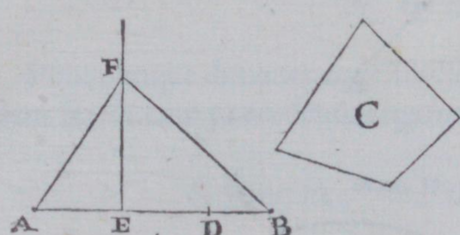
In primam Propoſitionem

I PROBLEMA.

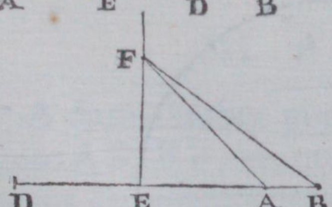
A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, ut illorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ſit æqualis dato ſpatio C.

Conſtructio.

DUctâ A B, fiat ▭ ABD æquale dato ſpacio C, ſeceturque A D bifariam in E. Tum ex E ductâ EF ad angulos rectos ſuper A B, & ex A & B ad aliquod in ea punctum F ductis duabus rectis A F, B F; erit differentia $\square^{rum}$ ex B F, A F æqualis dato ſpacio C.



Demonſtratio.



Per 6. 2^{di} Elem. $\square^{tum}$ ex EB ſuperat $\square^{tum}$ ex A E vel E D, ▭^{lo} ABD, hoc eſt, dato ſpatio C. Sed quoniam inæqualibus adjunctis æqualibus totorum exceſſus æqualis eſt exceſſui eorum, quæ erant à principio, conſtat, addito utrinque communi $\square^{to}$ ex E F, $\square^{ta}$ ex E B, E F, ſimul ſumpta, tantùm excedere $\square^{ta}$ ex AE, EF, ſimul ſumpta, quantum $\square^{tum}$ ex E B excedit

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

a 47. libr. 1. Elem.

dit $\square^{tum}$ ex A E. Sunt autem [a] bina $\square^{ta}$ ex EB, EF æqualia $\square^{to}$ ex BF, & bina $\square^{ta}$ ex AE, EF æqualia $\square^{to}$ ex AF. Quocirca ſi $\square^{tum}$ ex EB excedit $\square^{tum}$ ex A E dato ſpatio C, excedet quoque $\square^{tum}$ ex BF ipſum $\square^{tum}$ ex AF eodem ſpatio C. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto in linea EF aſſumpto, eſtque manifeſtum de omnibus figuris, datâ ſpecie ſuper A F, BF deſcriptis.

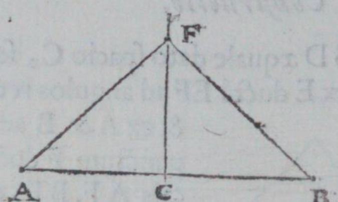
In 1^{mam} Propoſitionem.

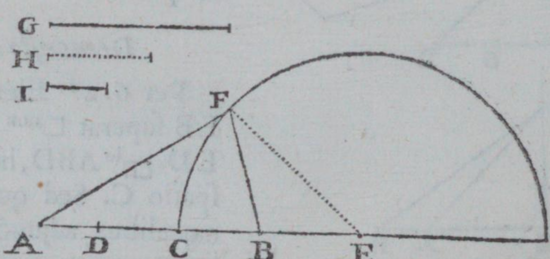
II *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A F, B F, datam inter ſe rationem habentes, A C ad CB.

Conſtructio 1^{mi} caſus.

Primò ſit A C æqualis CB, ductâque C F ipſi A B perpendiculari, agantur ex A & B ad quodlibet in ea punctum F rectæ A F, B F:





eritque A F æqualis B F. Cujus demonſtratio manifeſta eſt ex 4ta 1^{mi} Elementorum.

Con-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio 2^di^ caſus.

Eſto jam A C major quàm C B, lineâ AD; fiatque ut AD ad D C, ita CB ad B E. Tum ex E intervallo C E deſcripto circulo, eductiſque ex A & B ad aliquod in circumferentia punctum F duabus rectis: erit AF ad FB, ut A C ad CB.

Demonſtratio 2^di^ caſus.

Junctâ F E, quoniam per conſtructionem A D eſt ad D C, ut C B ad B E, hoc eſt, componendo [a] A C ad C D vel C B, ut C E ad E B: erit quoque per 12.5. AE ad CE, hoc eſt, EF, ſicut CE vel E F ad EB. Hinc cum $\triangle^{rum}$ A E F, FEB, communem habentium angulum E, latera circa ipſum proportionalia ſint: erunt quoque [b] reliqua latera A F, FB ad ſe invicem, ut A E ad E F, vel E F, hoc eſt, C E, ad E B. Sed ut CE ad EB, ita eſt AC ad CB. Quapropter erit ut A F ad FB, ita A C ad C B. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto F in circumferentia aſſumpto.

a p 18. libr. 5. Elem.

b p 6. libr. 6. Elem.

Quod ipſum aliter quoque demonſtratum reperitur ab Eutocio in principio Commentariorum ſuorum in Apollonii Conica.

NOTA.

Hinc quoque dimanat conſtructio ſequentis Problematis, ejuſdem fermè cum præcedente argumenti.

Adhuc in 1^mam^ Propoſitionem.

III PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A F, B F, ut, quæ ab ipſis fiunt, datam inter ſe habeant rationem G ad I.

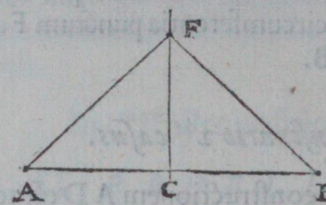
Primò, ſi G ſit æqualis I, agatur, ut ante, ex C, medio ipſius AB ad ipſam perpendicularis C F: ductiſque ex A & B ad aliquod in ea punctum F rectis AF, BF, erunt, propter harum æqualitatem, etiam

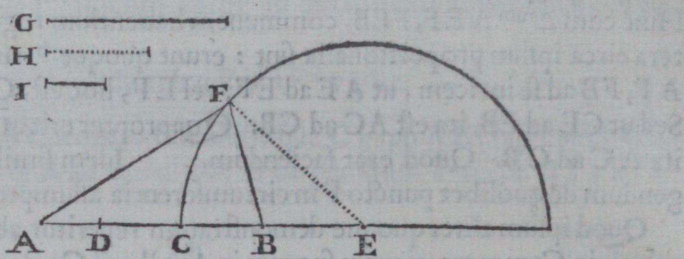
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quæ ab ipſis fiunt quadrata ſibi invicem æqualia, cadetque punctum F, ut in 1mo caſu præcedentis Problematis, in rectam CF.

a p 13. libr. 6. Elem.
b p 10. libr. 6. Elem.

Sin autem G major ſit quàm I, inventâ [a] inter G & I mediâ proportionali H, ſecetur AB in C [b], ita ut AC ſit ad CB, ſicut G ad H:





c p 22. libr. 6 Elem.
d p Cor. 20. libr. 6. Elem.

eritque, ſi fiat, ut ante, AF ad FB, ſicut AC ad CB, [c] ut □tum ex AF ad □tum ex FB, ſic □tum ex AC ad □tum ex CB, vel □tum ex G ad □tum ex H, id eſt [d], ſicut G ad I. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto F, in circumferentia aſſumpto.

Eodem modo patet: ſi à duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, habeantque figuræ, datâ ſpecie ſuper ipſis deſcriptæ, datam inter ſe rationem, punctum quæſitum contingere rectam lineam aut circuli circumferentiam.

Hinc:

Concluſio 1mæ Propoſitionis.

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, ut illorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ſit æqualis dato ſpatio, punctum inflexionis continget rectam lineam poſitione datam. At verò rectam lineam aut circuli circumferentiam, ſi inflexæ, vel quæ ab ipſis fiunt, datam inter ſe habeant rationem.

Quod erat demonſtrandum.

In

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

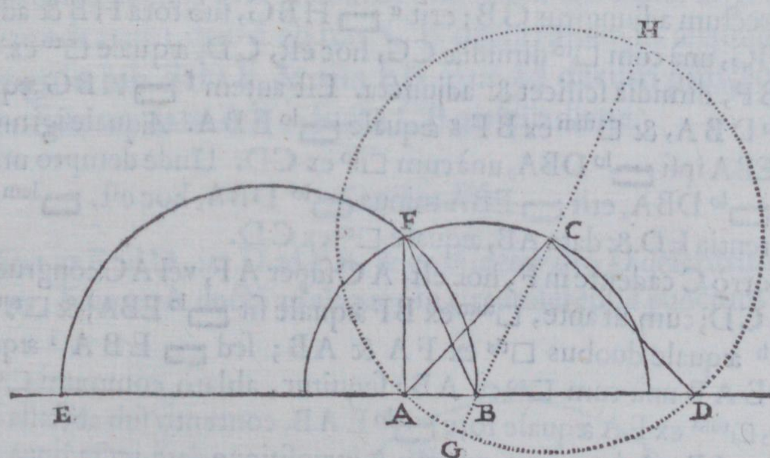
In 2dam Propoſitionem.

IV *PROBLEMA.*

A dato puncto A in poſitione data recta linea A D rectam lineam terminatam ducere AC, ita ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam A D ducatur alia C D ipſi æqualis, id quod ab ea fit æquale ſit rectangulo ſub data A B, & alia E D, quæ ad datum punctum E in poſitione data AD à ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

Inventâ mediâ proportionali B F inter E B & B A, deſcribatur ex B intervallo B F circulus C F, ductâque ex A ad aliquod in circumfe-



1ma *figura.*

rentia punctum C rectâ A C, & ex C rectâ C D æquali C A: erit □tum ex CD æquale ▭lo ſub A B, E D.

Demonſtratio.

Deſcripto enim ex C intervallo C D vel C A circulo A G D H, juncta C B occurrat producta circumferentiæ in G & H, eritque in 1ma fig., cum G H ſic bifariam ſit ſecta in C, & non bifariam in B, a ▭ GBH, ſub inæqualibus ſegmentis, unà cum □to ex B C vel B F, in-

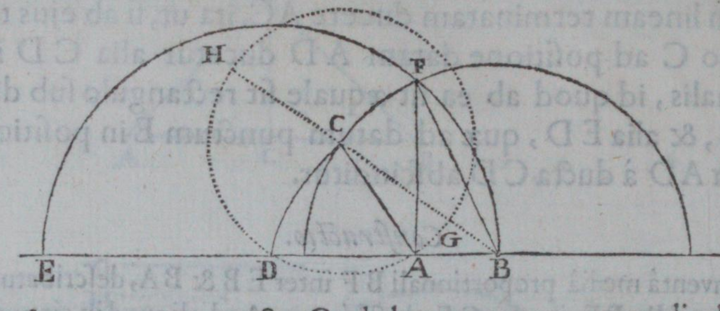
a p 5. *libr.* 2. *Elem.*

b ꝑ 35. libr. 3. Elem. intermedia ſectionis, æquale □^{to} dimidiæ GC, hoc eſt, CD. Eſt autem [b] ▭ GBH æquale ▭^{lo} ABD, & □^{tum} ex BF æquale ▭^{lo} ABE. Æquale igitur eſt □^{tum} ex CD duobus ▭^{lis} ABD & ABE, hoc eſt, [d] æquale ▭^{lo} ſub tota ED & data AB.

c ꝑ Cor. 8. Sexti, & 17. lib. 6. Elem.

d ꝑ 1. libr. 2. Elem.

2da figura.



Aſſumpto autem puncto C ad alteram partem perpendicularis AF, ut in 2da fig. quoniam ſic GH bifariam ſecatur in C, eidemque in directum adjungitur GB: erit [e] ▭ HBG, ſub tota HB & adjuncta BG, unà cum □^{to} dimidiæ CG, hoc eſt, CD, æquale □^{to} ex CB vel BF, dimidia ſcilicet & adjuncta. Eſt autem [f] ▭ HBG æquale ▭^{lo} DBA, & □^{tum} ex BF [g] æquale ▭^{lo} EBA. Æquale igitur eſt ▭ EBA ipſi ▭^{lo} DBA, unà cum □^{to} ex CD. Unde dempto utrinque ▭^{lo} DBA, erit ▭ EBA minus ▭^{lo} DBA, hoc eſt, ▭^{lum} ſub differentia ED & data AB, æquale □^{to} ex CD.

e ꝑ 6. lib. 2. Elem.

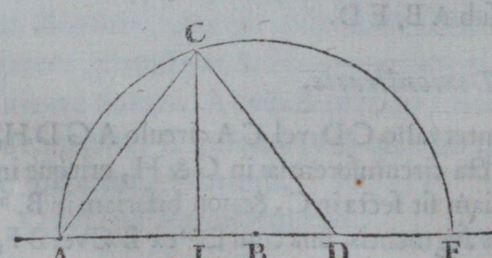
f ꝑ Cor. 36. libr. 3. Elem.

g ꝑ Cor. 8, & 17. libr. 6. Elem.

Porrò C cadente in F, hoc eſt, AC ſuper AF, vel AC congruente cum CD; cum, ut ante, □^{tum} ex BF æquale ſit ▭^{lo} EBA; & □^{tum} ex BF [h] æquale duobus □^{tis} ex FA & AB; ſed ▭ EBA [i] æquale ▭^{lo} EAB unà cum □^{to} ex AB: ſequitur, ablato communi □^{to} ex AB, □^{tum} ex FA æquale fore ▭^{lo} EAB, contento ſub abſciſſa EA & data AB. A dato ergo puncto A in poſitione data recta linea &c. Quod erat faciendum.

h ꝑ 47. libr. 1. Elem.

i ꝑ 3. libr. 2. Elem.



Eodem modo, ſi ex A ſit ducenda recta AC, & ex ejus termino C alia CD ipſi æqualis; ita ut □^{tum} ab ea deſcriptum ſit æquale ▭^{lo} ſub data AB & linea AD, quæ à ducta CD ad punctum A abſcin-

inditur: oportet tantùm ex B intervallo B A deſcribere circulum ACF, & ex A ad aliquod in circumferentia punctum C ducere rectam A C, tum C D eidem æqualem, eritque □tum quod ab ipſa deſcribitur æquale ▭lo ſub data A B & abſciſſa A D. Quod manifeſtum eſt demittendo ex C ſuper AB perpendicularem C I.

Eſt enim [k] □tum ex A C vel CD æquale ▭lo F A I vel B A D, ut requirebatur. Id quod ſimiliter de quolibet in circumferentia puncto eſt intelligendum. *k p Cor. 8. Sexti, ut & 17. Sexti Elem.*

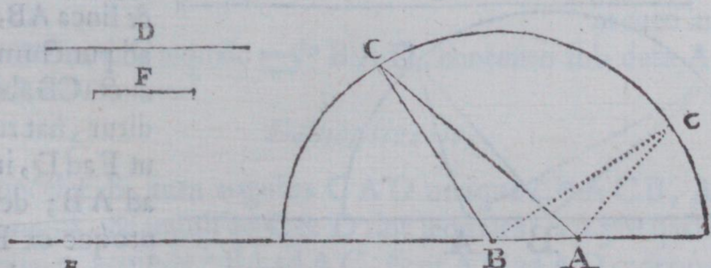
Aliud in 2dam Propoſitionem.

V *PROBLEMA.*

A dato puncto A in poſitione data recta linea A B rectam lineam ducere AC, ita ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam AD ducatur alia recta CB datæ D æqualis, quadratum, quod ab hac C B deſcribitur, ſit æquale rectangulo ſub data F, & alia EB, quæ ad datum punctum E in poſitione data A B à ducta CB abſcinditur.

Conſtructio.

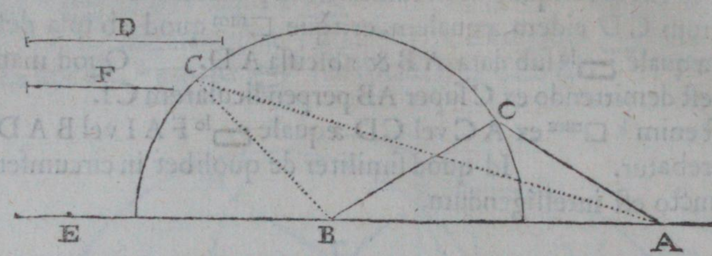
Fiat ut F ad D, ita D ad EB, & ex B intervallo D deſcribatur circulus. Tum ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum C re-

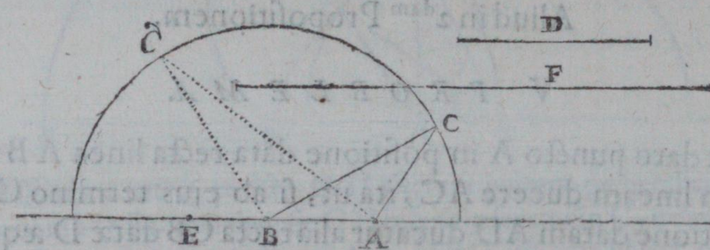


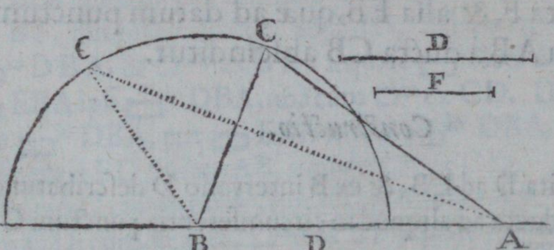
ctâ A C, & à C ad B rectâ C B: erit □tum quod ab ipſa deſcribitur æquale ▭lo contento ſub data F & abſciſſa E B.

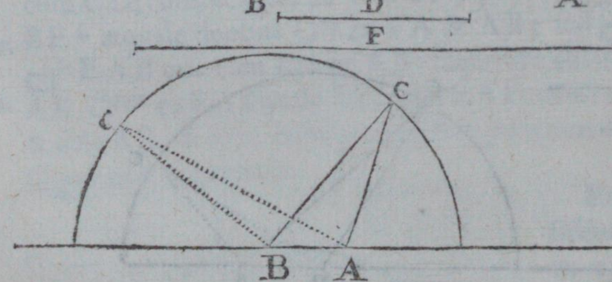
Quod erat faciendum.

Idem liquet de quolibet puncto C in circumferentia aſſumpto.









Ad eundem modum, ſi ex A ſit ducenda recta AC, & ex C alia CB datæ D æqualis, cujus $\square^{tum}$ ſit æquale $\square^{lo}$ ſub data F & linea AB, quæ ad punctum A à ductaCB abſcinditur, fiat rurſus ut F ad D, ita D ad AB; deſcriptoque ex B, ut ante, circulo intervallo D, & ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum rectâ AC, tum CB: erit ipſa datæ D æqualis, & $\square^{tum}$ ab ea deſcriptum [a] æquale $\square^{lo}$ contento ſub lineis F & AB. ut requirebatur. Quod ſimiliter de quolibet in circumferentia puncto eſt intelligendum.

a ℘ 17. libr. 6. Elem.

Ad-

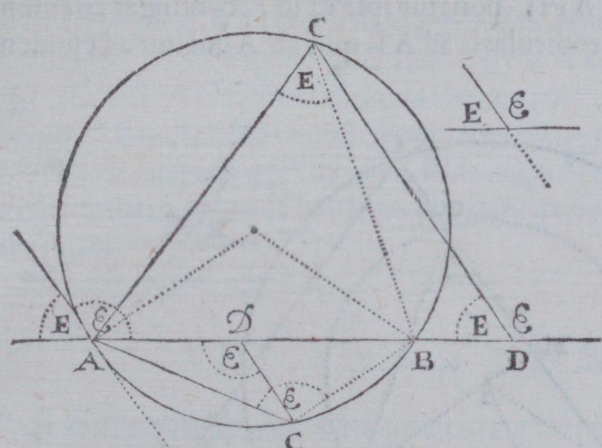
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Adhuc aliud in 2^{dam} Propoſitionem.

VI *PROBLEMA.*

A dato puncto A in poſitione data recta linea A D rectam ducere lineam A C, ita, ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam A D ducatur alia C D in dato angulo E, quadratum à primò ducta A C deſcriptum ſit æquale rectangulo ſub data AB & alia A D, quæ ad datum punctum A in poſitione data AD ab ultimò ducta CD abſcinditur.

Conſtructio.



Deſcripto ſuper A B per 33. 3^{tii} Elem., vel per 2 Probl. 1^{mi} hujus ſegmento circuli ACB, quod capiat angulum A C B æqualem dato E; ductâque ex A ad aliquod in circumferentia punctum C rectâ AC, & ex C rectâ C D in dato angulo E: erit □^{tum} ex A C æquale ▭^{lo} B A D, contento ſub data A B & abſciſſa A D.

Demonſtratio.

Junctâ C B, cum angulus C A D utrique △^{lo} A C B, A D C ſit communis, & anguli ad C & D ſint æquales: erit 3^{tius} quoque 3^{tio} [a] æqualis, ac proinde [b] BA ad A C, ſicut A C ad A D: adeoque ▭^{lum} ſub extremis B A, A D [c] æquale □^{to} mediæ A C. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter conſtat de quolibet puncto C in circumferentia circuli A C B C aſſumpto.

a ꝑ Cor. 32. libr. 1. Elem.
b ꝑ 4. libr. 6. Elem.
c ꝑ 17. libr. 6. Elem.

Eodem fermè modo ſolvitur ſequens.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

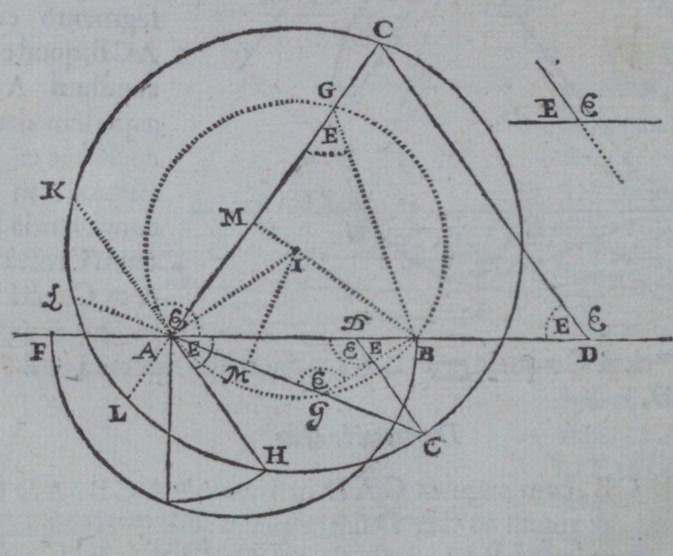
VII *PROBLEMA.*

A dato puncto A in poſitione data recta linea A D rectam lineam terminatam ducere A C, ita, ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam A D ducatur alia recta C D in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C æquale ſit rectangulo ſub data A B & alia F D, quæ ad datum punctum F in poſitione data A D ab ultimò ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

a p. 33. libr. 3. Elem, vel 2 Probl. 1mi hujus.

Deſcripto, ut ante, ſuper A B [a] ſegmento circuli A G B, quod capiat angulum dato angulo E æqualem, inventâque inter F A, A B mediâ proportionali A H; ponatur ipſa ut in A contingat circulum A G B, hoc eſt, perpendicularis ad A I, quæ ab A ducitur ad ejuſdem



centrum I; deſcriptoque ex I per punctum H circulo HLKC, & ex A ad aliquod in ejus circumferentia punctum C ductâ rectâ A C, tum ex C rectâ C D in dato angulo E: erit $\square^{tum}$ ex A C æquale ▭^{lo} ſub data AB & abſciſſa FD.

Demonſtratio.

Productis H A, C A donec circumferentiæ occurrant in K & L, demiſsâque ex I ſuper AG perpendiculari IM, jungatur GB. Quoniam itaque angulus C A D utrique △^{lo} AGB, ADC communis eſt, & angulus ad G æqualis angulo ad D, erit quoque 3^{tius} 3^{tio} æqualis [b], ac proinde [c] BA ad AG, ſicut AC ad AD, & per conſequens [d] ▭^{lum} ſub extremis B A, A D æquale ▭^{lo} ſub mediis C A, A G. Porrò cum IM ſit perpendicularis ad AG, erit AM [e] æqualis MG, ut & LM æqualis M C, quibus à ſe invicem ſubductis, erit quoque L A æqualis G C. Eodem modo, cum I A per conſtructionem ſit perpendicularis ad HK, erit quoque HA æqualis AK. Hinc cum ▭ CAL, hoc eſt, A C G [f], ſit æquale ▭^{lo} K A H, hoc eſt, □^{to} ex A H; & hoc ſit æquale ▭^{lo} F A B [g]: erit etiam ▭ ACG æquale ▭^{lo} F A B. Eſt autem ▭ C A G æquale oſtenſum ▭^{lo} B A D. Quare cum [h] duo ▭^{la} C A G, A C G ſimul ſumpta ſint æqualia □^{to} ex A C; itemque duo ▭^{la} BAD, FAB [i] ſimul ſumpta æqualia ▭^{lo} ſub A B, F D: erit □^{tum} ex AC æquale ▭^{lo} ſub AB, FD. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter patet de quolibet puncto *c* in circumferentia HLKC aſſumpto.

b ꝑ Cor. 32. libr. 1. Elem.
c ꝑ 4. libr. 6. Elem.
d ꝑ 16. libr. 6. Elem.
e ꝑ 3. libr. 3. Elem.
f ꝑ 35. libr. 3. Elem.
g ꝑ Conſtr. & 17. libr. 6. Elem.
h ꝑ 2. libr. 2. Elem.
i ꝑ 1. libr. 2. Elem.

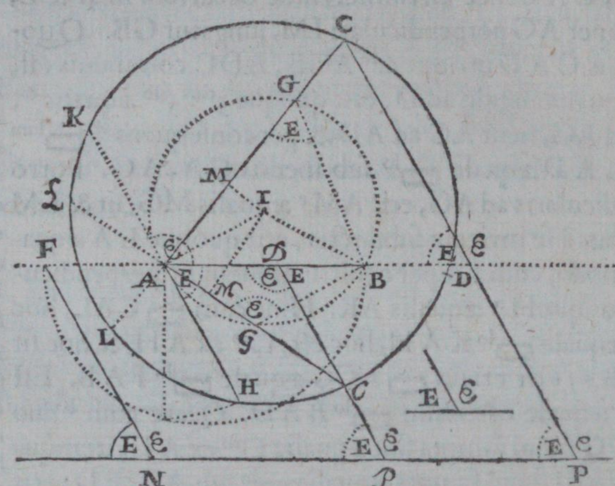
His adjunge ſequens.

VIII *PROBLEMA.*

A dato puncto A extra poſitione datam rectam lineam NP rectam lineam terminatam ducere A C, ita ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam NP alia ducatur recta CP in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C ſit æquale rectangulo ſub data AB & alia NP, quæ ad datum punctum N in poſitione data NP ab ultimò ducta CP abſcinditur.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Conſtructio.



Etenim ductâ per A rectâ FD parallelâ NP, in eaque aſſumptâ AB æquali datæ, agatur ex N recta NF in dato angulo E, donec occurrat ipſi FD in F: eritque, operando ulteriùs ut in præcedenti Probl., □tum ex AC æquale ▭lo ſub AB & FD, hoc eſt, NP, ut requirebatur. Cujus demonſtratio liquet ex præcedenti, & ad quodlibet punctum C in circumferentia aſſumptum referri poteſt.

Hinc:

Concluſio 2dæ Propoſitionis. Si ſit poſitione data recta linea, & è dato in ipſa puncto ducatur recta linea terminata, & ab ejus termino alia ad poſitione datam, quæ vel eidem vel alii datæ ſit æqualis; ita ut, quod ab ipſa fit, ſit æquale rectangulo ſub data & alia, quæ vel ad datum punctum, vel ad aliud in poſitione data abſcinditur, continget ejus terminus circuli circumferentiam, poſitione datam.

Quod erat demonſtrandum.

Similiter liquet:

Additamentum. Si ſit poſitione data recta linea, & à puncto in vel extra ipſam dato agatur recta linea terminata, ita ut, quod ab ipſa fit ſit æquale rectangulo ſub data & alia, ad datum punctum in poſitione data, aliudvè in ipſa datum, abſciſsâ à recta linea, quæ à primæ termino in dato angulo ad poſitione datam ducitur: continget ejus terminus circumferentiam circuli poſitione datam.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

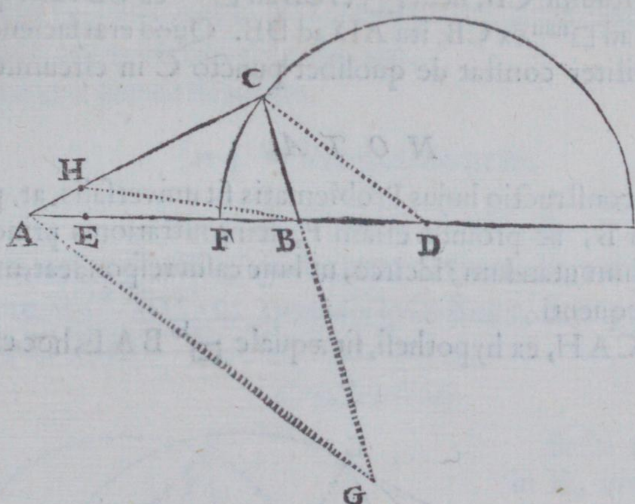
In 3^{tiam} Propoſitionem.

IX *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AC, BC; ita ut, quod ab una AC efficitur, eo quod fit ab altera BC, ſit dato ſpatio BAE majus, quàm in ratione data AD ad DB.

Conſtructio.

Inventâ inter ED, DB mediâ proportionali FD, deſcribatur ex D intervallo FD circulus FC; ductiſque ex A & B ad aliquod in cir-



cumferentia punctum C rectis AC, BC: dico exceſſum, quo $□^{tum}$ ex AC ſuperat ▭ BAE, eſſe ad $□^{tum}$ ex BC, ſicut AD ad DB.

Præparatio ad demonſtrationem.

Junctâ CD, agatur ex A eidem parallela AG, donec ipſi CB productæ occurrat in G. Deinde facto $▭^{lo}$ CAH æquali $▭^{lo}$ BAE, ducatur BH; demptoque CAH, hoc eſt, BAE, à $□^{to}$ ex AC: dico reliquum ▭ ACH ad $□^{tum}$ ex CB eſſe, ſicut AD ad DB.

Demonſtratio.

Cum ex hypotheſi ▭ CAH ſit æqnale $▭^{lo}$ BAE: erunt [a] puncta H, E, B, C in circuli circumferentia. Similiter, cum $□^{tum}$ ex FD vel DC [b] ſit æquale $▭^{lo}$ EDB, continget DC circumferentiam circuli, *a p Cor. 36. libr. 3. Elem.* *b p Conſtr. & 17. libr. 6. Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

c ꝑ 37. *libr. 3. Elem.* d ꝑ 32. *libr. 3. Elem.* e ꝑ 29. *libr. 1. Elem.* f ꝑ 13. *libr. 1. Elem.* g ꝑ *Cor.* 22. *libr.* 3 *Elem.* h ꝑ *Cor.* 36. *libr.* 3 *Elem.* i ꝑ 4. *libr.* 6. *Elem.* k ꝑ 18. *libr.* 5. *Elem.* l ꝑ 1. *libr.* 6. *Elem.*

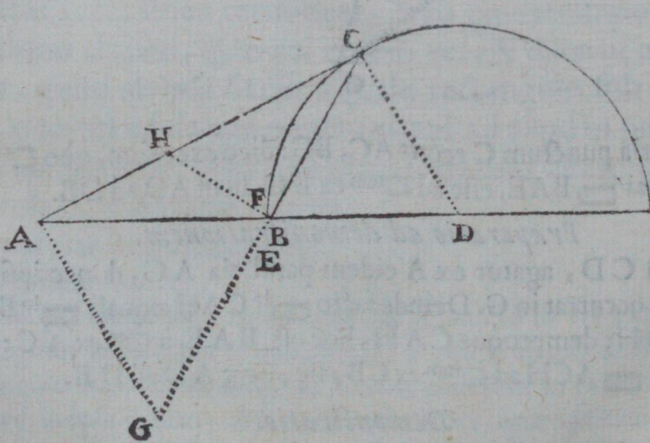
culi, per 3ª puncta E, B, C deſcripti, in C c. Hinc, quoniam circulus per 3ª puncta E, B, C tranſiens tranſire quoque eſt oſtenſus per 4tum punctum H: erit angulus B C D ad contactum d æqualis angulo BHC in alterno circuli ſegmento. Eſt autem angulus BCD e æqualis angulo G. Quocirca æquales etiam inter ſe ſunt anguli B H C & G. Porrò cum angulus B H C ſimul cum angulo B H A, qui ei eſt deinceps f, ſit æqualis 2bus rectis: erunt ſimiliter anguli A H B & G duobus rectis æquales, ac proinde g quadrilaterum A H B G in circulo, atque ideo h ▭ ACH æquale ▭lo G C B. Denique cum propter ſimilia △la A B G, B C D i, A B ſit ad B D, ſicut G B ad B C; & componendo k A D ad D B, ſicut G C ad C B, hoc eſt l, aſſumptâ communi altitudine CB, ſicut ▭ GCB ad □tum ex CB: erit quoque ut ▭ ACH ad □tum ex CB, ita AD ad DB. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter conſtat de quolibet puncto C in circumferentia aſſumpto.

NOTA.

Quamvis conſtructio hujus Problematis ſit univerſalis, at, puncto E cadente in B, ac proinde etiam F, demonſtrationis principium nonnihil ſit immutandum: idcirco, ut huic caſui reſpondeat, mutetur illud modo ſequenti.

Cum ▭ C A H, ex hypotheſi, ſit æquale ▭lo B A E, hoc eſt, □to



m ꝑ 37. *libr. 3. Elem.*

ex A B : continget A B m circuli circumferentiam, per 3ª puncta H, B,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

H, B, C tranſeuntem, in B; eritque [n] angulus CBD ad contactum æqualis angulo BHC, in alterno circuli ſegmento. Hinc, cum [o] angulus CBD ſit æqualis angulo DCB, erunt etiam anguli BHC & DCB inter ſe æquales. Eſt autem angulus BCD æqualis angulo G, &c.

n p 32. libr. 3. Elem.
o p 5 libr. 1. Elem.

Quod autem hîc demonſtratum eſt de $\square^{tis}$ ſuper AC & CB deſcriptis, intelligendum quoque erit de aliis figuris, datâ ſpecie ſuper ipſas deſcriptis.

Hinc:

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, & ſit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato majus quàm in ratione data: punctum inflexionis continget poſitione datam circumferentiam. *Concluſio 3^tiæ Propoſitionis.*

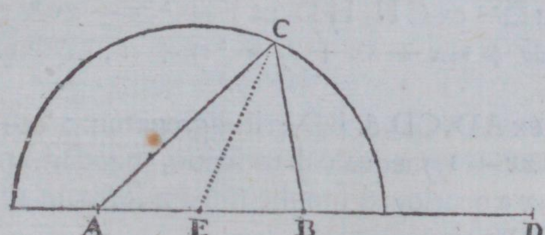
Quod erat demonſtrandum.

In 4^tam Propoſitionem.

X *PROBLEMA.*

A duobus pluribuſvé datis punctis A, B rectas lineas inflectere AC, BC; ut, quæ ab ipſis fiunt, ſint æqualia dato ſpatio DAB.

Conſtructio.



Sectâ AB bifariam in E, inveniatur inter AE, ED media proportionalis EC; deſcriptoque ex E intervallo EC circulo, ductiſque à punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum C rectis AC, BC: erunt, quæ ab ipſis fiunt $\square^{ta}$, ſimul ſumpta, æqualia dato ſpatio DAB.

Demonſtratio.

Junctâ EC, erunt [a] bina $\square^{ta}$ ex AC, CB dupla $\square^{rum}$ ex AE, EC ſimul ſumptorum. Eſt autem $\square^{tum}$ ex EC [b] æquale ▭^{lo} AED, & $\square^{tum}$ ex AE unà cum ▭ AED [c] æquale ▭^{lo} DAE. Æqualia igitur ſunt bina $\square^{ta}$ ex AC, CB duplo ▭^{lo} DAE. Hinc, cum ▭ DAB

a p 18. Prop. 2dæ partis, Primi tractatus.
b p Conſtr. & 17. libr. 6. Elem.
c p 3. libr. 2. Elem.

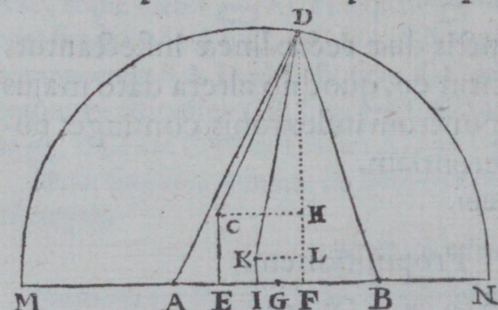
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

duplum quoque ſit ▭^{li} DAE: erunt bina □^{ta} ex A C, C B æaliqua ▭^{lo} D A B. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto C, in circumferentia circuli aſſumpto.

Sequitur reſolutio atque operatio Problematis.

A datis 3^{bus} punctis A, C, & B tres rectas lineas inflectere A D, C D, & B D, ut quæ ab ipſis fiunt quadrata, ſimul ſumpta, ſint dato ſpatio æqualia.



Demiſsâ ex C ſuper AB perpendiculari CE, ſecetur A B bifariam in G, ponaturque A G vel GB $\propto a$, EG $\propto b$, & EC $\propto c$. Deinde ad inveniendum punctum D, ſit GF $\propto x$, & perpendicularis D F $\propto y$: eritque A F $\propto a + x$, cujus □^{to} $aa + {}_2ax + xx$ ſi addatur □^{tum} ex D F, fit [d] $aa + {}_2ax + xx + yy$, □^{tum} ex AD.

d p 47. libr. 1. Elem.

Eodem modo, cum G B ſit $\propto a$, & GF $\propto x$: erit F B $\propto a - x$; cujus □^{to} $aa - {}^2ax + xx$ ſi addatur □^{tum} ex D F $\propto yy$, fit $aa - {}^2ax + xx + yy$, □^{tum} ex D B.

Similiter addendo bina □^{ta} ex C H, H D, ut $bb + {}^2bx + xx$ & $yy - {}^2cy + cc$, erit ſumma $bb + {}^2bx + xx + yy - {}^2cy + cc$, □^{tum} ex C D.

Hinc, additis 3^{bus} □^{tis} ex AD, CD, & BD, erit aggregatum $2\,aa + bb + cc + {}^2bx - {}^2cy + {}^3xx + {}^3yy$ æquale dato ſpatio, quod ſit $2aa + {}^2bb + {}^2cc + \frac{4}{3}dd$. Quæ æquatio, ad ſimpliciſſimam formam reducta, erit

$$yy \propto + \tfrac{2}{3}cy + \tfrac{1}{3}bb + \tfrac{1}{3}cc + \tfrac{4}{9}dd - \tfrac{2}{3}bx - xx.$$

Ad quam ſolvendam cum nulla in Problemate ſuperſit materia perveniendi ad æquationem pro x: argumentum eſt, Problema propoſitum non eſſe penitus determinatum, ſed infinita eſſe puncta, ut D, quæſito ſatisfacientia. Quæ igitur omnia inveniuntur, ſubinde ſu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſumendo ad arbitrium aliam atque aliam lineam pro x. Quocirca y æquali exiſtente $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$, cum pro $\frac{1}{3}bb$ poni poſſit $\frac{4}{9}bb - \frac{1}{9}bb$, poterit pro $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$ ſcribi $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. Oſtendens longitudinem lineæ D F, prout x indeterminata exiſtit, ac proinde G F ad arbitrium ſumitur.

Atque ita videre eſt, datis quotcunque punctis, ſemper ejuſmodi terminos inveniri; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque $+$ & $-$ diverſimodè mutari.

Conſtructio.

Ad conſtructionem fiat I G $\infty \frac{1}{3}b$, & ex I erectâ ſuper A B perpendiculari I K $\infty \frac{1}{3}c$, deſcribatur centro K intervallo $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$ circulus M D N, & quodlibet in circumferentia punctum D quæſito ſatisfaciet. Quod manifeſtum eſt ſumendo KD $\infty \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$, & K L, hoc eſt, I F $\infty \frac{1}{3}b + x$: nimirum, æqualem radici ex $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$. quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}b = x$, quando perpendicularis D F cadit inter G & I, vel extra I, quemadmodum illam hîc inter G & B ſumpſimus. Unde L D fit $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$, & DF $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. qualem illam hîc invenimus, vel etiam $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, ſi $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt majus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Demonſtratio.

$=$ ſignificat differentiã inter $\frac{1}{3}b$ & x, cum non exprimitur aut cognoſcitur penes quas ſit exceſſus.

Quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, quando $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt minus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Porrò notandum, pro dato ſpatio ſumi potuiſſe $2aa + {}^{2}bb + {}^{2}cc - \frac{4}{3}dd$, nimirum, minus duobus $\square^{tis}$ ex A C, CB: ſicut hoc loco illud majus aſſumpſimus, ſine reliqui immutatione.

Id quod oſtendit, quo pacto à datis tribus vel pluribus punctis ad unum punctum rectæ lineæ duci poſſint, quarum $\square^{ta}$, ſimul ſumpta, ſint dato ſpatio æqualia. Quod erat faciendum.

Denique cum in 4ta Propoſitione in genere fiat ſermo de figuris datâ ſpecie ſuper ductas deſcriptis: id, quod hîc ſpeciatim de $\square^{tis}$ oſtendimus, aliis quoque figuris datæ ſpeciei applicare licebit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quoniam enim per 49 Prop^{nem} Datorum Euclidis, ſi ab eadem recta duo rectilinea quælibet datâ ſpecie deſcribantur, ipſa ad invicem rationem habent datam: ſequitur, ſi rationem □^{ti} ex A D ad figuram datâ ſpecie ſuper A D deſcriptam ponamus ut e ad f; eamque □^{ti} ex C D ad datâ ſpecie figuram ſuper C D ut e ad g; & denique rationem □^{ti} ex B D ad figuram ſpecie datam ſuper B D ut e ad h, ſummam harum trium figurarum fore

$$\frac{aaf + 2afx + fxx + fyy, + bbg + 2bgx + gxx + gyy - 2cgy + ccg, + aah - 2ahx + hxx + hyy.}{e}$$

Hinc ſi datum planum ſupponamus eſſe dd, æquatio ad legitimam formam reducta, erit

$$yy \propto + \frac{2cgy}{f+g+h} + \frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h} \quad \frac{-2afx - 2bgx + 2ahx}{f+g+h} \quad - xx.$$

8 ſignificat + vel —.

Vel in ſimplicioribus terminis: $yy \propto + 2iy + kk$
8 $2lx$
$- xx.$

Hoc eſt, ſcribendo $2i$ pro $\frac{2cg}{f+g+h}$, & kk pro $\frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h}$, & + vel − $2l$ pro $\frac{-2af - 2bg + 2ah}{f+g+h}$. Datis enim omnibus hiſce quantitatibus, licebit iis ad arbitrium nomina imponere. Quocirca cum hæc æquatio non ſit diverſæ formæ à præcedente, continget punctum D, ut ante, circumferentiam circuli poſitione datam. Idem ſimiliter liquet de quotcunque punctis.

Concluſio 4^{tæ} Propoſitionis.

Hinc:

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & ſint ſpecies, quæ ab omnibus fiunt, dato ſpatio æquales: continget punctum poſitione datam circumferentiam.

Quod erat demonſtrandum.

In

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

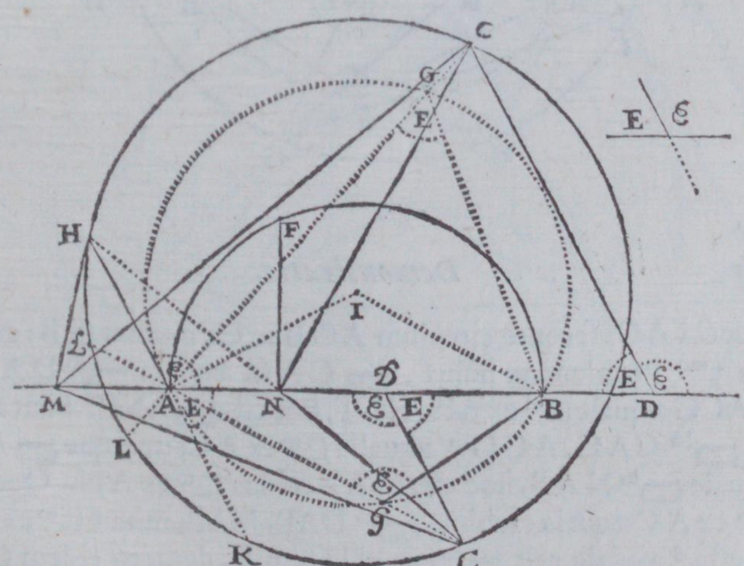
In 5^{tam} Propoſitionem.

XI *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis M, N in poſitione data recta linea AD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, ſi à puncto inflexionis C ducatur recta CD in dato angulo E ad poſitione datam AD, quadrata ab inflexis MC, NC æqualia ſint rectangulo ſub data 2 AB, & alia MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum M, vel aliud quodpiam in poſitione data AD ab ultimò ducta CD abſcinditur.

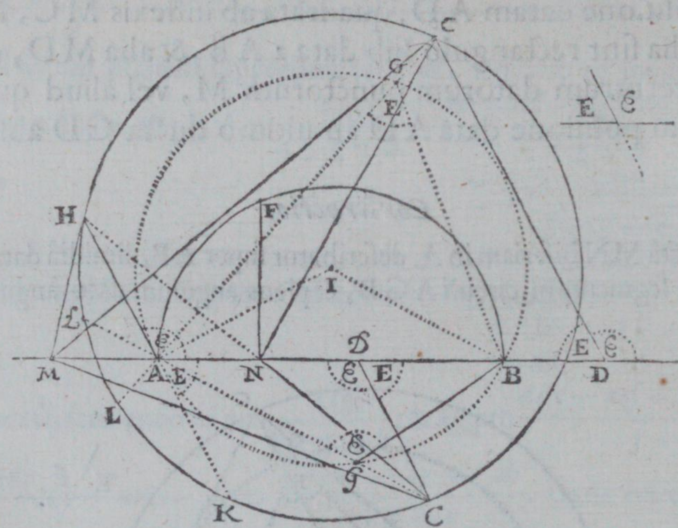
Conſtructio.

Sectâ MN bifariam in A, deſcribatur ſuper AB, dimidiâ datæ rectæ, [a] ſegmentum circuli AGB, capiens angulum dato angulo E *a p 33. libr. 3. Elem. vel per 2 Probl. 1^{mi} huius.*



æqualem: inventâque inter AN, NB mediâ proportionali NF, eâque poſitâ ab A ad H, (hoc eſt, in linea AH, quæ cum MA angulum facit

facit dato angulo E æqualem) deſcribatur ex I centro circuli A G B per H circulus H C K L: Dico, ſi à punctis M, N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ MC, NC, tum recta C D ipſi A H parallela, hoc eſt, in dato angulo E, quòd □^{ta} ipſarum M C, N C ſimul ſumpta ſint æqualia ▭^{lo} contento ſub data 2 A B & abſciſſa M D.



Demonſtratio.

Junctâ A C, ſecante circulum A G B in G, ducatur G B: eritque ut in 7mo Problemate hujus, ▭ C A G æquale ▭^{lo} D A B, & ▭ A C G æquale □^{to} ex A H vel N F, hoc eſt, ▭ A N B. Sunt autem bina ▭^{la} C A G, A C G [b] æqualia □^{to} ex A C; itemque ▭ A N B [c] æquale ▭^{lo} N A B, hoc eſt, M A B minus □^{to} ex A N. Quocirca □^{tum} ex A C æquale eſt binis ▭^{lis} D A B, M A B, minus □^{to} ex A N, hoc eſt, [d] æquale erit ▭^{lo} ſub M D & A B, dempto eidem □^{to} ex A N. Atque adeò □^{tum} ex A C minus eſt ▭^{lo} ſub M D, A B quadrato ex A N; hoc eſt, erit illud unà cum □^{to} ex A N æquale ▭^{lo} ſub M D, A B. Hinc cum [e] bina □^{ta} ex M C, C N ſint binorum □^{torum} ex C A, A N dupla: erunt □ ex M C, C N ſimul ſumpta æqualia duplo ▭^{lo}

b ꝑ 2. *libr.* 2. *Elem.*

c ꝑ 3. *libr.* 2. *Elem.*

d ꝑ 1. *libr.* 2. *Elem.*

e ꝑ 18 *Prop.* 2^{dæ} *partis* 1^{mi} *tractat.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

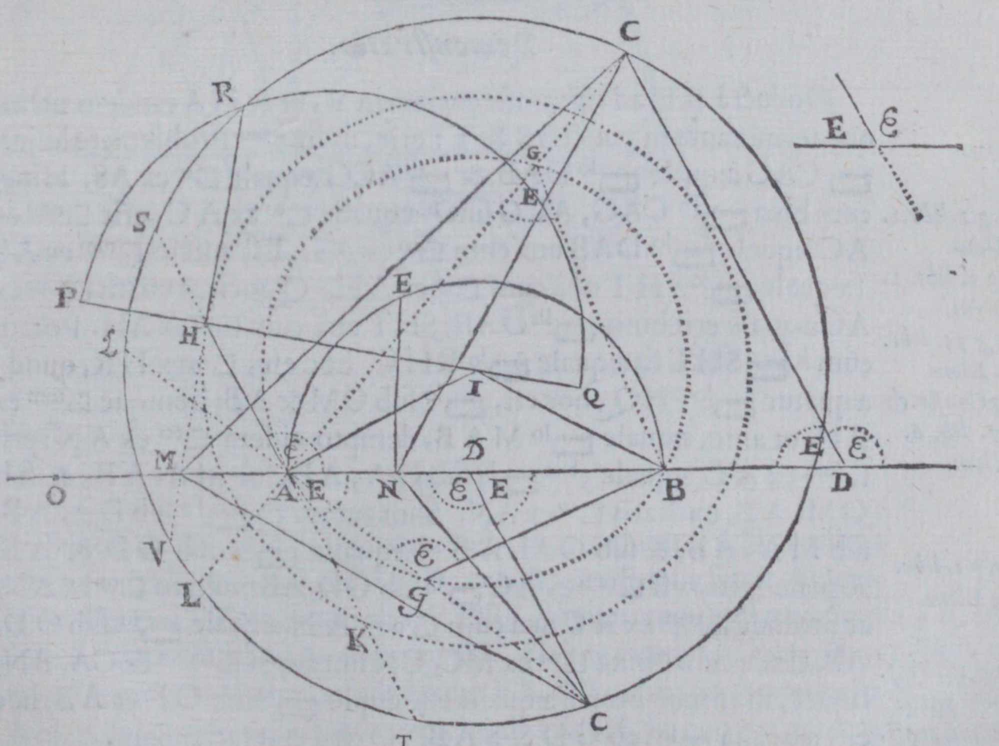
▭^{lo} ſub M D, A B, hoc eſt, æquale ▭^{lo} ſub M D & 2 A B. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in circumferentia circuli HCKL aſſumpto.

Eodem modo invenitur punctum C, cùm bina □^{ta} ex M C, N C æqualia requiruntur ▭^{lo} ſub data 2 A B & linea N D, quæ à ducta C D ad alterum datum punctum N abſcinditur. Quo caſu manente eâdem figurâ punctum C cadet in circumferentiam minoris ſegmenti, prout illâ inverſâ tantùm litera M in N, & N in M tranſmutatæ fuerint, ad quæſitum obtinendum.

NOTA.

Quod attinet ad demonſtrationem puncti H, illa ſic abſolvitur: Ductis duabus lineis M H, N H, quoniam □^{tum} ex H A æquale eſt *Nota. In hac figura lineam N H omiſſam eſſe.*



▭^{lo} A N B: erunt, addendo utrique □^{tum} ex A N, bina □^{ta} ex H A, A N [f] æqualia ▭^{lo} B A N ſeu B A M. Unde, cum [g] bina □^{ta} ex M H, H N dupla ſint binorum □^{torum} ex H A, A N, erunt ipſa æqualia duplo ▭^{lo}

f ꝑ 3. libr. 2. Elem.

g ꝑ 18 Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.

▭^{lo} B A M, hoc eſt, æqualia ▭^{lo} ſub data 2 A B & recta A M, quæ à ducta A H ad datum punctum M in poſitione data A B abſcinditur. ut requirebatur.

Sequitur Conſtructio & Demonſtratio, cùm bina □^{ta} ex M C, C N æqualia requiruntur ▭^{lo} ſub data 2 A B & recta O D, quæ ad aliud quodpiam datum punctum, ut O, in poſitione data A D à ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

Invento, ut ante, puncto H, ponatur in linea H I recta P H æqualis rectæ O M, & H Q æqualis A B; inventâque inter ipſas mediâ proportionali H R, & ex I per punctum R deſcripto circulo: Dico, ſi ex duobus punctis M & N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ M C, N C, □^{ta} quæ ab ipſis fiunt, ſimul ſumpta, eſſe æqualia ▭^{lo}, contento ſub data 2 A B & abſciſſa O D.

Demonſtratio.

Productâ R H ad circumferentiam in V, ut & H A eandem utrinque terminante in punctis S & T: erit, ut in 7mo Problemate hujus, ▭ CAG æquale ▭^{lo} DAB, & ▭ ACG æquale □^{to} ex AS. Hinc, cum bina ▭^{la} CAG, ACG ſint [h] æqualia □^{to} ex A C, erit □^{tum} ex AC æquale ▭^{lo} DAB unà cum □^{to} ex A S. Eſt autem □^{tum} ex A S [i] æquale ▭^{lo} S H T unà cum □^{to} ex A H. Quocirca etiam □^{tum} ex AC æquale erit binis ▭^{lis} DAB, SHT unà cum □^{to} ex AH. Porrò, cum [k] ▭ SHT ſit æquale ▭^{lo} RHV, hoc eſt, □^{to} ex H R, quod [l] æquatur ▭^{lo} PHQ, hoc eſt, ▭^{lo} ſub OM & AB; itemque □^{tum} ex A H, ut ante, æquale ▭^{lo} M A B, dempto eidem □^{to} ex A N: erit □^{tum} ex A C æquale 3^{bus} ▭^{lis} ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B, multatis □^{to} ex AN. Sunt autem 3^{a} ▭^{la} ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B [m] æqualia ▭^{lo} ſub O D & A B. Æquale igitur eſt □^{tum} ex AC ▭^{lo} ſub OD, AB multato □^{to} ex AN: ac proinde □^{tum} ex A C unà cum □^{to} ex A N æquale ▭^{lo} ſub O D, AB. Unde cum [n] bina □^{ta} ex MC, CN ſint dupla □^{torum} ex CA, AN, liquet, illa ſimul ſumpta æqualia eſſe duplo ▭^{lo} ſub O D & A B, hoc eſt, æqualia ▭^{lo} ſub O D & 2 A B. Quod erat faciendum.

h ꝑ 2. libr. 2. Elem.
i ꝑ 5. libr. 2. Elem.
k ꝑ 35. libr. 3. Elem.
l ꝑ Conſtr. & 17. lib. 6. Elem.
m ꝑ 1. libr. 2. Elem.
n ꝑ 18. Prop. 2dæ partis primi tract.

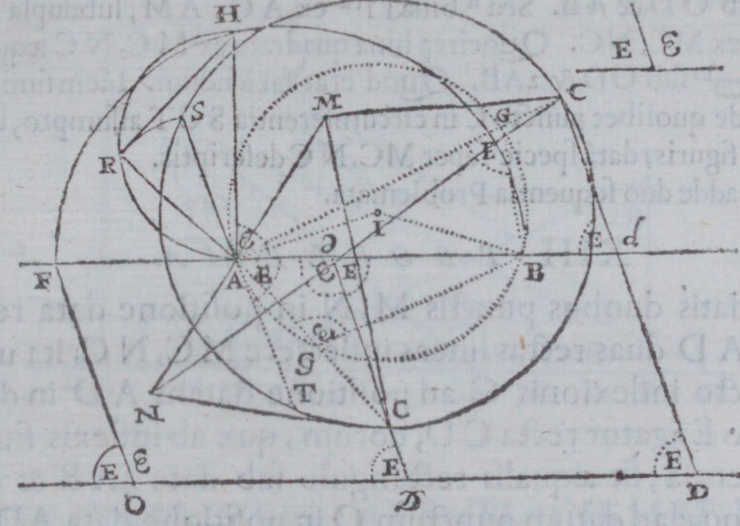
Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto C in circumferentia R C T aſſumpto; ut & de aliis figuris datâ ſpecie ſuper M C, N C deſcriptis.

XII

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

XII *Problema.*

A datis duobus punctis M, N extra poſitione datam rectam lineam O D duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, ſi à puncto inflexionis C agatur recta C D in dato angulo E ad poſitione datam O D, quæ ab inflexis M C, N C fiunt quadrata, ſimul ſumpta, æqualia ſint rectangulo ſub data 2 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in poſitione data OD ab ultimò ducta CD abſcinditur.



Constructio.

Junctâ N M, eâque bifariam ſectâ in A, agatur F A B parallela O D; ſumptâque in ipſa rectâ A B, æquali ſemiſſi datæ lineæ, deſcribatur ſuper ea [a] ſegmentum circuli AGB, capiens angulum æqualem dato E. Deinde ductâ ex O rectâ O F, faciente cum O D angulum æqualem angulo E, inveniatur [b] inter FA, AB media proportionalis AH, & ſuper ipſa deſcribatur ſemicirculus ARH. In quo ſi [c] aptetur HR æqualis N A vel AM, jungatur RA. Tum ſumptâ A S æquali AR, eâque poſitâ, ut angulus S A F ſit æqualis dato E, deſcribatur ex I centro circuli AGB per S circulus SCT; & ex punctis M, N ad ali-

a *p 33. libr. 3. Elem, vel p 2 Probl. 1^mi hujus.*
b *p 13. libr. 6. Elem.*
c *p 1. libr. 4. Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

aliquod in circumferentia punctum C ducantur M C, N C, tum ex C ad O D recta C D, in dato angulo E: eruntque, quæ ab M C, N C, fiunt □^{ta}, ſimul ſumpta, æqualia ▭^{lo}, contento ſub data 2 AB & abſciſſa O D.

Demonſtratio.

Per 7^{mum} Problema hujus ▭ C A G eſt æquale ▭^{lo} *d* A B, & ▭ A C G æquale □^{to} ex AS vel A R. Eſt autem [d] □^{tum} ex A R unà cum □^{to} ex R H, hoc eſt, A M æquale □^{to} ex A H, hoc eſt, [e] ▭^{lo} F A B. Hinc cum [f] bina ▭^{la} CAG, ACG ſint æqualia □^{to} ex A C, & bina ▭^{la} *d* A B, F A B [g] æqualia ▭^{lo} ſub F *d* & A B, hoc eſt, ſub O D & A B: erit □^{tum} ex A C unà cum □^{to} ex A M æquale ▭^{lo} ſub O D & A B. Sed [h] bina □^{ta} ex A C, A M, ſubdupla ſunt □^{torum} ex MC, NC. Quocirca bina quadrata ex M C, N C æqualia erunt ▭^{lo} ſub OD & 2AB. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in circumferentia S C T aſſumpto; ut & de aliis figuris, datâ ſpecie ſuper MC, N C deſcriptis.

> d p 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.
> e p Conſtr. & 17. libr. 6 Elem.
> f p 2. libr. 2. Elem.
> g p 1. libr. 2. Elem.
> h p 18. Prop. 2dæ partis, 1^{mi} tractat.

His adde duo ſequentia Problemata.

XIII *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis M, N in poſitione data recta linea A D duas rectas lineas inflectere M C, N C; ita ut, ſi à puncto inflexionis C ad poſitione datam A D in dato angulo E agatur recta C D, eorum, quæ ab inflexis fiunt, differentia, ſit æqualis rectangulo ſub data 4 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in poſitione data AD ab ultimò ducta CD abſcinditur.

Conſtructio.

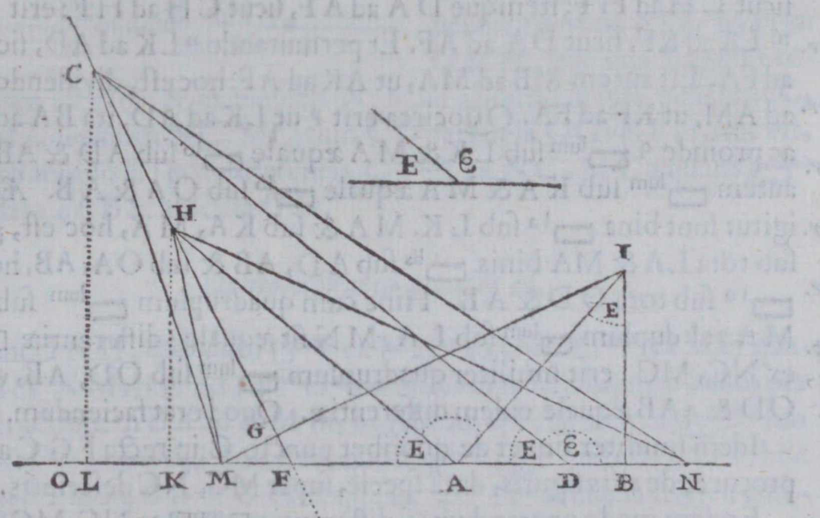
Sectâ MN bifariam in A, ſtatuatur A B æqualis $\frac{1}{4}^{tæ}$ parti datæ rectæ, ducaturque A H in dato angulo E. Tum ductâ A I perpendiculari ſuper A H, donec occurrat perpendiculari B I in I, jungatur M I. Deinde [a] ad MB, BA, & OA inventâ $4^{tâ}$ proportionali AF, (hoc eſt, ut MB ſit ad BA, ſicut OA ad AF) agatur ex F recta infinita FHC, ſecans M I ad angulos rectos in G. Dico ſi ab M & N ad aliquod in ea punctum C ducantur M C, N C, tum C D parallela A H, hoc eſt, in dato angulo E, differentiam □^{torum} ex M C, N C eſſe æqualem ▭^{lo} ſub 4 A B & O D.

> a p 12. libr. 6. Elem.

De-

Demonſtratio puncti H, in quo FC ſecatur ab AH.

Demiſsâ ex H ſuper AD perpendiculari HK, cum angulus KFH utrique $\triangle^{lo}$ KHF & MGF ſit communis, ipſorumque anguli ad K & G ſint recti : erit 3^{tius} quoque KHF 3^{tio} GMF [b] æqualis. Eodem modo $\triangle$ MBI æquiangulum erit $\triangle^{lo}$ MGF, ideoque $\triangle$ KHF æqui- b p Cor,32. libr.1.Elem.



angulum $\triangle^{lo}$ MBI. Unde erit [c] ut MB ad BI, ita HK ad KF. Rurſus, cum [d] externus angulus KAI ſit æqualis 2^{bus} internis & oppoſitis ABI & AIB; & anguli HAI, ABI, per conſtructionem, ſint recti : erit angulus KAH æqualis angulo AIB, ac per conſequens angulus KHA æqualis angulo BAI. Unde erit [e] ut BI ad AB, ita KA ad HK. Quocirca cum MB, BI, & AB ſint 3 magnitudines, & KA, HK, & KF 3 aliæ, quarum, binis in eadem ratione ſumptis, proportio ſit perturbata : erit quoque ex æquo [f] ut MB ad BA, ſic AK ad KF. Et per converſionem rationis [g] MB ad MA, ſicut AK ad AF. [h] Æquale igitur eſt $\square^{lum}$ ſub MB & AF $\square^{lo}$ ſub MA & AK. Hinc cum per conſtructionem MB ſit ad BA, ſicut OA ad AF; & idcirco $\square^{lum}$ ſub MB & AF etiam [i] æquale $\square^{lo}$ ſub BA & AO : erit ſimiliter $\square^{lum}$ ſub MA & AK, æquale $\square^{lo}$ ſub BA & AO. Eſt autem duplum $\square^{lum}$

c p 4.libr.6. Elem.
d p 32.libr.1. Elem.
e p 4.libr.6. Elem.
f p 23. libr. 5.Elem.
g p Cor. 19. libr.5.Elem.
h p 16. libr. 6. Elem.
i p 16. libr. 6. Elem.

 ſub

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

k ꝑ 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat. ſub MN & AK, hoc eſt, quadruplum ▭lum ſub M A & AK [k] æquale differentiæ □torum ex NH, MH. Quocirca etiam quadruplum ▭lum ſub B A & A O, hoc eſt, ▭lum ſub data 4B A & abſciſſa A O eidem differentiæ □torum ex NH & MH æquale erit. Ut requirebatur.

Demonſtratio puncti C, ubicunque in linea FGC aſſumpti.

l ꝑ 2. libr. 6. Elem. *m ꝑ 11. libr. 5. Elem.* *n ꝑ 16. libr. 5. Elem.* *o ꝑ 17. libr. 5. Elem.* *p ꝑ 11. libr. 5. Elem* *q ꝑ 16. libr. 6. Elem.* *r ꝑ 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.*

Demiſſâ ex C ſuper AD perpendiculari CL, cum [l] L K ad K F ſit, ſicut C H ad H F; itemque D A ad A F, ſicut C H ad H F: erit etiam [m] LK ad KF, ſicut DA ad AF. Et permutando [n] LK ad AD, ſicut KF ad FA. Eſt autem MB ad MA, ut AK ad AF, hoc eſt, dividendo [o] BA ad AM, ut KF ad FA. Quocirca erit [p] ut LK ad AD, ita BA ad AM: ac proinde [q] ▭lum ſub LK & M A æquale ▭lo ſub AD & AB. Eſt autem ▭lum ſub K A & M A æquale ▭lo ſub O A & A B. Æqualia igitur ſunt bina ▭la ſub L K, M A & ſub K A, M A, hoc eſt, ▭lum ſub tota LA & MA binis ▭lis ſub A D, AB & ſub OA, AB, hoc eſt, ▭lo ſub tota O D & A B. Hinc cum quadruplum ▭lum ſub L A, M A vel duplum ▭lum ſub L A, M N ſit æquale [r] differentiæ □torum ex NC, MC: erit ſimiliter quadruplum ▭lum ſub OD, AB, vel ſub OD & 4AB æquale eidem differentiæ. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in recta F G C aſſumpto; ut & de aliis figuris, datâ ſpecie, ſuper MC, NC deſcriptis.

Eodem modo operandum, ſi differentia □torum ex NC, MC æqualis requiratur ▭lo ſub data 4AB & recta MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum, ut M, à recta CD abſcinditur, nimirum ſi punctum O tantùm coïncidere fingatur puncto M, ſine ulla conſtructionis aut demonſtrationis immutatione.

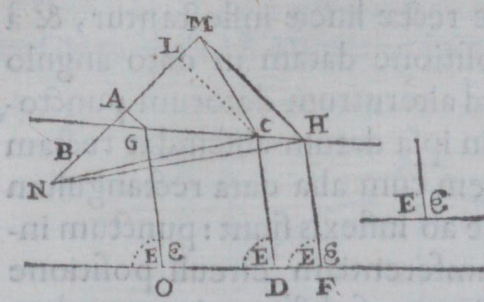
XIV *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis M, N extra poſitione datam rectam lineam OD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, ſi à puncto inflexionis C agatur recta C D in dato angulo E ad poſitione datam OD, eorum, quæ ab inflexis fiunt MC, NC, differentia ſit æqualis rectangulo ſub data 4A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in poſitione data OD ab ultimò ducta CD abſcinditur.

Con-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Constructio.



Juncta N M ſecetur, ut ante, bifariam in A; ſumptâque A B æquali $\frac{1}{4}^{tæ}$ parti datæ rectæ, inveniatur ad B A, A M 3^{tia} proportionalis O F, ducanturque O G, F H in dato angulo E, occurrentes perpendicularibus A G, M H in G & H. Per quæ ſi agatur recta linea infinita, & ex punctis N, M ad aliquod in ipſa punctum C, extra G, ducantur N C, M C; tum C D parallela O G vel F H, hoc eſt, in dato angulo E: erit differentia □^{torum} ex N C, M C æqualis ▭^{lo} ſub data 4 A B & abſciſſa O D.

Demonſtratio puncti H.

Junctâ N H, quoniam □^{tum} ex N H [a] excedit □^{tum} ex M H quadrato ex N M, hoc eſt, 4^{plo} □^{to} ex N A vel A M: ſequitur, cum per conſtructionem B A ad A M ſit, ut AM ad O F, & idcirco [b] ▭^{lum} ſub B A, O F ſit æquale □^{to} ex AM, quòd 4^{plum} ▭^{lum} ſub B A, O F, hoc eſt, ▭^{lum} ſub 4 B A & O F, ſit æquale 4^{plo} □^{to} rectæ A M, ſeu differentiæ □^{torum} ex N H, MH. Ut requirebatur.

a ꝑ 47. lib. 1. Elem.

b ꝑ 17. libr. 6. Elem.

Demonſtratio puncti C.

Demiſsâ CL perpendiculari ſuper N M, cum [c] □^{tum} ex N C majus ſit □^{to} ex MC duplo ▭^{lo} ſub NM & AL, hoc eſt, duplo ▭^{lo} ſub A M & A L; & B A ſit ad A M, ſicut A M ad O F, vel A L ad O D, & idcirco [d] ▭^{lum} ſub B A, O D æquetur ▭^{lo} ſub A M, A L: ſequitur quadruplum ▭^{lum} ſub B A, O D, hoc eſt, ▭^{lum} ſub 4 B A & O D eſſe æquale quadruplo ▭^{lo} ſub A M & A L ſeu differentiæ □^{torum} ex N C, M C. Quod erat faciendum.

c ꝑ Cor. 4. Prop. $6.2^{dæ}$ partis, 1^{mi} tractat.

d ꝑ 16. libr. 6. Elem.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in recta G C H extra G aſſumpto; ut & de aliis figuris datâ ſpecie ſuper N C, M C deſcriptis.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Hinc:

Concluſio 5ᵗæ Propoſitionis.

Si ſit poſitione data recta linea, & à duobus punctis in vel extra ipſam datis duæ rectæ lineæ inflectantur, & à puncto inflexionis ad poſitione datam in dato angulo recta agatur linea, quæ ad alterutrum datorum punctorum vel aliud quodpiam in ipſa datum abſcindat rectam lineam, comprehendentem cum alia data rectangulum æquale iis, quæ datâ ſpecie ab inflexis fiunt: punctum inflexionis continget circumferentiam circuli poſitione datam. At verò rectam lineam, ſi differentia earundem ſpecierum ſit dicto rectangulo æqualis.

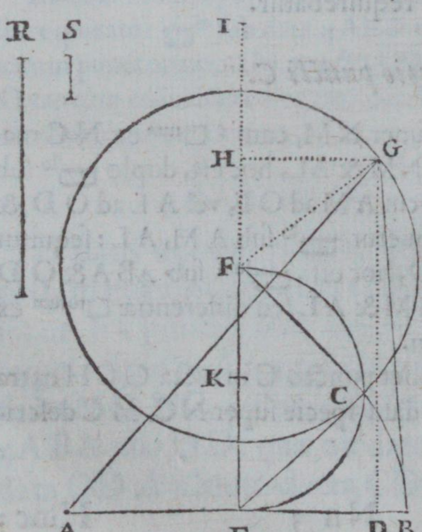
Quod erat demonſtrandum.

His adde duo ſequentia Problemata.

XV *PROBLEMA.*

A terminis A & B datæ rectæ lineæ A B duas rectas lineas inflectere A G, B G; ut, quæ ab ipſis fiunt, habeant ad triangulum A G B, à data AB & inflexis A G, B G comprehenſum, rationem datam R ad S.

Sit A B bifariam ſecta in E, & ex E ſuper AB erecta perpendicularis EF. Deinde ſicut R eſt ad S, ita ſit quadruplum ipſius EF ad EB.



Conſtructio.

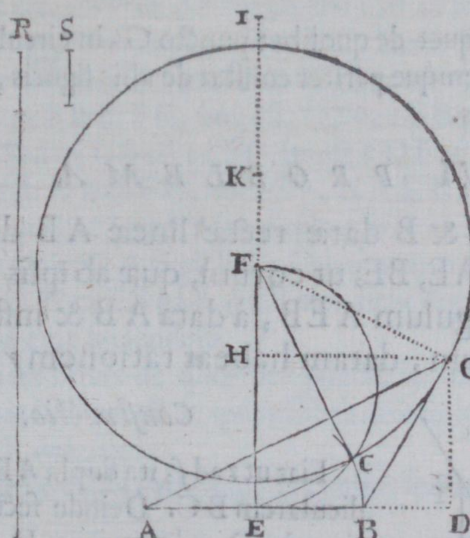
Deſcripto ſuper EF ſemicirculo ECF, aptetur in eo EC æqualis EB, & ex F intervallo FC circulus deſcribatur. Quo facto, ſi ex punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum G ducantur rectæ AG, BG: erunt, quæ ab ipſis fiunt □ᵗᵃ, ad △ˡᵘᵐ AGB, ut 4EF ad EB, ſeu R ad S. Quæ quidem ratio hîc non minor requiritur, quàm quæ eſt ipſius 4 ad 1.

Præ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Præparatio ad demonſtrationem.

Demiſsâ ex G ſuper AB perpendiculari G D, junctâque F G, agatur G H parallela AB. Deinde fiat FK æqualis F H, & FI æqualis FE.



Demonſtratio.

Quoniam itaque [a] □^{tum} ex F H unà cum □^{to} ex H G æquale eſt □^{to} ex FG vel FC, hoc autem cum □^{to} ex CE vel EB [b] ſit æquale □^{to} ex E F: erunt □^{ta} ex F H, H G, & E B ſimul ſumpta æqualia □^{to} ex EF. Eſt autem [c] □^{tum} ex E F æquale □^{to} ex FH unà cum ▭ HEK. Quare etiam □^{ta} ex F H, H G, & E B æqualia erunt □^{to} ex F H unà cum ▭ H E K. Unde ablato communi □^{to} ex F H, erunt ſimiliter reliqua □^{ta} ex H G, E B vel A E, E D reliquo ▭^{lo} H E K æqualia. Eſt autem [d] ▭ HEK vel I H E æquale ▭^{lo} I E H, dempto eidem □$_{to}$ ex EH. Quocirca etiam □^{ta} ex A E, ED æqualia ſunt ▭^{lo} IEH, multato □^{to} ex EH. Hinc ſi utrinque addatur □^{tum} ex EH vel DG: erunt 3^{a} □^{ta} ex A E, E D, & D G, ſimul ſumpta, æqualia ▭^{lo} IEH. Ac proinde quoque eorum dupla, hoc eſt [e], □^{ta} ex A D, D B, unà cum □^{to} ex DG bis ſumpto, æqualia duplo ▭^{lo} IEH, hoc eſt, ▭^{lo}

[a] *p 47. libr. 1. Elem.*
[b] *p 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.*
[c] *p 6. libr. 2. Elem.*
[d] *p 3. libr. 2. Elem.*
[e] *p 9. vel 10. libr. 2. Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſub EF & DG, quater ſumpto. Sunt autem □^{ta} ex AD, DB unà cum □^{to} ex DG bis ſumpto [f] æqualia □^{tis} ex AG, GB. Æqualia igitur ſunt bina □^{ta} ex AG, GB rectangulo ſub EF & DG 4ter ſumpto. Sed ut ▭^{lum} ſub EF & DG 4ter ſumptum eſt ad ▭^{lum} ſub EB & DG, hoc eſt, ad △^{lum} AGB, ita eſt [g] 4^{pla} ipſius EF ad EB. Quare etiam bina □^{ta} ex AG, GB ad △^{lum} AGB erunt, ut 4 EF ad EB. Quod erat faciendum.

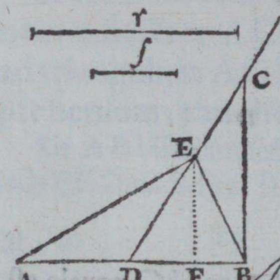
f p 47. libr. 1. Elem.

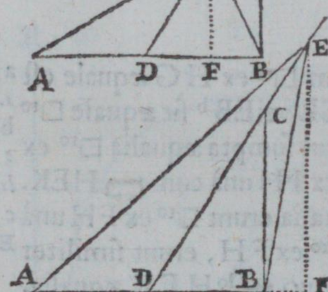
g p 1. libr. 6. Elem.

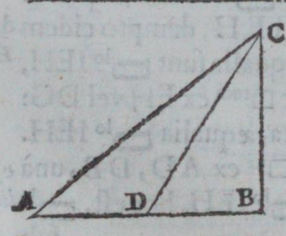
Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto G, in circuli circumferentia aſſumpto; idemque pariter conſtat de aliis figuris, datâ ſpecie ab inflexis deſcriptis.

XVI *PROBLEMA.*

A terminis A & B datæ rectæ lineæ AB duas rectas lineas inflectere AE, BE; ut eorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ad triangulum AEB, à data AB & inflexis AE, BE comprehenſum, datam habeat rationem *r* ad *ſ*.







Conſtructio.

Fiat ut *r* ad *ſ*, ita dupla AB ad perpendicularem BC. Deinde ſectâ AB bifariam in D, educatur ex D per C recta linea infinita DEC. Tum ex A & B ductis ad aliquod in ea punctum E rectis AE, BE: dico differentiam □^{torum} ex AE, EB ad △ AEB eſſe, ut duplà AB ad BC, ſeu ut *r* ad *ſ*.

Demonſtratio puncti C.

Junctâ AC, cum [a] □^{tum} ex AC excedat □^{tum} ex CB quadrato ex AB, id eſt, ▭^{lo} ſub dupla AB & DB; hoc autem [b] ad ▭^{lum} ſub DB & BC, hoc eſt, ad △ ACB [c] ſit, ſicut dupla AB ad ad BC: patet differentiam □^{torum} ex AC, CB ad △ ACB eſſe, ſicut dupla AB ad BC, ſeu ut *r* ad *ſ*. uti requirebatur.

a p 47. libr. 1. Elem.

b p 1. libr. 6. Elem.

c p 41. libr. 1. Elem.

De-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Demonſtratio puncti E, ubicunque ſumpti in linea D C E.

Cur A D ſit æqualis D B, & idcirco A F æqualis B D, D F: erit □tum ex A F [d] æquale □to ex F B unà cum ▭ B D F quater ſumpto, ſeu, quod idem eſt, □tum ex A F majus erit □to ex F B quadruplo ▭lo B D F, hoc eſt, ▭lo ſub dupla A B & D F. Unde ſi utrinque addatur □tum ex F E, erunt bina □ta ex A F & F E, hoc eſt [e], □tum ex A E, majora binis □tis ex F B & F E, hoc eſt, [f] □to ex E B rectangulo ſub dupla A B & D F. Sed ut D B eſt ad B C, ita eſt [g] D F ad F E; & per conſequens ▭lum ſub D B & F E, hoc eſt [h], △ A E B, æquale ▭lo ſub B C & D F. Similiter [i] ▭lum ſub dupla A B & D F eſt ad ▭lum ſub B C & D F, ſicut dupla A B ad B C. Quare etiam exceſſus quo □tum ex A E ſuperat □um ex E B ad △ A E B erit, ſicut dupla A B ad B C, ſeu ut *r* ad *ſ*. Quod erat faciendum.

d p 8. libr. 2. Elem.
e p 47. libr. 1. Elem.
f p 47. libr. 1. Elem.
g p 4. libr. 6. Elem.
h p 16 Sexti, & 41. libr. 1. Elem.
i p 1. libr. 6. Elem.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto in linea D E aſſumpto, atque etiam manifeſtum eſt de quibuſlibet aliis figuris, datâ ſpecie ab inflexis A E, B E deſcriptis.

E quibus igitur binis Problematîs conſtat ſequens

PROPOSITIO.

Si à terminis datæ rectæ lineæ duæ rectæ lineæ inflectantur; ita ut figuræ datâ ſpecie ab ipſis deſcriptæ ad triangulum ſub data & inflexis comprehenſum datam habeant rationem: punctum ad inflexionem continget circumferentiam circuli poſitione datam. At verò rectam lineam, ſi differentia earundem figurarum ad dictum triangulum datam habeat rationem.

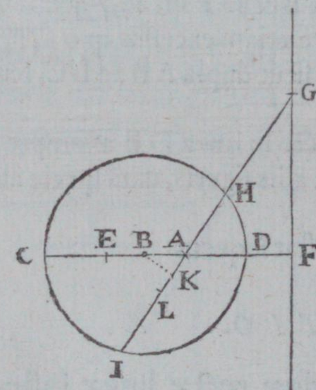
Quod erat demonſtrandum.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

In 6^{tam} Propoſitionem.

XVII *PROBLEMA.*

Extra datum poſitione circulum CHD punctum invenire G, à quo ſi per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea GHAI, circumferentiam ſecans in H & I; ut quadratum lineæ AG, inter hæc puncta interceptæ, ſit æquale rectangulo IGH, contento ſub tota ſecante IG & exteriùs aſſumpta GH.



Constructio.

Ductâ per A & centrum B rectâ lineâ, ſecante circumferentiam in C & D; ſumatur EB æqualis BA, fiatque ut EA ad AD, ita AD ad DF. Tum per F ductâ FG ad angulos rectos ipſi CAD: dico, ſi ex puncto aliquo in ea G per A agatur recta GHAI, circumferentiam ſecans in H & I, $\square^{tum}$ ex AG eſſe æquale ▭^{lo} IGH.

Demonſtratio puncti F.

Cum CB ſit æqualis BD, & EB æqualis BA: erit etiam CE æqualis AD. unde & CA æqualis ED. Porrò cum [a] EA ſit ad AD, ut AD ad DF, hoc eſt, componendo [b] ED vel CA ad AD, ſicut AF ad FD: erit quoque [c] CF ad FA, ſicut AF ad FD: ac proinde [d] $\square^{tum}$ ex AF æquale ▭^{lo} CFD. Ut requirebatur.

a ꝑ *Conſtructionem.*
b ꝑ *18. libr. 5. Elem.*
c ꝑ *12. libr. 5. Elem.*
d ꝑ *17. libr. 6. Elem.*

Demonſtratio puncti G.

Demiſsâ ex B ſuper IG perpendiculari BK, ſecabit ipſa [e] rectam IH bifariam in K. Hinc ſi LK, ut ſupra, ſumatur æqualis KA, erit ſimiliter IL æqualis HA. Deinde cum [f] propter ſimilitudinem △^{lorum} ABK, AGF, BA ſit ad AG, ſicut KA ad AF; & idcirco EA ad AG,

e ꝑ *3. libr. 3. Elem.*
f ꝑ *4. libr. 6. Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

AG, ſicut LA ad AF: erit [g] ▭ EAF æquale ▭^{lo} LAG. Sed per conſtructionem EA eſt ad AD, ſicut AD ad DF, hoc eſt, per 12. 5^{ti} Elem., EA ad AD, ſicut ED, hoc eſt, CA, ad AF; ac proinde [h] ▭ EAF æquale ▭^{lo} CAD, hoc eſt [i], ▭^{lo} IAH. Quocirca cum ▭ EAF ſit æquale oſtenſum ▭^{lo} LAG, idemque ſimiliter ſit æquale ▭^{lo} IAH: erunt etiam ▭^{la} LAG & IAH inter ſe æqualia. Unde erit [k] ut AG ad AH, ita IA ad AL; & dividendo [l] GH ad HA, ſicut IL, hoc eſt, HA, ad AL. Cum igitur GH, HA, & AL ſint 3 rectæ proportionales, ſicut etiam FD, DA, & AE; illîc autem IL ſit æqualis HA, ſicut hîc CE æqualis DA: erit ſimiliter, ut ſupra, □^{tum} ex AG æquale ▭^{lo} IGH. Quod erat faciendum.

g p 16. libr. 6 Elem.
h p 16. libr. 6. Elem.
i p 35. libr. 3. Elem.
k p 16. libr. 6. Elem.
l p 17. libr. 5. Elem.

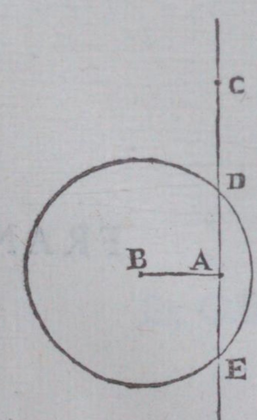
Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto G in recta FG aſſumpto.

Aliud in 6^{tam} Propoſitionem.

XVIII *PROBLEMA.*

Extra datum poſitione circulum DE invenire punctum C, à quo ſi per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea CDAE, circumferentiam ſecans in D & E; ut quadratum lineæ AC inter hæc puncta interceptæ ſit æquale rectangulo ECD, contento ſub tota ſecante EC & exteriùs aſſumpta CD, unà cum rectangulo EAD, comprehenſo ſub duabus intra circulum portionibus EA, AD.

Constructio.



Ductâ ex centro B ad punctum A rectâ BA, erigatur in A ad ipſam perpendicularis AC. Dico, ſi in ea extra circulum ſumatur aliquod punctum C, ▭^{lum} ECD unà cum ▭^{lo} EAD eſſe æquale □^{to} ex AC. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intellige de quolibet puncto C, in recta AC extra circulum aſſumpto.

Cujus demonſtratio ex 6ta 2^{di}, & 3^{tia} 3^{tii} Elementorum Euclidis eſt manifeſta.

Hinc:

Concluſio 6tæ Propoſitionis. Si in circulo poſitione dato ſit datum punctum, perque ipſum agatur quædam recta linea, & in ipſa punctum extra ſumatur; ſit autem quod fit à linea ducta uſque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra ſumpta, vel ſoli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus, continetur: punctum extra aſſumptum poſitione datam rectam lineam continget.

Et ſi hoc quidem punctum contingat poſitione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ ſunt ad utraſque partes dati puncti contingent poſitione eandem circumferentiam.

Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

FRAN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheſeos Profeſſoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,
LIBER IV.
SIVE DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE,
TRACTATUS.

GEOMETRIS, OPTICIS;
Præſertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.



LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nobiliſſimis atque Ampliſſimis

DOMINIS,

ILLVSTRIS ACADEMIÆ

LVGDVNO-BATAVÆ, CVRATORIBVS,

D. AMELIO BOVCHORST, Domino de Wimmenum, Rhenolandiæ Balivo & Chomarcho, atque in Conſeſſu Præpotentum Illuſtriſſimorumque Belgii Confœderati Ordinum ex Equeſtri Hollandiæ Ordine Delegato.

D. GERARDO SCHAEP, ad Sereniſſ. & Potentiſſ. Daniæ Regem nomine Præpot. & Illuſtriſſ. Belgii Confœd. Ordinum nuper Legato, nunc verò Urbis Amſtelodamenſis Conſuli.

D. CORNELIO à BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii & Weſt-Iſelmundæ Toparchæ, Comitatus Hollandiæ Conſiliario ac in Zuidt-Hollandia Quæſtori Generali, antehac ad Sereniſſ. & Potentiſſ. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Legationibus perfuncto, jam autem in Conſeſſu Præpot. & Illuſtriſſ. Belgii Confœd. Ordinum Hollandiæ Delegato.

UT ET,

D. CLEMENTI à BAERSDORP JCto	*Florentiſſimæ Reip. Lugd. Bat. Conſulibus.*
D. ADRIANO van STAVEREN	
D. NICOLAO vander MEER	
D. FOYTO van ZYP	

NEC NON,

Ampliſſimo, Prudentiſſimoque Viro,

D. JOANNI à WEVELICHOVEN JCto, Reip. Lugd. Bat. Syndico, iiſdemque D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nobiliſsimi atque Ampliſsimi Viri,

QUemadmodum inter complures Mathematicæ ſcientiæ partes, Geometria reliquas ferè omnes ut baſis ſuſtinet, ita etiam in ea addiſcenda Græci olim ſummam operam poſuerunt. Cum autem eandem ſimul cũ aliis ſcientiis ac artibus, felici ſucceſſu, ſuo idiomate exercerent, factum inde quoque fuit ut illius utilitatem è veſtigio deprehenderent, tam in cæteris faciliùs addiſcendis, excolendiſq;, quàm in ritè dirigendis artibus omnibus Mechanicis, nec non variis inſtrumentis excogitandis, quę ad quotidianum uſum ſpectarent. Ei igitur parti quæ tractat de Conicis Sectionibus, cujus uſum cum longè lateque ſe extendere agnoſcerent, maximum ſtudium adhibuerunt. Inter quos, qui ex profeſſo hanc tractare ſuſceperunt, nullus Euclide antiquior reperitur, qui quatuor libros eâ de re conſcripſit. Apollonius autem poſt univerſaliùs hæc inſpiciens, eaſdem Sectiones in unoquoque Cono oſtendit, qui plurimis ingenioſis & pulcherrimis Theorematîs Conicorum doctrinam locupletavit, & Euclidis libros quatuor ad octo perduxit. Quâ quidem re ſcientia hæc incredibile incrementum cepit, illeque inde magnam gloriam conſequutus eſt, ita ut eo & ſequentibus ſeculis Geometræ magni nomen meruerit. Sed cum, injuriâ temporis, nulla eorum monumenta vel aliorum, qui ipſis poſteriores ſunt ad nos pervenerint, aut ſaltem (quod ſciam) publicè extent, in quibus modus ipſas Sectiones uno ductu in plano deſcribendi oſtendatur; quarum tamen deſcripto in praxi quotidiana quàm maximè requiritur: Id ipſum materiam mihi ſubminiſtravit, ut idonea inſtrumenta excogitarem: quibuſque modis Conicæ lineæ Organicè, & quovis caſu, in plano deſcribi poſſent, peculiari tractatu demonſtrare conarer. Quem, primitias ſtudiorum meorum, Vobis Nobiliſſimi, Ampliſſimique Viri, offerre non erubui: Vobis inquam, qui ſemper

per

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

per eximii ſcientiarum omnium artiumque liberalium Mecœnates extitiſtis, ac etiamnum ad eas promovendas, atque Academiæ veſtræ ornamentum, curam omnem & favoris operam confertis. Quam porrò eò protuliſtis, ut illa ſingularis in hoc appareat ac nunquam non laudanda ſit, quòd etiam Mathematicas artes, exemplo clarorum olim Græcorum, vernaculâ linguâ in Academia Veſtra doceri volueritis, Batavoſque & aliarum linguarum ignaros iis imbui. Magno ſanè Reipublicæ commodo, communique omnium applauſu: ut ſcilicet ipſæ uſui publico inſerviant, nec non Vos earum fructus in gubernanda Republica, tam belli quàm pacis tempore, ubique ſentiatis. Denique quandoquidem, defuncto parente meo, benevolentiâ veſtrâ in ejus locum ſurrogatus fui, ut diſciplinas haſce publicè profiterer, officii mei eſſe duxi, grati animi aliquâ teſtificatione eidem reſpondere, & quæ in uſum publicum meditatus ſum, Illuſtribus Veſtris Nominibus dedicare. Hunc igitur laborem qualemcunque, Viri Nobiliſſimi atque Ampliſſimi, in clientelam Veſtram accipite benignè; quippe qui Vobis omni animi obſervantiâ à me offertur; eundemque accepti beneficii gratitudinis ergo auſpiciis Veſtris in lucem prodire ſinite. Quod supereſt, DEUM OPT. MAX. rogo ut vos incolumes ac felices quàm diutiſſimè conſervet. Dabam Leydæ, Kal. Novemb. Anni MDCXLVI.

Nobilitatibus atque Amplitudinibus Veſtris

devotiſſimus.

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

QVANTVM incrementum Geometria, amice Lector, ex Conicorum doctrina, poſtquam Veteres ei ſedulò incubuerunt, acceperit, quantaqúe ipſi dignitas acceſſerit; partim eorum monumenta; partim verò ſingularis eorum uſus teſtantur. Inter quos, qui id ſunt aggreſſi, nullus Euclide prior reperitur: qui Conum ex circumvolutione Trianguli rectanguli definivit, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, latere: ſtatuens præterea tres Conorum differentes ſpecies, ſecundùm triplicem angulorum ad verticem differentiam: deinde verò unumquemque horum trium ſecari plano ad unum Coni latus recto, unde tres illas ut Coni rectanguli, obtuſanguli, & acutanguli ſectiones deduxit. Verùm poſtea Apollonius univerſaliùs Conum definiens ex converſione rectæ lineæ indefinitæ, circa Circuli circumferentiam, tranſeuntis continuò per aliquod punctum in ſublimi, quouſque ad eum locum redeat, à quo moveri cœpit: universè inſpexit in omni Cono, tam recto quàm ſcaleno, unamquamque trium prædictarum ſectionum inveniri, pro diversa nempe plani ſecantis in Cono contemplatione. Qui porrò ante nominatas ſectiones, rectanguli quidem Coni ſectionem Parabolen, obtuſanguli Hyperbolen, acutanguli verò Ellipſin appellavit, unicuique ex hiſce tribus ab aliquo proprio accidente ejuſmodi nomen imponens. Vt quilibet ex libris ejus, qui Conica Elementa inſcribuntur, addiſcere poteſt. Quorum propoſitiones, quantùm iis ad demonſtrationem indiguimus, eorum, quæ hoc tractatu afferuntur, citavimus. Cæterùm, quantopere ille hac in parte Geometriam ditarit, quantaqúe ejus inventis præſtantiſſimæ huic ſcientiæ dignitas acceſſerit, vix dici poteſt. Hic namque Euclidis libros quatuor, ea de re conſcriptos, ad octo perduxit. Et quàm-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

vis dolendum ſit, quatuor duntaxat primos ad nos hactenus perveniſſe, atque reliqui quidem temporis injuriâ periiſſe videantur; futurum tamen confidimus ut eoſdem, ex genuina Arabum verſione Latinè redditos, Vir Clariſſimus D. Iacobus Golius haud diutiùs deſiderari ſinat: quàm primùm alio opere, cujus editione impræſentiarum diſtinetur, fuerit defunctus.

Verùm ut ad uſum harum Sectionum accedamus, oſtendamuſq́; ad quæ earum deſcriptio in plano deſerviat: ſciendum primò eſt, eam in Geometria ad ſolutionem Solidorum Problematum adeò requiri, ut quemadmodum illa ſolvi nequeunt, niſi in conſtructionem adhibeatur aliqua trium Coni Sectionum ſupra dictarum; ita etiam earum deſcriptionem nequaquam ibidem negligere decet.

Quod verò ad Opticam, jucundiſſimam Matheſeos partem attinet, quæq́; præter Viſum, Lucem, Vmbram, & Colores, objectorum quoque diverſas apparentias contemplatur, ac earundem rationes reddit: conſiderando videlicet ea infinitis radiis ab objecto prodeuntibus conſpici, qui in oculo ſimul conveniant: Quàm opportunum ſit illîc Conum, Conicaſqúe Sectiones animadvertere, cuivis, qui Circulum pro objecto acceperit, judicandum relinquo.

Quòd ſi Opticam penitiùs perſpiciamus, eamqúe porrò ut ſit ſubdividamus in Catoptricam, Dioptricam, & Perſpectivam, multò magis Conicorum frequens uſus elucebit.

Nam quod ad Catoptricam ſpectat, quoniam illam novimus occupatam eſſe in imaginibus, quæ in ſpeculis per reflexionem radiorum in noſtros oculos fiunt, explicandis; Cumqúe in ea præterea ſpecula efficere conemur, quæ miros præbeant effectus; Sicuti quorum beneficio lucente Sole aliquid accendatur, vel quibus lumen alicujus candelæ mirabiliter diffundatur: an non neceſſariam planè ad hoc Paraboles ac Hyperboles deſcriptionem unuſquiſque agnoſcet? Siquidem ejuſmodi ſpecula dictas figuras omnino requirunt? Quemadmodum quoq; Hyper-

bola

bola exigitur ad radios è diverſis locis prodeuntibus in unum punctum congregandos; Ellipſis verò ut qui ex uno puncto veniunt rurſus in aliud reflectantur punctum. Quæ quidem non ſolùm vario fini inſervire queunt, verùm etiam ſumma cum voluptate adhiberi ad prodigioſas rerũ imagines repræſentandas.

Tacebo-ne Dioptricam? quæ non ſolùm hoc habet, ut ſine eâ Viſus ratio, ut & Lucis & Colorum minimè explicari valeat; ſed etiam hoc ſibi vendicat, ut vitra comburentia efficere nos doceat; nec non alia, quibus radii diverſimode detorqueantur, & tam tubis Opticis, quàm vario modo viſum juvantibus, inſerviant: Non-quid & ad illa Conicarum Sectionum deſcriptio utilis dicetur? cum ejuſmodi vitra in formam Ellipſis ac Hyperbolæ expolienda eſſe, Dioptrica nobis demonſtret. De qua re Dioptrica Nobiliſſimi Clariſſimiqúe Viri D. Renati des Cartes conſuli poteſt; in qua mirâ brevitate ſubtiliſſimè, quæcunque de reflexionibus, refractionibus, cæteriſqúe rebus ad perfectionem viſus pertinentibus, intelligi poſſunt, perſequitur; & quæ de refractionis legibus ante fuerunt deſiderata, planè perfecit. In qua parte ſi præterea expectes, quæ Clariſſimus ac Subtiliſſimus Vir, D. de Beaune, Conſiliarius Blæſenſis, poſt excogitavit, non video quid in hoc genere ampliùs requiras.

Opticæ colophonem addit Perſpectiva, quæ non modò ad contemplationem objecti pertinet, veluti Optica, ſed ad ipſam figuram apparentem in plano deſcribendam. Quocirca dubitari nequit, quanto cum compendio Organica Conicarum Sectionum deſcriptio in Circulorum projectionibus inſtitui poſſit: quandoquidem projectionem illam non niſi aliquam ex Conicis Sectionibus exiſtere, manifeſtum eſt. Cæterùm quàm crebra ibidem ſit præ aliis Ellipſeos decircinatio, nemini ambigendum puto, qui Planiſphæria ſibi parare unquam tentaverit. Ita ut hoc ſeculo, ob peculiare Conicorum ſtudium, Optica quoque ad faſtigium perducta videatur, ſummaqúe ejus perfectio ſperanda ſit, ſi reliquos Conicorum libros

Nobiliſſimi ac Clariſſimi Viri D. Claudii Mydorgii, in Francia Picardiæ Quæſtoris, nec non Conica Acutiſſimi Viri, D. des Argues, ab iis impetremus.

Non eſt quòd multa dicam de Gnomonica, cujus totum fermè negotium in deſcribendis Conicis Sectionibus conſiſtit, cum Sol ibidem converſione ſuâ quotidie nobis Conum referre ſtatuatur, quem Conum Luminis appellamus; cujus quidem baſis Circulus eſt quem deſcribit; vertex autem apex gnomonis; ipſum verò Solarium planum Sectionis Coni, priori oppoſiti, qui Conus Vmbræ vocatur. Ita ut lineæ, quas in eo extremitas umbræ gnomonis ſeu ſtyli ſingulis diebus deſcribit, repræſentent ſemper aliam atque aliam Coni Sectionem; prout nimirum Sol alium aliumqúe gradum Eclipticæ quotidie perambulat; ut etiam pro diverſa Sphæræ conſtitutione, nec non vario plani Horologii ſitu. Vnde fit ut arcus diurni, ſigna Zodiaci, Paralleli Civitatum Latitudinumvé Circuli, ſicut etiam Paralleli Horizontis ſeu Circuli Almucantarath, omnes in Sectiones Conicas ſint conſignandi, totumqúe ferè opus ab iis deſcribendis pendeat.

Supereſt Mechanica, quæ artium Mathematicarum quaſi exegeſis eſt, cum inſtrumenta fabricare doceat, quorum præſidio id ipſum, quod cæteræ hujus Scientiæ partes conſtruendum nobis ſuppeditant, exequi valeamus. Ad quam igitur Organicam Conicarum Sectionum deſcriptionem non immeritò referas. Quocirca hac in parte laborandum mihi quoque propoſui, unde reliquæ commoditatis alicujus poſſint participes reddi, atque ad finem optatum perduci. Præſertim etiam cum obſervaſſem harum linearum deſcriptionem Organicam in praxi quotidiana uſum habere uberrimum, ut architectis, lignariis, cæmẽtariis in extruendis typis ligneis, lapideis fornicibus templorum, ædificiorum, pontium, porticuum & cellarum ſuſtinendis requiſitos. Quemadmodum etiam diatretis in tornandis pluteis, nec non topiariis in diverſimodè concinnandis pulvillis in horto, &c.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Cum ergo ad tam multa negotia Conicarum Sectionum in plano deſcriptio utilis ſit, quid mirum, ſi vel ab ultima antiquitate præſtantiſſimi Mathematici Conicorũ doctrinam adeò ſedulò ſibi excolendam duxerint, ſemperq; ei, præcipuè verò hoc erudito ſeculo, acceſſio nova facta ſit? Verùm quod mirandum mihi videtur, eſt, quòd nemo hactenus (quod ſciam) Spartam hanc ſibi ornandã ſuſceperit, ut nempe aliquis inventus fuerit, qui de Organica Conicarum Sectionum in plano deſcriptione tractatum conſcribere ſit aggreſſus, eamqúe quovis caſu demonſtrare. Quod quidem perutile futurum, vel ex eo deprehendi potuit, quòd caſu fuerint inventi quidam modi, quorũ in quotidiana praxi non parvus eſt uſus: quos noſtris interſerere quoq; libuit, ne aliunde quiſpiam quod huc ſpectat haberet quod peteret, & quod non poſſimus hâc noſtrâ opellâ ipſi ſuppeditare. Fateor me legiſſe, Franciſcum Aguillonium in animo habuiſſe (ut ipſemet ſcribit) peculiarem tractatũ hac de re inſtituere; verùm morte præventus, opus imperfectum reliquit. Novi inſuper ingenioſiſſimum Virum D. Otterum multa ſuper hac re excogitaſſe; ſed neq; ille, quantùm mihi innotuit, publici juris quidquam fecit. Quod autem attinet ad methodum, quâ hæ lineæ in plano per puncta deſcribuntur, de qua Clariſſimus D. Mydorgius totũ librum conſcripſit, illa quidem, quum ipſæ majori formâ ſunt exhibendæ ut in parietibus, caminis, pavimentis, hortis, & quales vulgò in Gnomonica & Mechanica requiruntur, non æquè facili viâ atq; Organicâ ſuccedit. Prout hoc à primo limine dignoſcere licet in Sciothericis hoc pacto conſtructis, ſi notemus quàm perperàm plerumq; ipſæ deſignatæ fuerint: ſiquidem methodus illa ſæpiùs ibidem iteratam punctorum inventionem atq; manus exercitatæ ſolertiam requirit, nec non ut præterea, ad exactã operis exegeſin, natura earundem linearum in aperto ſit. Quod utiq; in Organica methodo locum non habet: quippe quæ lineas illas, multifariam iteratâ operâ vixdum acquiſitas, ſuâ quaſi ſponte uno ductu continuo ob oculos ponit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Placuit porrò præ cæteris is modus Organicus, qui è motu implicato originem ducit, eo inſuper habito, quo hæ lineæ circino in eum finem extructo deſcribantur. Quoniam ibi eaſdem lineas primùm deſcriptas habere oportet, ut circino adfixæ ſimilium ſolummodò deſcriptioni inſervire poſſint.

Præterea cum ratio ducendi lineas rectas, quæ curvas haſce in quibuſvis punctis contingant, in indaganda objectorum varia apparentia ad Catoptricam & Dioptricam ſummopere ſit neceſſaria; placuit quoq; poſt ipſarum deſcriptionem in Scholiis de iis breviter tractare; ut & de ſpatiis quæ includunt: quandoquidem cognitio illa ad centra gravitatum eorundem ſpaciorum invenienda plurimùm conducit, atq; una ab altera pendet.

Denique ne quid deeſſet, quod ad hanc materiam ſpectare videretur, ſubjeci etiam relationem, quam inter ſe habent ſpatia quæcunque, rectis lineis & curvis Conicis comprehenſa. In quorum demonſtrationibus Lectorem monitum velim, me brevitatis causâ methodo indiviſibilium, quam ſubtiliſſimus Vir Bonaventura Cavallerius inivit, fuiſſe innixum: licèt id aliâ quoque ratione exhibere potuerim.

Aliarum autem linearum curvarum ſuperioris generis deſcriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit noſtri inſtituti: cum maluerimus meritò eximiis Viris D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholoſano, & D. Robervallo, Mathematum in Academia Pariſienſi Regio Profeſſori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes, & centra invenêre, quibus Geometriam mirificè ditare valeant, & (meo judicio) vix lucẽ viſura ſunt, niſi Philomathematicorũ precibus & perſuaſionibus ab iis in Reipub. Literariæ bonum extorqueantur.

Has igitur primitias laboris noſtri, amice Lector, ſi gratas tibi fuiſſe acceperimus, animũ nobis addes ad Apollonii de locis planis Geometriam, alioſq; tractatus brevi, Deo volente, edendos; & ad ea, quæ circa optimam muniendi rationem meditari cœpimus, abſolvenda. His interim fruere, eaqúe in uſum tuum converte. Vale.

FRAN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheſcos Profeſſoris,

DE ORGANICA CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE TRACTATUS.

CAPUT I.

De rectis lineis, quæ in plano ex motu implicato deſcribuntur.

IN plano quocunque concipiatur regula AB, mobilis circa punctum fixum A, atque alia regula CBD huic quidem annexa in puncto B, quæ circa illud in eodem plano converti poſſit: ſtatuantur autem intervalla AB, CB & BD inter ſe æqualia.

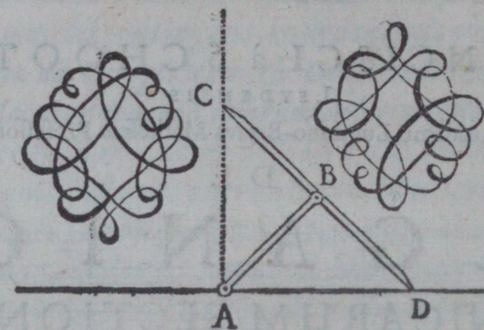
Dico, ſi feratur punctum D in recta linea tranſeunte per A, ut AD, punctum alterum C motu iſto in eodem plano deſcribere lineam rectam, priori AD perpendicularem.

Intelligatur enim à puncto C ad punctum A recta linea eſſe ducta AC. Quia igitur trianguli ABD latera AB, BD ſunt æqualia, [a] erunt etiam anguli BAD, BDA inter ſe æquales. Eodem modo, quoniam in triangulo ABC latera AB, BC æqualia ſunt, [b] erunt quoque anguli

a p 5 Primi Elem.
b p 5 Primi Elem.

guli A C B, BAC inter ſe æquales. Æqualis igitur eſt angulus CAD duobus angulis BCA, ADB. [c] Sunt autem tres anguli CAD, BCA, & A D B duobus rectis æquales. Rectus itaque erit angulus CAD. Cum verò conſtet, mutato ſitu puncti D in recta AD, mutari ſimul

c p 32 Primi Elem.

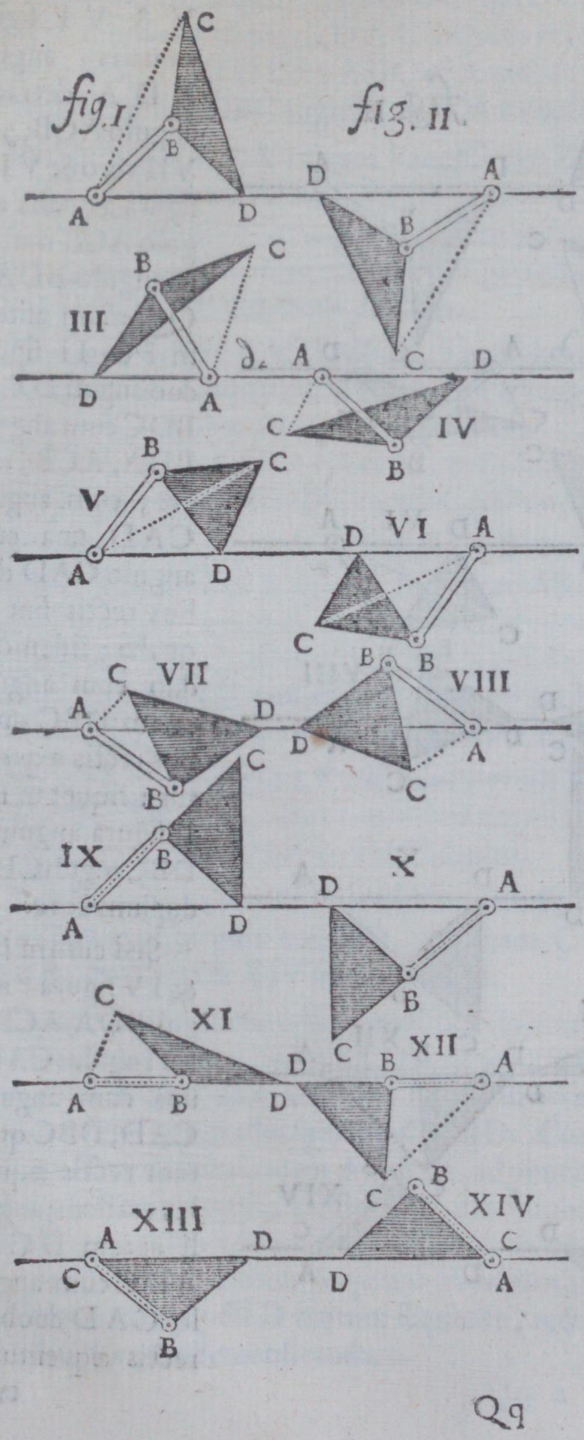


ſitum puncti C; atque in omni alia conſtitutione inſtrumenti idem prorſus ſemper demonſtretur, quod attinet punctum C: ſequitur rectas omnes ductas à punctis infinitis C ad punctum A, rectos cum A D angulos efficere. Sed cum recti omnes anguli inter ſe ſint æquales, non poterunt ejuſmodi rectæ, à punctis C ad punctum A ductæ, niſi eundem angulum conſtituere, hoc eſt, rectæ omnes ex C ad A eductæ unam eandemque efficient rectam lineam. Unde liquet puncto D moto per rectam A D, alterum punctum C ſuo etiam motu in plano deſcribere rectam lineam C A ipſi A D in puncto A perpendicularem. Quod erat demonſtrandum.

Statuatur autem regulam A B, quæ mobilis eſt circa punctum A, non ampliùs ſibi puncto B annexam habere regulam C B D ſed triangulum C B D, utrovis crure C B, B D ipſi A B æquale, quod circa illum ſuum verticem B, invariato manente angulo, moveri queat.

Dico rurſus, ſi feratur punctum D in recta linea A D, alterum punctum C motu iſto in plano deſcribere rectam lineam, efficientem ad A D angulos obliquos; quorum quidem acutus æqualis erit ſubduplo angulo D B C, qui in triangulo ſub æqualibus lateribus D B, B C continetur.

Cum



Cum autem punctum D in recta A D ferri concipiatur ad utramque partem puncti A, atque inde punctum C ſitum quoque ſuum ſimul mutet: variæ ex eo oriuntur inſtrumẽti conſtitutiones, quæ ſecundùm caſuum ſpecies ſunt conſiderandæ, ut ex iis demonſtratio univerſalis eliciatur.

Intelligatur itaque inſtrumentum in qua libuerit conſtitutione, & à puncto C ad A recta linea eſſe ducta A C.

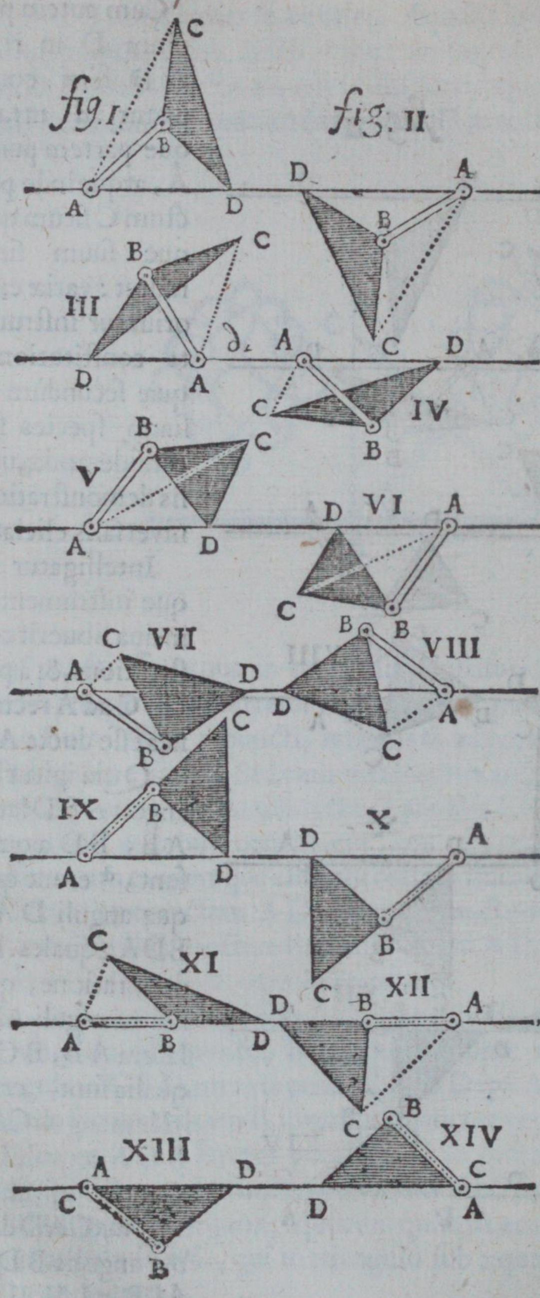
Quia igitur trianguli A B D latera A B, B D æqualia ſunt, [d] erunt quoque anguli D A B, B D A æquales. Eâdem ratione, quoniã trianguli ABC latera A B, B C æqualia ſunt, [e] erunt itidem anguli CAB, B C A æquales. ∝ Æqualis igitur eſt angulus CAD duobus angulis B D A, ACB in I, II, III &

d p 5 Primi Elem.

e p 5 Primi Elem.

IV

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



f p 32 Primi Elem.

g p 32 Primi Elem.

IV figura; β at in V & VI figura æqualis angulo B D A detracto angulo ACB; γ in VII verò & VIII figura æqualis angulo ACB multato angulo BDA. f Quoniam autem in I & II figura duo anguli D C B, BDC cum angulis BDA, ACB, α id eſt, cum angulo CAD, unà cum angulo CAD duobus rectis ſint æquales; iidemq́ue duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur: liquet in I & II figura, angulum DBC anguli CDA duplum fore.

Sed cum in III & IV figura g anguli BDA, ACB, α ſeu angulus CAD, unà cum angulis CAD, DBC quatuor rectis æquales exiſtant; anguli autem D C A, ADC cum angulo C A D duobus rectis æquentur: erit

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

erit angulus DBC æqualis angulis DCA, ADC, bis ſimul ſumptis. [h] At verò quoniam trianguli D A C angulus externus C A ḋ, duobus internis & oppoſitis DCA, ADC eſt æqualis: erit quoque in III & IV figura angulus DBC anguli acuti CA ḋ duplus. *h p 32 Primi Elem.*

Porrò cum in V & VI figura [i] anguli duo D C B, BDC cum angulo B D A dempto A C B, β qui eſt angulus CAD, unà cum angulo C A D, duobus rectis ſint æquales; iidemque duo cum angulo etiam D B C duobus rectis æquentur: liquet pariter in V & VI figura angulum DBC anguli CAD eſſe duplum. *i p 32 Primi Elem.*

Denique, in VII & VIII figura, [k] quia duo anguli D C B, B D C cum angulo ACB ſublato ei BDA, γ qui eſt angulus CAD, unà cum angulo C A D duobus rectis ſunt æquales; ac iidem duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur; manifeſtum ſimiliter eſt in VII & VIII figura angulum DBC anguli CAD duplum fore. *k p 32 Primi Elem.*

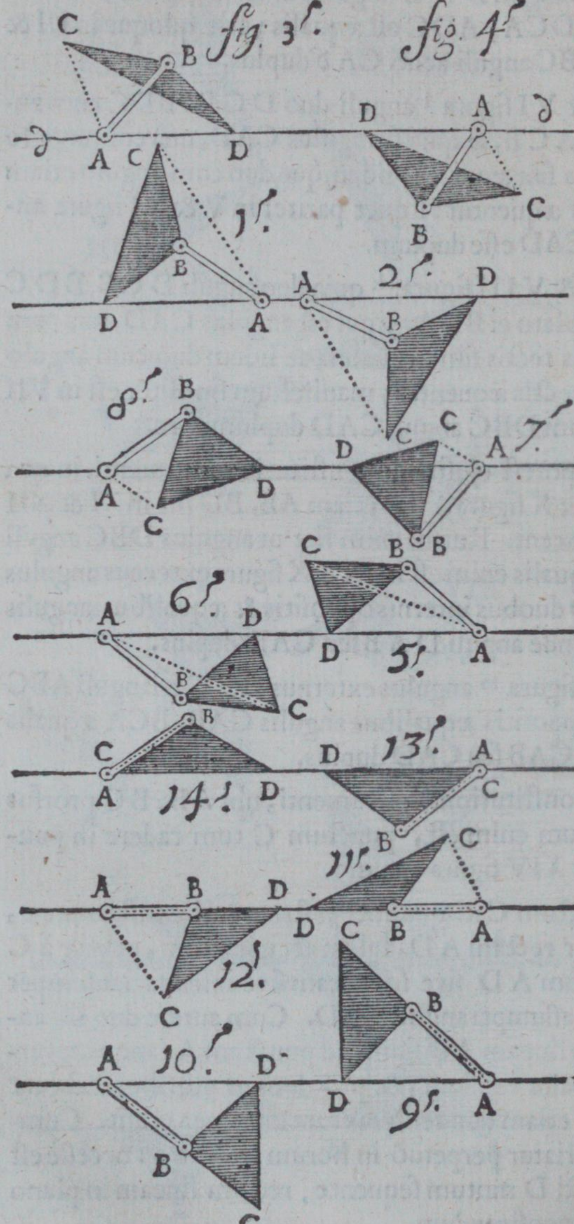
Præterea concipi poteſt ejuſmodi conſtitutio inſtrumenti, in qua AB, BC (ſicut in IX & X figura;) ſive etiam AB, BD (ut in XI & XII figura,) in directum jacent. Rurſus enim fiet ut angulus DBC anguli CAD ſit duplus. [l] Æqualis enim eſt in IX & X figura externus angulus DBC trianguli ABD duobus internis oppoſitis & æqualibus angulis DAB, BDA, ac proinde anguli D A B ſeu CAD duplus. *l p 32 Primi Elem.*

In XI verò & XII figura [m] angulus externus D B C trianguli ABC duobus internis & oppoſitis æqualibus angulis CAB, BCA æqualis eſt, ac idcirco ipſius CAB ſeu CAD duplus. *m p 32 Primi Elem.*

Nihil dico de ea conſtitutione inſtrumenti, ubi AB, BC prorſus coincidunt: perſpicuum enim eſt, punctum C tum cadere in punctum A, ut in XIII & XIV figura apparet.

Quapropter punctum C in qualibet inſtrumenti conſtitutione, ex motu puncti D per rectam A D, talem accipit ſitum, ut quæ à C ad A recta ducitur cum A D ſive ſupra eam ſive infra faciat ſemper angulum ſubduplum aſſumpti anguli CBD. Cum autem duo illi anguli, qui ſupra & infra lineam AD fiunt, ad punctum A tanquam verticem, inter ſe æquales exiſtant, & pro duobus cruribus habeant unam lineam A D: [n] etiam duo reliqua crura una linea erunt. Cumque punctum C reperiatur perpetuò in horum alterutro: neceſſe eſt ejuſdem motu, puncti D motum ſequente, rectam lineam in plano deſcribi. Ut erat demonſtrandum. *n p converſam 15 Primi Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Sciendum tandem eſt, nihil referre ad quam partem rectę BC concipiatur triangulum BDC, ut ea fiant quæ propoſita ſunt. Si autem in alteram partem rectæ BC idem triangulum intelligatur, quod quidem fiet ſumēdo illud puncto C moveri per rectam AD: recta AC aliam tunc quoque ad punctum A poſitionem obtinebit. Sed ne opùs ſit novâ id oſtendere demonſtratione, ſatis eſſe duximus ſecūdùm eandem hypotheſin conſimiles omnes ejuſdē inſtrumenti conſtitutiones exhibere, eaſque ſimili charactere inſignire, quibus ſuperiùs demonſtrata communiter applicari poſſent. Cum alia nulla differentia hîc videatur advertēda, niſi quòd pun-

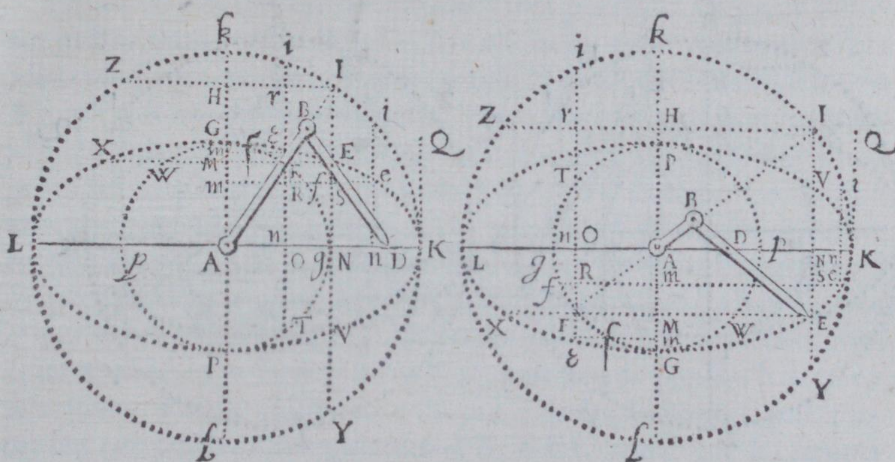
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

punctum ſupra vocatum C, hîc appelletur D; & quod ibi dicebatur D, hîc à nobis nominetur C. Ita ut ſupervacaneum ſit plura ſuper hac re in medium afferre.

Caput II.

De ellipſibus, quæ ex motu implicato in plano circa axes ſeu extremas diametros deſcribuntur.

REvertor jam ad primum inſtrumentum ſupra deſcriptum, hoc eſt, concipio rurſus in plano quocunque regulam AB, mobilem circa punctum fixum A, atque huic annexam eſſe aliam regulam BED in puncto B, quæ circa illud in eodem plano ſimiliter circumagi poſ-

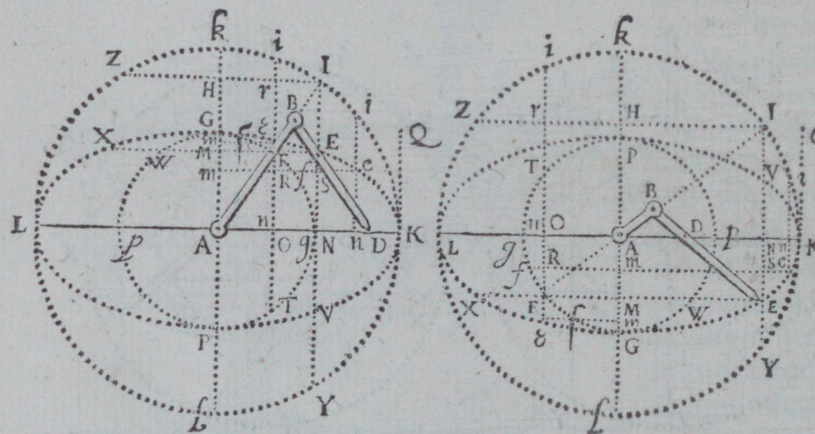


ſit. Aſſumatur prætereа in B D quodvis punctum E intra puncta B & D, ſive etiam in ea producta ultra D. Sit autem BD ipſi AB æqualis.

Dico ſi feratur punctum D per rectam lineam A D, punctum quidem E motu iſto in eodem plano deſcribere ellipſis circumferentiam; cujus centrum eſt A; & axis tranſverſus æqualis duplæ compoſitæ ex AB, BE; at verò axis rectus æqualis duplæ DE. Hoc autem eſt oſtendendum.

Quoniam enim A B mobilis eſt circa A, manifeſtum eſt, ſi ſumatur quodlibet punctum in A B vel in ipſa producta, quod ſimul cum ea moveri intelligatur circa A, illud ipſum deſcribere circuli circumferentiam. Aſſumatur itaque punctum F, ita ut B F ſit æqualis B E, illudque deſcribat circuli circumferentiam FGP. Sit porrò recta

GAP perpendicularis ad AD, ſecans circumferentiam dicti circuli in G & P: erit ea axis rectus ellipſis. æqualis enim aſſumpta eſt BF ipſi BE, atque eſt etiam A B ipſi BD æqualis: quapropter & reliqua A F reliquæ DE æqualis erit, atque ita G A P æqualis duplæ D E. Producatur denuò AB ad I, donec BI ſit æqualis BE, centroq́ue A intervallo AI circuli circumferentia deſcribatur LIK, ſecans hinc inde AD in L & K: eritq́ue L K axis tranſverſus ellipſis. cum A I æquetur compoſitæ ex AB, BE, atque ita L A K æqualis ſit duplæ compoſitæ ex AB, B E. His igitur ita ſe habentibus, demonſtrandum eſt, punctum E eſſe in ellipſis circumferentia, cujus axes ſunt, quos diximus.



a p 2 Sexti Elem.

Agatur namque producaturvè E F, ut ſecet A G in M: [a] erit igitur hæc parallela ipſi A D, ac perpendicularis ad A G. Agatur quoque ſeu producatur IE, donec ſecet AD in N: cadetq́ue hæc ſimiliter perpendiculariter in AD. Ducatur denique FO ipſi INE æquidiſtans, ſecans AD in O; ipſiſq́ue axibus LK, GP inveniatur tertia proportionalis K Q.

b p 4 Sexti Elem.
c p 16 Quinti Elem.
d p 15 Quinti Elem.
e p 22 Quinti Elem.
f p Corol. 20. ſexti Elem.

[b] Cum igitur ſimilia ſint triangula A F O, A I N: erit F O ad F A, ut N I ad I A; [c] permutandoq́ue F O ad N I, ut FA ad IA, [d] vel dupla F A ſeu G P ad duplam I A ſeu L K; [e] atque etiam quadratum FO ad quadratum NI, ut G P quadratum ad LK quadratum. Cumq́ue, ob proportionales KQ, GP & LK, [f] quadratum G P ad quadratum LK ſit,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſit, ut KQ ad LK: erit quoque ut quadratum FO, hoc eſt, quadratum NE, ad quadratum NI, ita KQ ad LK. [g] Eſt verò quadratum NI æquale rectangulo LNK. Quapropter erit, ut quadratum NE ad rectangulum LNK, ita KQ rectum figuræ latus ad LK latus tranſverſum. [h] Liquet ergo punctum E eſſe in ellipſis circumferentia, cujus extremæ diametri ſeu axes ſunt LK, PG; latus autem rectum principale KQ, pertinens ad axem LK.

g p 35 Tertii Elem.

h p converſâ 21 Primi Conic. Apollonii.

Quia autem hoc in infinitum ita ſe habet circa omnes alias rectas NE, ordinatim ad axem LK adplicatas, in quavis alia inſtrumenti conſtitutione: ſequitur punctum E motu iſto in plano deſcribere ellipſis circumferentiam, circa extremas diametros, axeſvè KL, GP. Quod erat demonſtrandum.

Atque uti hæc quidem contingunt circa punctum E, prout ſumitur in BD intra puncta B & D; ſive etiam in ea continuata ultra D: idem continget quoque, ſi ſumatur in BD producta ultra B, ſi modò BE ipſi AB non ſumatur æqualis. Nam ſi in memoriam revocemus id quod capite primo demonſtravimus de puncto C, quoad primum inſtrumentum ſive regulas mobiles AB, DBC; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectam AD, punctum C motu iſto deſcribat rectam lineam, ipſi AD perpendicularem: facilè intelligemus, ſi fingatur ſimiliter ejuſmodi punctum in BD intra puncta B & C, ſive etiam in ea producta ultra C: idem tum eſſe ac ſi conciperemus punctum C ferri in recta AC ac ea fieri, quæ jam de puncto E demonſtravimus. Eadem quippe tunc ibi erit relatio, eademque percipietur ſemper conſtitutio regularum AB, BEC punctique E, ſumpti intra B & C, ſive etiam in ea producta ultra C ad rectam AC; quæ fuit hîc regularum AB, BED & puncti E, ſumpti intra B & D, ſive etiam in ipſa continuata ultra D, ad rectam AD: ac proinde alia non indigebimus demonſtratione. Adeò ut ſi punctum E à B utrinque æqualiter fuerit diſſitum, æquales ac ſimiles planè, ſed inverſo ſitu ellipſes deſcribantur.

Sciendum denuo eſt, non ſolùm ex motu puncti D per rectam AD ſemi-ellipſes deſcribi, verùm etiam integras, ſi modò regulæ AB, BED ad alteras partes rectæ AD incurventur.

SCHO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SCHOLIVM.

*Q*Voniam ſuperiùs oſtenſum eſt, FO, hoc eſt, NE, eſſe ad NI, ut GP, qui eſt axis rectus, ad LK, qui eſt axis tranſverſus ellipſis; atque hoc ipſum in infinitum manifeſtum ſit de omnibus aliis rectis n e, n i, quæ tam in ellipſi LGKP quàm in circulo L k K l ordinatim adplicantur ad axem LK: i ſequitur, ellipſim LGKP ad circulum L k K l, ſicuti etiam ellipſis ſegmentum E e V ad circuli ſegmentum I i Y, eſſe, ut axis rectus GP ad axem tranverſum LK.

i Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Item quoniam ipſius n ε ad n i, totius ad totam, eadem eſt ratio quæ ablatæ n F ad ablatam n r: k erit etiam reliquæ F ε ad reliquam r i eadem ratio quæ totius n ε ad totam n i, hoc eſt, quæ axis recti GP ad axem tranſverſum LK. Cumque hoc in infinitum ſit evidens de omnibus aliis rectis F ε, r i in ſegmento ellipſis E ε X & circuli I i Z: eodem modo concludendum erit, l ellipſis ſegmentum E ε X ad circuli ſegmentum I i Z eſſe, ut axis rectus GP ad axem tranſverſum LK.

k p 19 Quinti Elem.

l Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

m Sequitur quoque, propter ſimilitudinem triangulorum AFO, AIN, eſſe AO ad AF, ut AN ad AI; n permutandoque AO ad AN, hoc eſt, MF ad ME, ut AF ad AI ſeu GP ad LK: ac proinde MF ad ME, ut axis rectus GP ad axem tranſverſum LK. Quia verò in infinitum illud apparet quoque de omnibus aliis rectis m f, m ε, quæ tam in circulo p G g P quàm in ellipſi LGKP ſunt ordinatim applicatæ ad axem GP: o neceſſe eſt circulum p G g P ad ellipſim LGKP, ſicut etiam circuli ſegmentum F f W ad ellipſis ſegmentum E ε X, eſſe, ut axis rectus GP ad axem tranſverſum LK.

m p 4 Sexti Elem.

n p 16 Quinti Elem.

o Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Porrò cum ipſius m f ad m e, totius ad totam, eadem ſit ratio quæ ablatæ mR ad ablatam mS: p erit etiam reliquæ R f ad reliquam S e eadem ratio, quæ totius m f ad totam m e, hoc eſt, quæ axis recti GP ad axem tranſverſum LK. Et quoniam hoc quoque in infinitum apparet de omnibus aliis rectis R f, S e in ſegmento circuli F f T & ellipſis E e V: q ſimiliter inferendum eſt circuli ſegmentum F f T ad ellipſis ſegmentum E e V eſſe, ut axis rectus GP ad axem tranſverſum LK.

p p 19 Quinti Elem.

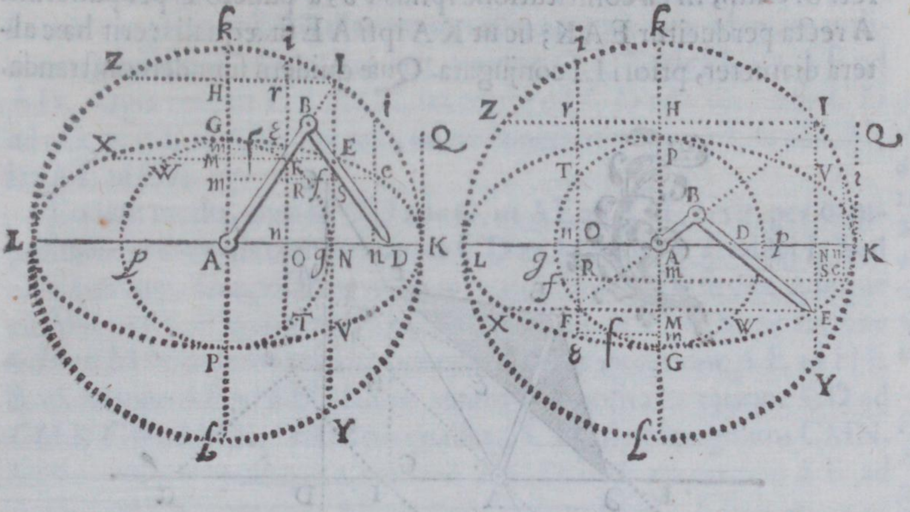
q Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Quia itaque demonſtratum eſt, circulum p G g P ad ellipſim LGKP, itemque circuli ſegmentum F f W ad ellipſis ſegmentum E ε X eſſe, ut axis rectus GP ad axem tranſverſum LK; ac in eadem ratione quoque eſſe ellipſim LGKP ad circulum L k K l, ſicuti etiam ellipſis ſegmentum E ε X ad circuli ſegmentum I i Z: liquet ellipſim LGKP eſſe medio loco proportionalem inter circulum p G g P & circulum L k K l; nec non ejus ſegmentum E ε X inter circulorum ſegmenta F f W & I i Z.

Simi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Similiter quoniam oſtendimus, circuli ſegmentum F ſ T *eſſe ad ellipſis ſegmentum* E *e* V, *ut axis rectus* G P *ad axem tranſverſum* L K; *ac in eadem ratione eſſe quoque ellipſis ſegmentum* E e V *ad circuli ſegmentum* I *i* Y:



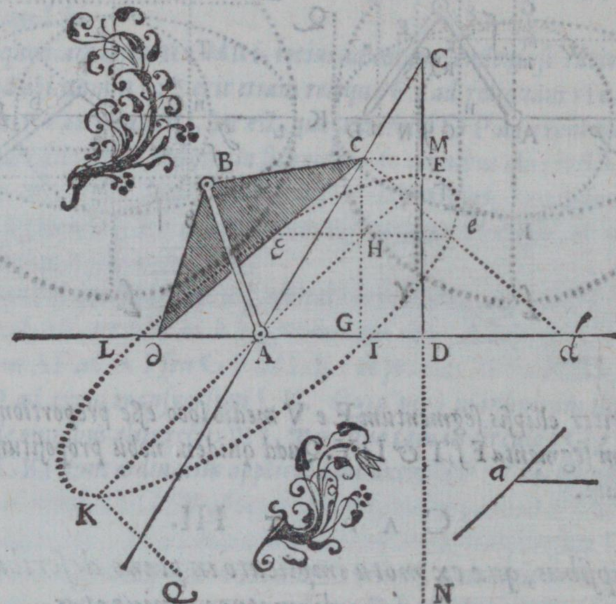
liquet pariter ellipſis ſegmentum E *e* V *medio loco eſſe proportionale inter circulorum ſegmenta* F ſ T *&* I *i* Y. *Quod quidem nobis propoſitum erat hîc demonſtrare.*

Caput III.

De ellipſibus, quæ ex motu implicato in plano deſcribuntur, circa quaſcunque diametros conjugatas.

REvocetur jam autem ſecundum inſtrumentum, de quo paulò ante loquuti ſumus, hoc eſt, concipiatur rurſus in plano quocunque regula mobilis AB circa punctum fixum A, atque huic annexum triangulum ∂ B *c* in puncto B, quod habeat latera ∂ B, B *c* æqualia longitudini regulæ A B; ita tamen ut circa B in eodem plano converti queat. Quandoquidem autem cognoſco ex præmiſſis, dum punctum ∂ fertur in recta linea A D, punctum *c* motu iſto in hoc plano rectam lineam deſcribere A C, quæ ad A D angulos facit obliquos, quorum acutus CAD eſt ſubduplus anguli ∂ B *c*, qui in triangulo *d* B *c* ſub æqualibus lateribus ∂ B, B*c* continetur; conſidero preterea punctũ m aliquod *e* in latere ∂ *c*. Dico jam id ipſum motu illo in eodem plano de-

deſcribere ellipſis circumferentiam, cujus centrum eſt A; diameter una LI, æqualis duplæ *c e*; altera verò ipſi conjugata EK. Hæc autem invenitur, ſi *c* ∂ latus trianguli inter rectas A C, A D accommodetur, ita ut ipſi AD ſit perpendicularis: quemadmodum hîc per CD apparet. Si enim, in ea conſtitutione ipſius *c* ∂, à puncto E per punctum A recta perducitur E A K; ſic ut K A ipſi A E ſit æqualis: erit hæc altera diameter, priori LI conjugata. Quæ quidem ſunt demonſtranda.



Demittatur ex *c* recta *c* G perpendicularis in A D, fingaturque latus trianguli *c* ∂ habere etiam poſitionem rectæ *c d* (patet enim ex figura I^{ma} pag^{næ} 305 ita quoque poſſe eſſe conſtitutum), connectaturque recta ε *e*, ſecans *c* G in H. Producatur porrò C D ut D N ſit æqualis DC; & ex DC abſcindatur D M æqualis ipſi *c* G: ac denique ad EK, LI inveniatur tertia proportionalis K Q.

a Per caput 3 hujus.

[a] Cum igitur punctum *c* cadat ſemper in recta linea A C, manifeſtum eſt illud demum coïnciſurum cum puncto C, cùm ab A longiſſimè erit remotum; quo quidem caſu punctum E verticem ellipſis repræſentabit.

b p 4 Sexti Elem.

[b] Quoniam itaque *c d* hoc eſt CD ad *c* G eſt, *α* ut *c e* hoc eſt C E

ad

ad *c* H; parallelæ autem exiſtant C D, *c* G: erunt puncta E, H, A in una linea recta. Liquet igitur punctum H, ubi invicem ſecant perpendicularis *c* G & recta ε *e*, eſſe quoque punctum interſectionis ipſarum E A K, ε *e*. Cum autem recta ε *c* à *c* G in H bifariam ſemper dividatur, ſequitur ſimiliter ipſam à K A E bifariam ſemper in H diviſum iri: ac proinde E A K diametrum eſſe; ε *e* verò quæ ad ipſam ordinatim adplicatur. Quocirca erit quoque ut C E ad *c* H, ita A E ad A H. Quia verò ut C E ad *c* H, ita etiam eſt C D ad *c* G: [c] erit C D ad *c* G, ut A E ad A H; [d] & per converſionem rationis ut C D ad C M, ita A E ad H E.

Eodem modo, cum ſit C D ad *c* G, ut A E ad A H; [e] erit, per compoſitionem rationis contrariam, ut C D ad M N, ita A E ad K H. Sed cum rationes, compoſitæ ex eiſdem rationibus, inter ſe ſint quoque eædem: erit ratio compoſita ex ratione C D ad C M & ex ratione C D ad M N eadem rationi, quæ componitur ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H. Ratio autem compoſita ex ratione C D ad C M & C D ad M N, [f] eſt ratio quadrati C D ad rectangulum C M N. Ratio verò compoſita ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H, [g] eſt ratio quadrati A E ad rectangulum E H K. [h] Erit igitur ut quadratum C D ad rectangulum C M N, ita quadratum A E ad rectangulum E H K.

Quoniam verò eſt ut C D ad *c* G ſeu D M, α ita *ce* ad *c* H: [i] erit etiam ut quadratum C D ad quadratum D M, ita quadratum *ce* ad quadratum *c* H; [k] & per converſionem rationis ut quadratum C D ad quadratum C D multatum quadrato D M, [l] quod idem eſt atque rectangulum C M N, ita quadratum *c e* ad quadratum *c e* diminutum quadrato *c* H, [m] id quod eſt quadratum H *e*. Siquidem igitur ratio quadrati A E ad rectangulum E H K eſt, ſicut quadrati C D ad rectangulum C M N; & quoque ratio quadrati *c e* ad quadratum H *e*, ſicut quadrati C D ad rectangulum C M N: [n] erunt quoque inter ſe eædem, eritque ut quadratum *c e* ad quadratum H *e*, ita quadratum A E ad rectangulum E H K; [o] permutandoque ut quadratum *c e* ſeu A I ad quadratum A E, ita quadratum H *e* ad rectangulum E H K. Sunt autem K Q, L I, & K E ex conſtructione proportionales. [p] Erit idcirco K Q ad K E, ut quadratum L I ad quadratum K E, ſeu quadratum A I ad quadratum A E. Quia itaque conſtat quadratum H *e* ad rectangulum E H K eſſe, ut rectum figuræ latus K Q ad latus figuræ tranſverſum K E: [q] liquet punctum *e* eſſe in ellipſis circumferentia, cujus dia-

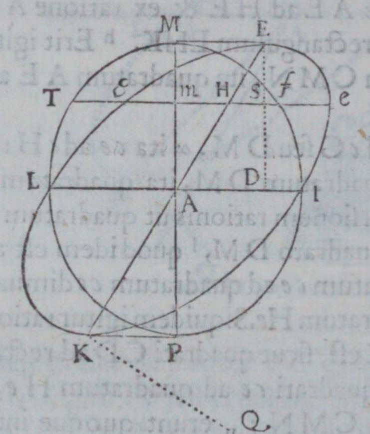
c ꝑ 11 Quinti Elem.
d ꝑ Corol. 19 Quinti Elem.
e Vide Clavium ad 18 Quinti Elem.
f ꝑ 23 Sexti Elem.
g ꝑ 23 Sexti Elem.
h ꝑ 11 Quinti Elem.
i ꝑ 22 Sexti Elem.
k ꝑ Corol. 19 Quinti Elem.
l ꝑ 5 Secundi Elem.
m ꝑ 47 Primi Elem.
n ꝑ 11 Quinti Elem.
o ꝑ 16 Quinti Elem.
p ꝑ Corol. 20 Sexti Elem.
q Per converſam 21 Primi Conicorum Apollonii.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

diametri conjugatę ſunt KE, LI; latus autem rectum KQ, pertinens ad diametrum KE. Quia autē hoc in infinitum ita contingit circa omnes alias rectas H*e*, ordinatim ad diametrum KE adplicatas, in quavis alia inſtrumenti conſtitutione (cum illæ omnes hîc nullam adferant differentiam, quo minus demonſtratio ad illas poſſit adplicari): ſequitur punctum ε motu iſto in plano deſcribere ellipſis circumferentiam, circa diametros KE, LI. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVandoquidem præcedenti capite quædam attigimus de iis, quæ contingunt circa ſuperficiem ellipſis & ejuſdem ſegmentorum; hoc tamen ibi factum fuit juxta ſolam conſiderationem axium, nec locum habuit niſi tantùm in ſegmentis rectis. Verùm ut contemplatio illa generalis ſit juxta quaſcunque diametros, & in ſegmentis quoque ſcalenis pateat; conſequenter oſtendemus, cui ellipſi, juxta axes conſideratæ, alia ſit æqualis: quemadmodum etiam, quibus ſegmentis rectis ipſa ellipſis ſegmenta ſcalena æquentur.



Sit ergo ellipſis LEIK, *cujus diameter* LI; *altera autem huic conjugata ſit* KE, *ad quam ordinatim adplicata intelligatur* ε e; *ſegmentum verò ſcalenum eſto* ε E e. *Si itaque ex punctis* E, K *alternatim ducantur rectæ* EM, KP *diametro* LI *parallelæ; tum per centrum* A *recta* PAM *perpendicularis ad* LI, *ſecans* EN, KP *in* M *&* P, [a] *ac denique circa axes conjugatos* LI, PM *ellipſis deſcribatur* LMIP: *dico ellipſim* LEIK *ellipſi* LMIP *æqualem eſſe. Cæterùm ſi producatur recta* ε e, *donec ſecet hujus ellipſis circumferentiam in* f *&* T: *dico ſimiliter ſegmentum illius* ε E e *ſegmento hujus* TMf *eſſe æquale.*

Eſt namque in ellipſi LEIK [b] *ut rectum latus* KQ *ad tranſverſum* KE, *ſive quadratum* LI *ad quadratum* KE, [c] *ſive etiam quadratum* AI *ad quadratum* AE, *α ita* He *quadratum ad* KHE *rectangulum. Quoniam verò* [d] *parallelæ ſunt* ME, ε e, *&* KP: [e] *erit* AE *ad* HE, *ut* ED *ſeu* AM *ad* ES *ſeu* Mm. *Et ſumptis antecedentium duplis, ut* KE *ad* HE, *ita* PM *ad* Mm;

a per 4 Caput hujus.
b p 21 Primi Conicorum Apollonii.
c p 15 Quinti Elem.
d Ex conſtructione.
e p 4 Sexti Elem.

M m; [f] *dividendoque* K H *ad* H E, *ut* P m *ad* m M. [g] *Vt autem* K H *ad* HE, *ita eſt rectangulum* KHE *ad* H E *quadratum*; *& ut* P m *ad* m M, *ita eſt* P m M *rectangulum ad* m M *quadratum*. [h] *Erit igitur ut rectangulum* K H E *ad quadratum* H E, *ita rectangulum* P m M *ad* m M *quadratum*; [i] *& permutando rectangulum* K H E *ad rectangulum* P m M, *ut quadratum* HE *ad quadratum* m M, [k] *ſive ut quadratum* AE *ad* AM *quadratum*. *Cum autem oſtenſum ſit*, α *quadratum* H e *ad rectangulum* K H E *eſſe*, *ut quadratum* A I *ad quadratum* A E: [l] *erit quoque ex æquo*, *ut quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ita quadratum* AI *ad quadratum* AM. *Quia verò in ellipſi* L M I P *ſimiliter*, *ut ſupra*, α *quadratum* m f *ad rectangulum* P m M *eſt*, *ut quadratum* A I *ad quadratum* A M: [m] *erit quoque quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ut* m f *quadratum ad rectangulum* P m M. *E quibus ſequitur* [n] *quadratum* H e *quadrato* m f *æquale eſſe*. *Æquales igitur quoque erunt rectæ* H e, m f, *unde & earum duplæ* ε e, T f. *Eadem eſt demonſtratio de omnibus aliis ordinatim adplicatis ad diametros* K E, P M, *in infinitum aſſumptis in utraque figura*. *Vnde patet*, [o] *ellipſim* L E I K *ellipſi* L M I P *æqualem eſſe*, *ſicuti etiam ſegmentum ejus* ε E e *ſegmento hujus* T M f. *quod idem quoque de reliquis ſegmentis* ε K e, T P f *eſt intelligendum*. *Quare conſtat propoſitum*.

f ꝑ 17 Quinti Elem.
g ꝑ 1 Sexti Elem.
h ꝑ 11 Quinti Elem.
i ꝑ 16 Quinti Elem.
k ꝑ 4 & 22 Sexti Elem.
l ꝑ 22 Quinti Elem.
m ꝑ 11 Quinti Elem.
n ꝑ 9 Quinti Elem.
o Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Ex his liquet, *cuivis ſegmento ellipſis dato*, *exhiberi poſſe circuli ſegmentum ipſi æquale*. *Si enim ſegmentum illud fuerit ſcalenum*, *ut ſegmentum* ε E e; *oſtendimus hîc aliud* T M f *ipſi æquale*, *quod ſit rectum*. *Porrò quænam ratio inter hoc & circuli ſegmentum exiſtat*, *ex præmiſſis quoque manifeſtum eſt*. *Patet ergo ſegmento cuivis ellipſis dato*, *circuli ſegmentũ inveniri æquale*.

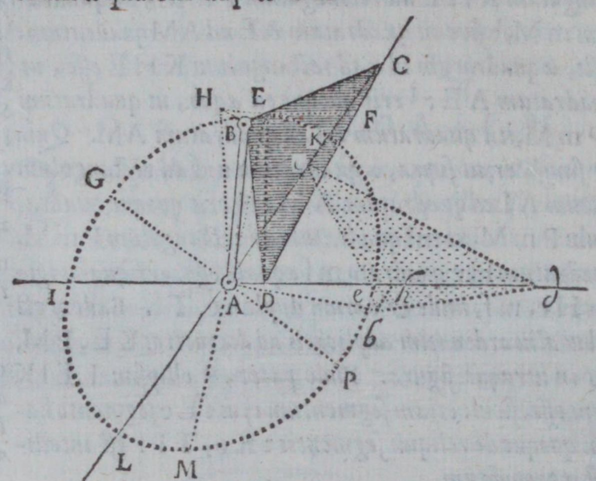
Sequuntur porrò alia ad ellipſes ſpectantia, *quæ ex motu implicato*, *tam circa extremas*, *quàm alias quaſcunque diametros conjugatas*, *beneficio ejuſdem inſtrumenti*, *in plano deſcribuntur*.

PRiuſquam finem impono contemplationi prædicti inſtrumenti, etiam mihi in mentem venit conſiderandum, quid contingat circa punctum E, cùm ſumitur in latere B C trianguli B CD, ſive in ipſo in utramvis partem producto.

Aſſumatur igitur punctum aliquod in BC (ut E,) intra puncta B & C, ſive etiam in eadem utrinque ultra ipſa indefinitè producta, modò BE ipſi AB non ſumatur æqualis, ſi illud ſumere velimus ultra B. Dico rurſus, ſi feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu

 iſto

iſto in plano deſcribere ellipſis circumferentiam, cujus centrum eſt A, axis tranſverſus ipſa recta AC, quam deſcribit punctum C, longitudinem ſuam L K æqualem habens duplæ compoſitæ ex A B, B E: & cujus axis rectus priori conjugatus eſt GP, habens longitudinem ſuam æqualem duplæ C E.



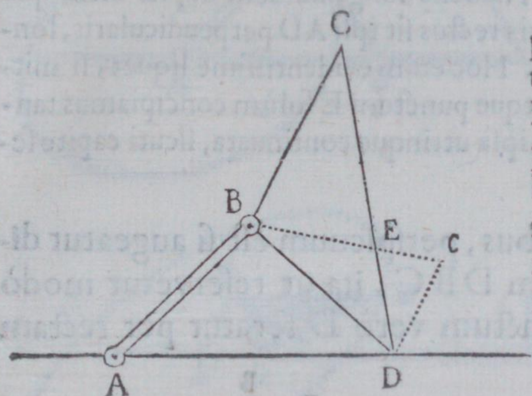
Enimverò ſi recordemur, quæ capite primo demonſtravimus de puncto C circa prædictum inſtrumentum; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectâ A D, punctum C motu iſto deſcribat rectam lineam A C, efficientem ad AD angulos obliquos; & horum quidem acutum CAD ſubduplum eſſe anguli DBC, qui in triangulo CB D ſub æqualibus lateribus D B, B C continetur: Facilè intelligemus, ſi, relicto triangulo D B C, ponatur jam punctum E tanquam in regula BC, ſeu in ipſa utrinque producta (ut priùs fecimus): idem fore ac ſi concipiamus punctum C tum ferri in recta A C, & ea fieri, quæ de puncto E capite ſecundo, circa regulas mobiles A B, DBC, demonſtrata ſunt. Hoc eſt, punctum E motu iſto in plano deſcribere ellipſis circumferentiam circa centrum A, cujus axis tranſverſus L K cadit in A C, ac æqualis eſt duplæ compoſitæ ex AB, BF; rectus verò GP, huic perpendicularis conjugatuſque, æqualis duplæ C E.

Quoniam autem accidit rectam AD, primò propoſitam, diametrum quoque ellipſis exiſtere: deinceps determinanda reſtat ejus longitudo atque ſimul ejus, quæ cum ipſa eſt conjugata.

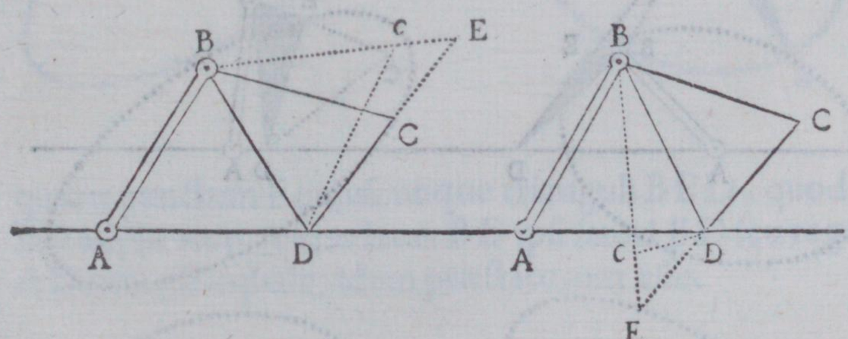
Ductâ itaque in triangulo D B C rectâ D E, erigatur ex A ad A D perpendicularis A H, æqualis ductæ D E; ducaturque per H recta H F, parallela ipſi A D. Porrò deſcribatur ſupra A H triangulum AHB, æquale triangulo D E B in inſtrumento, ita ut H B ſit æqualis ipſi BE, A B autem ipſi B D; & centro B intervallo B H arcus deſcribatur,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

batur, ſecans HF in E: eritque punctum E vertex ellipſis. Quare ſi ducatur recta ab E ad A, eaque continuetur donec MA æquetur AE: erit MAE ellipſis diameter. Denique ad determinandam alteram huic conjugatam, ſumatur in AD recta A *h*, ſimiliter ipſi DE in inſtrumento æqualis; atque, ut ante, ſupra hanc triangulum conſtituatur A *h b*, æquale triangulo DEB in inſtrumento; centroque *b* intervallo *b h* arcus deſcribatur, ſecans vel tangens AD in *e*. Poſt hæc æquatâ IA ipſi A*e*: erit I*e* altera ellipſis diameter, priori ME conjugata. Quæ quidem ex adplicatione inſtrumenti perſpicua ſunt.



Ex hoc autem quòd omne punctum E, ſive illud ſumitur in latere BC trianguli BCD, ſive in ipſo utrinque producto, motu ſuo deſcribat ellipſis circumferentiã, ſi moveatur punctum D per rectam lineam AD: generaliter inferre quoque poſſumus, punctum quodcunque



E, ſumptum in latere DC, aut in ipſo utrinque indefinitè producto, deſcripturum eſſe ellipſis circumferentiam.

Si enim ſumatur ejuſmodi punctum in latere DC, aut in ipſo utrinque indefinitè producto ultra C vel D, ducaturque recta BE: erit hæc vel minor, vel major quàm DB ſeu BC; minor quidem, ſi punctum E ſumptum fuerit in DC intra puncta D, C; major verò, ſi illud in latere DC utrinque indefinitè producto ultra puncta C, D ſuma-

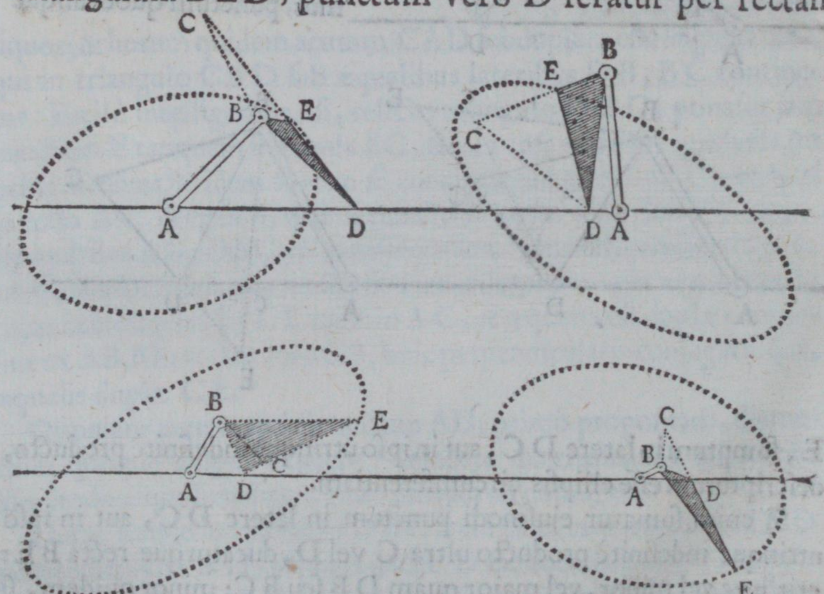
ma-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

matur. Quocirca ductâ BE, in eaque aſſumendo rectam B*c* ipſi DB ſeu B C æqualem, jungendoque D*c*: concipi hâc ratione quoque poterit punctum E, tanquam in latere B*c* trianguli B D *c*, ſive in eo ultra *c* indefinitè producto.

Quia denique conſiderari adhuc poteſt punctum E in latere B D trianguli B C D, ſive in ipſo utrinque indefinitè extenſo, modò B E ipſi A B non ſumatur æqualis, ſi illud ſumere libeat ultra B: rurſus fiet, ut, ſi feratur punctum D in recta linea AD, punctum E motu iſto circumferentiam ellipſis deſcribat; cujus quidem centrum ſit A; axis tranſverſus ipſa recta A D, habens longitudinem duplæ utriuſque ſimul A B, B E; & cujus axis rectus ſit ipſi AD perpendicularis, longitudinis autem duplæ D E. Hoc enim evidentiſſimè liquet, ſi mittamus triangulum D B C, atque punctum E ſolùm concipiamus tanquam in regula B D, aut in ipſa utrinque continuata, ſicuti capite ſecundo factum fuit.

His itaque exiſtentibus, perſpicuum eſt ſi augeatur diminuaturvè triangulum D B C, ita ut reſervetur modò triangulum B E D; punctum verò D feratur per rectam

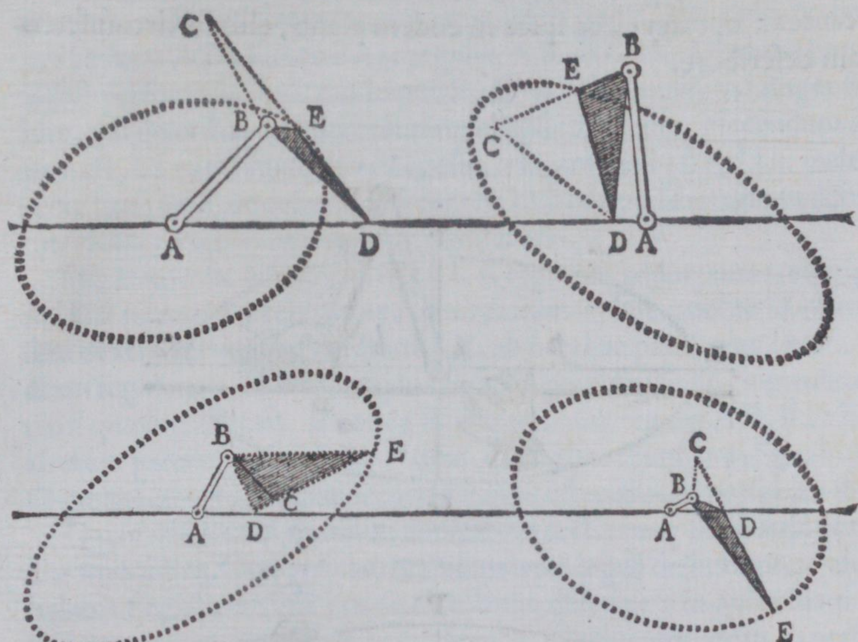


AD: quòd punctum E motu illo deſcribat ſemper ellipſis circumferentiam. Porrò quoniam perſpicuum eſt, trian-

gu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

gulum BED variè poſſe eſſe adfectum, & in utramvis partem rectæ BD conſtitutum; modò tantùm caveatur ne latus ejus B E ipſi lateri B D ſeu regulæ A B ſit æquale: ſe-



quitur punctum E cujuſcunque trianguli B E D, quod ad BD adplicatur, (cujus latus B E ipſi lateri B D ſeu regulæ A D non eſt æquale) idem præſtaturum eſſe.

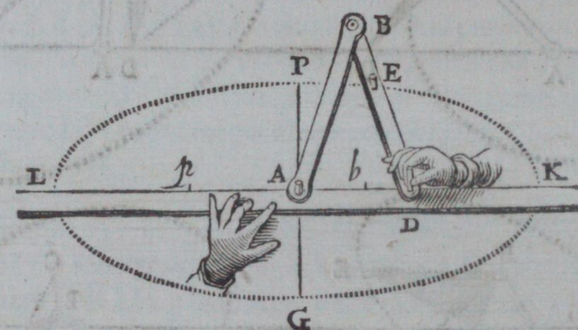
Caput IV.

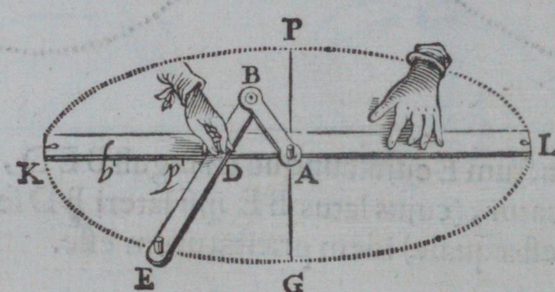
De modo deſcribendi ellipſes in plano, circa datos axes ſeu extremas diametros.

POſtquam præmiſſis capitibus ea pertractavimus, quæ ut fundamenta ſpectare poſſunt, quibus organicæ ellipſis deſcriptiones ſuperſtrui valent, ſupereſt ut iiſdem veſtigiis inſiſtentes ad eorum uſum nos accingamus, atque oſtendamus quo pacto ea expedian-

tur quæ hac in parte vulgò proponi ſolent. Docebimus ergo primò, quibus modis circa datos axes, ſeu extremas diametros, ellipſes ipſæ in plano deſignentur.

Dentur itaque in plano quocunque, L K axis tranſverſus, rectus autem huic conjugatus G P, ſeſe bifariam & normaliter in centro A ſecantes: oportet circa ipſos in eodem plano, ellipſis circumferentiam deſcribere.





Ponatur A *p* æqualis G A ſeu AP, ita ut *p* K æquetur vel aggregato vel differentiæ ipſarum KA, AP (perinde enim eſt); ipſaque bifariam ſecetur in *b*. Deinde fiant duæ regulæ A B, B D ex orichalco, ligno, aliavè materia ſolida, longitudine æquales ipſi *p b* ſeu *b* K; hâc tamen lege, ut regula B D tam longa exiſtat, ut in ipſa notari poſſit punctum E à B verſus D, ſic ut BE ipſi A *b* ſit æqualis. quocirca ſi A *b* longitudine ſuperet regulam B D, eatenus hæc ultra D prolonganda erit,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

erit, donec ipſi ſit æqualis. Hæ porrò regulæ ſic aptari debent, ut A B ſit perforanda unâ ſuâ extremitate in A, ita ut injici queat paxillo, in puncto A defixo, ac circa ipſum rotari: altera verò extremitas B annectenda regulæ BED extremitati B, ita tamen ut circa B liberè circumagi poſſit. Regula autem BDE in puncto D perforanda quoque erit, ut ſtylus aliquis acuminatus inſeri queat, qui cuſpide latus per rectam A D, ſecum ducat regulas A B, B D E. Denique regula BDE perforanda item erit in puncto E, ut recipiat alium inſuper ſtylum, qui deſcribat circumferentiam ellipſis in plano. Notandum autem eſt, ad exactam operis exegeſin, tria puncta B, E & D in eadem recta linea exiſtere debere, ac à centris iſtarum perforationum debita intervalla punctorum ab invicem obſervari.

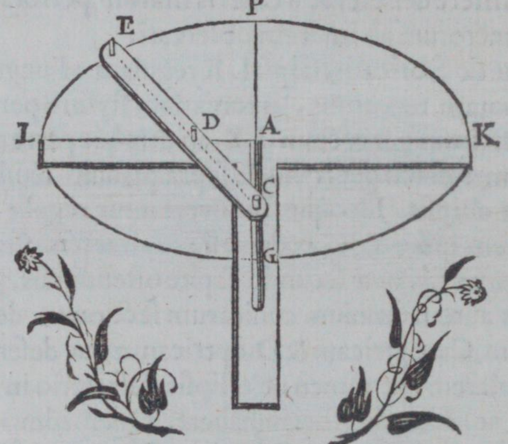
His itaque ſic fabricatis, ſi ipſi L K regulam adjungamus, eamque ſiniſtrâ immotam teneamus, interea dum ſtylum puncto D immiſſum dextrâ ferimus per rectam LK, ab utraque parte centri juxta dictam regulam: deſcribet ſtylus E ſupra planum ſemi-circumferentiam quæſitæ ellipſis. Ideoque ſi convertantur regulæ A B, B D E in alteram partem ipſius L K, eodem modo alter ſemiſſis deſignabitur. Quæ quidem ex iis, quæ ſecundo capite oſtendimus, perſpicua ſunt.

Quamvis autem omnium conicarum ſectionum delineationes ad Gnomonicam, Catoptricam & Dioptricam æquè deſerviunt, ac uſum habent ſingularem: fit tamen ut ellipſis deſcriptio in quibuſdam latiùs pateat, ac uſum uberiorem habeat. Quemadmodum in orthographicis ſphæræ delineationibus, in ædificiorum fornicationibus, cœlationibus pluteorum, ac aliis compluribus. Hinc quoque oritur, ut illam deſcribendi plures modi extent quàm reliquarum quidem coni ſectionum: ita ut conſentaneum judicaverimus omnes eos, qui organici ſunt ac quorum beneficio ellipſes uno ductu deſcribuntur, quantumque ipſi mihi conſtant hîc recenſere. Occurrit autem primò hic modus.

Eſto rurſus ellipſis deſcribenda circa extremas diametros, ſeu axes L K, P G. Ad hoc autem præparetur regula E C, ex orichalco vel ligno, ut velis, quæ longitudine æqualis ſit ipſi L A ſeu A K; in eaque notetur punctum D, ita ut E D æqualis ſit PA ſeu AG. Ipſa autem perforetur in punctis E, D & C, ſic ut ſtyli inſeri queant. quocirca ſciendum eſt, ad hoc regulam EC reverà quidem longitudine paululùm excedere debere rectam L A ſeu AK, aliàs enim fieri non poſſet ut in E & C perforaretur. Præterea conſtruatur ſcipio LCK, ſimiliter

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

liter ex orichalco, ligno, aliave dura materia, quæ in longitudinem CA pertuſa ſit fiſſurâ ejus latitudinis, cujus eſt craſſities ſtyli cylindrici in puncto C regulæ inſerti. His ita paratis, ſi latus ſcipionis ipſi LK adjungamus, ita ut fiſſura reſpondeat ipſi GA; tum verò regula EC ſtylo D contra latus LK feratur, interea dum ſtylus C liberè currit per fiſſuram CA: deſcribet ſtylus E in plano ſemiſſem circumferentiæ quæſitæ ellipſeos. quocirca ſi eodem modo operemur ad reliquam partem, tota circumferentia deſcripta erit. Quia autem ſcipio

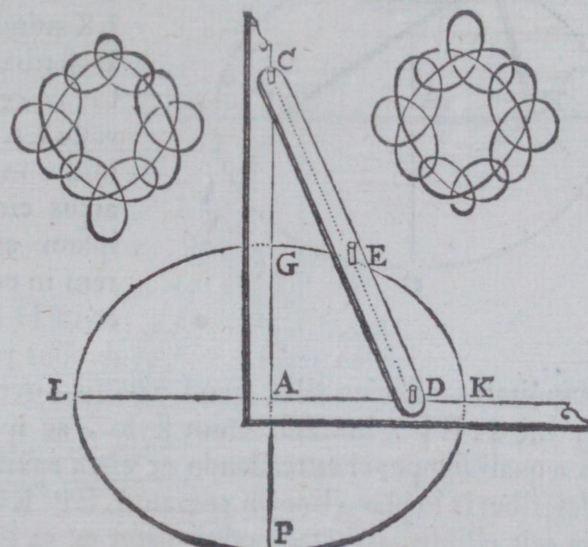


LGK duplicem ita normam repræſentat, manifeſtum eſt ſcipione deſtitutos, idem nos obtinere quoque beneficio alicujus normæ & regulæ CE, deſcribendo ſingulis vicibus circumferentiæ ellipſeos quartam partem.

Nullam hîc adjungo demonſtrationem, quoniam ab aliis adducta eſt, ac illa etiam ex ſecundo capite à quovis facilè deduci poteſt. qui enim caput illud rectè conſiderat, advertet mecum alium porrò modum ex eo manantem huic haud multò diſſimilem, qui ſic ſe habet.

Sit idem rurſus præſtandum quod ſupra, fiatque regula CD ejus longitudinis ut in ipſa notari poſſint tria puncta C, E, D, ita ſe habentia; ut diſtantia puncti C ad punctum E æqualis ſit ſemi-axi LA ſeu AK; diſtantia verò punctorum E,D à ſe invicem æqualis ſemi-

mi-axi G A ſeu AP. Quo facto, perforetur regula in dictis punctis ut ſtyli inſeri queant ipſaque moveri poſſit, ita ut collocata ſemper reperiatur inter duo crura cujuſvis normæ ad angulum G A K adplicatæ, ac ut ſtyli in punctis C & D inſerti contingant perpetuò internè ipſa crura. Hoc enim motu deſcribet ſtylus E uno ductu circumferentiæ ellipſeos quartam partem G E K. Notandum hîc oc-



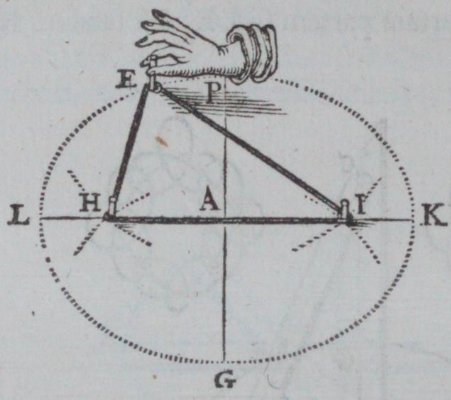
currit præterea ut ritè omnia ſuccedant; in ſuperiori quidem deſcriptione ſufficere, latus ſcipionis L A ſeu AK & fiſſuram AG eam habere longitudinem, quæ eſt diſtantia punctorum D, C in regula; in hac autem, ut crus utrumque normæ ad minimum ejus ſit longitudinis, cujus eſt regula CD.

Quia autem plura ab aliis afferuntur ad deſcriptionem ellipſis, ut modi diſtincti, quæ tamen parum differunt inter ſe, & à prædicto modo nihil habent diverſum, cum ex eodem fonte deriventur: conſultò eos omittendos eſſe duxi.

Cæterùm, cum alius inſuper modus uſitatus ſit, deſcribendi ellipſim in plano circa axes, qui fit beneficio alicujus reſtis vel fili: viſum quoque fuit eum huic noſtro ſubjungere, ne opùs ſit ut aliunde

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

petatur quidquid ad accuratam hujus lineæ deſcriptionem deſiderari poſſit.



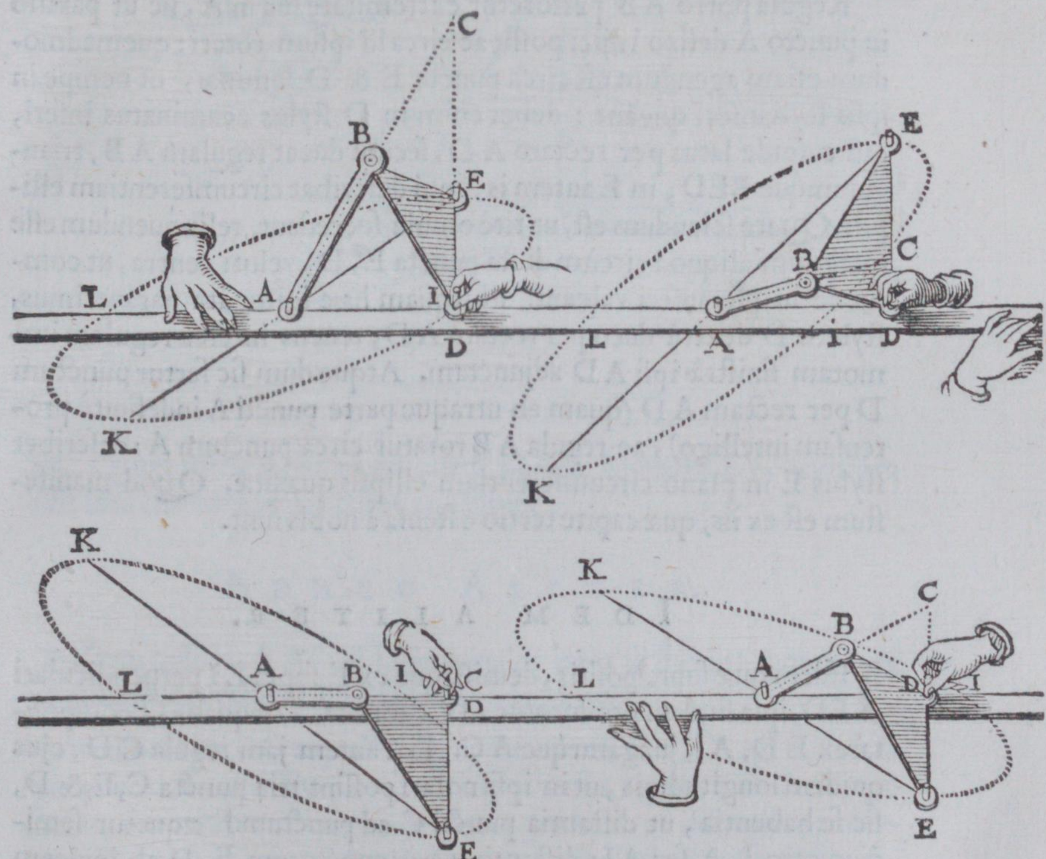
Sit itaque deſcribẽda ellipſis circumferentia beneficio fili, circa prædictos axes LK, PG, quorum major quidem eſt LK, minor verò PG. Deſcribatur ex P vel G, ut centro, intervallo LA ſeu AK, dimidio majoris axis, arcus circuli ſecans ipſum axem majorem in punctis H, I; & in H & I defixis duobus paxillis, jungantur extremitates alicujus fili, quod paxillis circumponatur, ſimiliter ut hîc HEI: immiſſo enim ſtylo, ac ipſo filum in triangulum æquali ſemper vi extendendo ac circa paxillos circumducendo, deſcribet is in plano lineam curvam LEP KG, quæ circumferentia erit ellipſis. quemadmodum patet ex 52 Propoſitione libri 3tii Conicorum Apollonii. Quocirca ſi velimus ut ellipſis circumferentia tranſeat per puncta L, P, K, & G, curare debemus ut filum extenſum pertingat præcisè ad aliquod horum punctorum. Denique ſciendum eſt, loca punctorum H, I, ubi paxilli defixi fuêre ad deſcriptionem ellipſis, ab effectu Focorum nomine appellari; quorum quidem punctorum conſideratio frequens eſt in Catoptrica & Dioptrica: ut perſpicuum eſt ex iis, quæ ſequuntur caput ſeptimum Dioptricæ Viri illuſtris, Renati des Cartes.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Caput V.

De modo deſcribendi ellipſes in plano, circa datas quaſcunque diametros conjugatas.

OStenſis quo pacto ellipſis in plano deſcribi poſſit circa extremas diametros, congruum videtur & hîc ex præcedentibus



ſimiliter oſtendere, quibus modis circa ipſa datas quaſcunque diametros conjugatas in plano deſignetur.

Sint itaque datæ diametri conjugatæ L I, K E, bifariam ſeſe & decuſſa-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

cuſſatim in centro A ſecantes. Oportet circa ipſas in eodem plano ellipſis circumferentiam deſcribere.

Demiſsâ ex E ſupra L I perpendiculari E D, ponatur E C æqualis L A ſeu A I, ita ut C D æquetur vel aggregato vel differentiæ ipſarum E D, A I, ducaturque recta A C. Divisâ autem A C bifariam in B, agantur BE, BD; fiatque regula AB ex orichalco aliavè materia dura, ſibi annexum habens in puncto B triangulum B E D ex lamina orichalcea aliavè ſolida materia paratum, ita tamen ut illud ipſum circa B in plano circumvolvi queat.

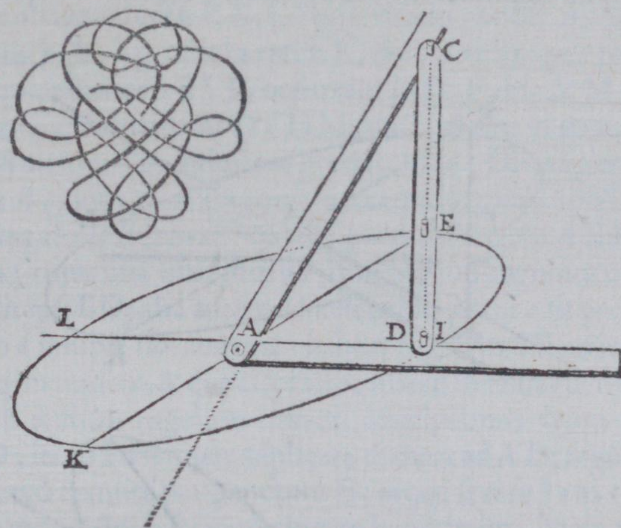
Regula porrò A B perforetur extremitate ſuâ in A, ſic ut paxillo in puncto A defixo injici poſſit ac circa id ipſum rotari: quemadmodum etiam agendum eſt circa puncta E & D laminæ, ut nempe in ipſis ſtyli inſeri queant: debet enim in D ſtylus acuminatus inſeri, qui cuſpide latus per rectam A D, ſecum ducat regulam A B, triangulumque BED; in E autem is, qui deſcribat circumferentiam ellipſis. Quare ſciendum eſt, ut ritè omnia ſuccedant, relinquendum eſſe ſpatiolum aliquod circùm dicta puncta E, D, veluti centra, ut commodè in ipſis inſeri valeant. Poſtquam hæc igitur ita paraverimus, ſtylum D dextrâ duco per rectam A D, tenens interea regulam immotam ſiniſtrâ ipſi A D adjunctam. Atque dum ſic fertur punctum D per rectam A D (quam ab utraque parte puncti A indefinitè protenſam intelligo), ac regula A B rotatur circa punctum A: deſcribet ſtylus E in plano circumferentiam ellipſis quæſitæ. Quod manifeſtum eſt ex iis, quæ capite tertio oſtenſa à nobis ſunt.

Idem aliter.

Iiſdem quæ ſupra poſitis, demiſſaque ex E ſupra L I perpendiculari ED, ipſa ſurſum producatur ad C, donec C D æqualis ſit compoſitæ ex E D, A I, jungaturque A C. Fiat autem jam regula C D, ejus quidem longitudinis, ut in ipſa notari poſſint tria puncta C, E, & D, ſic ſe habentia, ut diſtantia puncti C ad punctum E æquetur ſemidiametro L A ſeu A I; diſtantia verò punctorum E, D ab invicem perpendiculari deductæ ED. Quo facto, perforetur hæc regula in punctis C, E, & D, ut ſtyli inſeri queant; adhibitâque ipſi angulo C A I leſbiâ regulâ (quod apud lignarios frequens eſt inſtrumentum in capiendis angulis), moveatur regula C D inter ejuſdem crura, ita ut ſtyli in punctis C & D inſerti internè contingant perpetuò illa crura.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

crura. Fiet enim, ut hoc inceſſu ſtylus E uno ductu circumferentiæ ellipſis quartam partem deſignet. Eodem modo, ſi Leſbiam regulam C A D ipſi angulo L A C adplicemus, atque regulam inter ejus duo crura internè moveamus, perficietur ſemi-circumferentia ellip-



ſis. Quod idem ſi fiat ad reliquam partem diametri L I, deſcripta erit tota circumferentia ellipſis quæſitæ.

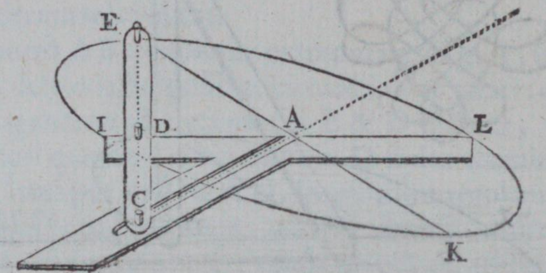
Adhuc Aliter.

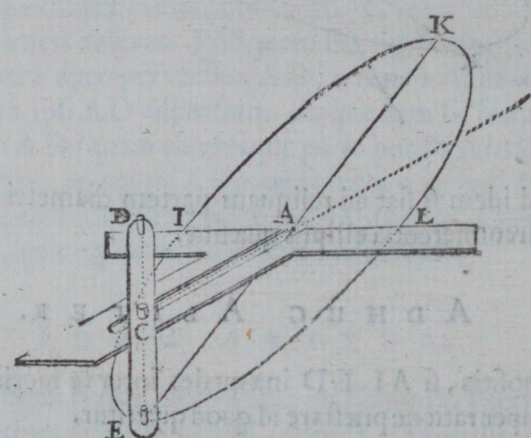
Iſdem poſitis, ſi A I, E D inæquales inter ſe fuerint, poterimus aliâ inſuper ratione præſtare id quod quæritur.

Poſitâ enim E G æquali A I, ut differentia ſit C D, agatur recta per puncta C, A. Tum verò aſſumptâ rurſus regulâ E D C, in qua notata ſint tria puncta E, C, & D; ita quidem, ut diſtantia punctorum E, D ab invicem æqualis ſit perpendiculari demiſſæ E D; diſtantia autem punctorum E, C æqualis ſemidiametro A I ſeu A L, ita ut CD ſit ipſarum AI, ED differentia: adhibeatur præterea ſcipio ICL, qui in longitudinem C A pertuſus ſit fiſſurâ C A, quæ quidem cum I L angulos faciat obliquos, æquales angulis IAC, CAL. Hoc

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

igitur adplicato ipſis rectis I L & C A, perforetur regula ECD in dictis punctis, ut ſtyli inſeri queant; ita quidem ut is, qui in C eſt inſerendus, paris ſit craſſitiei atq; eſt latitudo fiſſuræ CA: ut dum regula ECD ſtylo D contra latus ſcipionis I L fertur, interea dum ſtylus C liberè currit per fiſſuram, ipſa regula CED non vacillet, ac ſtylum E exactè ellipſis circumferentiam deſcribere efficiat. Atque hâc qui-





dem ratione ſemiſſis circumferentiæ deſignabitur: quocirca ut integra deſcribatur, convertendus erit modò ſcipio in reliquam partem ipſius L I, atque adplicandus, ut dictum eſt. Cujus quidem rei demonſtrationem non adduco, cum illa ex ſuperioribus perſpicua ſit, atque à quolibet facilè inveniri poſſit.

C A-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Caput VI.

De hyperbolis, quæ ex motu implicato in plano, tam circa extremas, quàm alias quaſcunque diametros conjugatas, deſcribuntur.

SEcent invicem rectæ E K, L I bifariam in puncto A, agantur verò per puncta L, I parallelæ ipſi E K, donec rectis per puncta E, K ductis æquidiſtanter ipſi L I, occurrant in D, F, H, & M, parallelogrammumque conſtituant D F H M; ducti autem in eodem diagonii D H, F M utrinque in infinitum producantur. Diviſâ porrò A D bifariam in B, jungatur B E: conſtruaturque angulus rectilineus *d b* ε, æqualis angulo D B E in $1^{\text{mâ}}$ & $2^{\text{dâ}}$ figura, aut angulo A B E in $3^{\text{tiâ}}$ aut $4^{\text{tâ}}$ figura; cujus una linearum *b d* (quæ dictum angulum conſtituunt) æqualis ſit ipſi BD; alia autem *b* ε indefinitè verſus ε ſit producta, quæ in puncto *d* inſuper ſibi annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoq; extenſam, & quę circa illud liberè in plano converti queat.

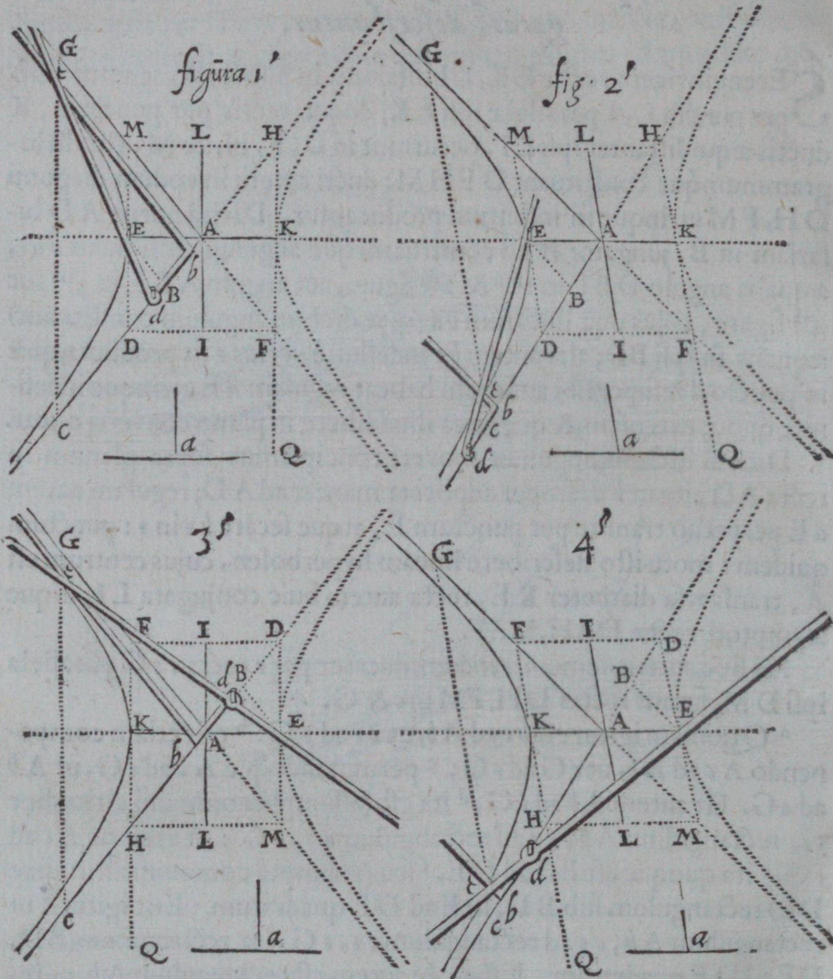
Dico ſi dictum angulum moveri concipiamus ſupra planum in recta AD, ita ut *b d* ſemper adplicata maneat ad A D; regulam autem *d* E perpetuò tranſire per punctum E, atque ſecare *b* ε in ε: punctum quidem ε motu iſto deſcribere lineam hyperbolen, cujus centrum eſt A, tranſverſa diameter K E, recta autem huic conjugata L I, atque aſymptoti rectæ DAH, MAF.

Ad hoc autem demonſtrandum, ducatur per ε recta *c* ε G parallela ipſi D M, ſecans rectas D H, FM in *c* & G.

[a] Quoniam igitur eſt *b c* ad A *b*, ut *c* ε ad ε G: [b] erit etiam componendo A *c* ad A *b*, ut *c* G ad ε G; [c] permutandoque A *c* ad *c* G, ut A *b* ad ε G. Ut autem A *b* ad ε G, [d] ita eſt (aſſumptâ communi altitudine *c* ε) rectangulum A *b*, *c* ε ad rectangulum *c* ε, ε G: at verò ut A *c* ad *c* G, [e] ita quoque eſt BD ad D E, [f] ſeu (aſſumptâ communi altitudine DE) rectangulum ſub B D, D E ad D E quadratum. Erit igitur [g] ut rectangulum A *b*, *c* ε ad rectangulum *c* ε, ε G, ita rectangulum, B D, DE ad D E quadratum. [h] Æquale autem eſt rectangulum A *b*, *c* ε rectangulo BD, DE: [i] eſt enim B *d*, hoc eſt, A *b*, ad *b d*, hoc eſt, DB, ut DE ad *c* ε. [k] Unde & rectangulum *c* ε, ε G quadrato DE æquale erit. Liquet itaque [l] punctum ε eſſe in hyperbola, cujus aſymptoti ſint rectæ D A H, M A F, diameter tranſverſa EK, recta autem huic conjugata LI, & centrum A. Quia verò hoc in infinitum contingit circa

a ꝑ 2 Sexti Elem.
b ꝑ 18 Quinti Elem.
c ꝑ 16 Quinti Elem.
d ꝑ 1 Sexti Elem.
e ꝑ 4 Sexti Elem.
f ꝑ 1 Sexti Elem.
g ꝑ 11 Quinti Elem.
h ꝑ 16 Sexti Elem.
i ꝑ 4 Sexti Elem.
k ꝑ 14 Quinti Elem.
l ꝑ converſâ 10 Secundi Conic. Apollonii.

punctũ ε, ſecundùm ea quæ propoſuimus : ſequitur interſectione continuâ rectarum *b* ε, ε *d* punctum ε motu iſto in plano lineam hyperbolen deſcribere, circa diametros EK, LI. Quod oſtendendum erat.



Manifeſtum præterea eſt, ſi transferamus regulam *d* E ipſamque tranſire concipiamus per punctum K, poſtquam converſus ſit angulus *d b* ε in alteram partem rectæ AD, aliam ſimilem lineam hyperbolen in plano, huic oppoſitam, eâdem viâ deſcribi.

SCHO-

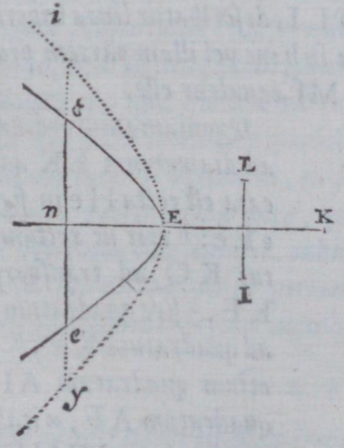
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SCHOLIVM.

Sicuti ſub genere ellipſium circulus quoque comprehendi ſolet, atque pro certa ejus ſpecie aſſumi; quippe in quo latus tranſverſum æquale eſt lateri recto: ita quoque in genere hyperbolarum fieri poteſt, ut certa ibi ſpecies determinetur, omnium ſimpliciſſima, ad quam cæteræ omnes ſint referendæ, hoc eſt, in qua latus tranſverſum & rectum inter ſe æquentur.

Quemadmodum igitur in Scholio Capitis ſecundi uſu venit, ut ibidem conſideraremus, quam relationem ellipſis habet cum circulo, quod ſpectat ad eorum ſuperficiem: ita quoque hîc facturi ſumus; comparando videlicet figuram contentam ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuſcunque cum alia figura, contenta ſimiliter ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ; cujus nempe latus rectum & tranſverſum inter ſe æqualia ſunt: quia illud à nemine hactenus (quod ſciam) animadverſum fuit.

Sit itaque ε E e *figura contenta ſub recta linea* ε e *& portione lineæ hyperbolæ cujuſcunque, cujus quidem axis tranſverſus ſit* EK, *rectus autem* LI. *Sit item alia figura* i E y *contenta ſub recta linea* i y *& portione lineæ hyperbolæ* i E y, *cujus rectum latus & tranſverſum inter ſe æqualia exiſtant, ac utrumque æquale lateri tranſverſo* EK *figuræ* ε E e.



Dico, ſimiliter fieri ut in ellipſi, figuram ε E e *ad figuram* i E y *eam habere rationem, quam habet axis rectus* LI *ad axem tranſverſum* EK.

Quoniam enim ad axem EK *ordinatim adplicantur rectæ* n ε, n i; [a] *erit in figura* ε E e, *ut rectum latus ad tranſverſum, ita quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E. *Quia autem ſecundus axis* LI *mediam proportionem habet inter latera figuræ* ε E e: [b] *erit, rectum latus ad tranſverſum, ut quadratum* LI *ad quadratũ* EK. [c] *Quamobrem erit, ut quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E, *ita quadratum* LI *ad quadratum* EK. [d] *At verò cum latera figuræ* i E y *inter ſe æqualia exiſtant, & utrumque eorum æquale lateri tranſverſo* EK *figuræ* ε E e: *ſequitur quadratum* n i *rectangulo* K n E *æquale eſſe. Ac idcirco eſſe quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E *ſeu* [e] *ad quadratum* n i, *ut quadratum* LI *ad quadratum* EK. [f] *ac proinde quoque*

a p 21 Primi Conicorum Apollonii.
b p Corol. 20 Sexti Elem.
c p 11 Quinti Elem.
d Ex hypotheſi.
e p 7 Quinti Elem.
f p 22 Sexti Elem.

n ε *ad* n i, *ut* L I *ad* E K. *Quoniam autem hoc in infinitum apparet de omnibus aliis rectis* n ε, n i, *ordinatim adplicatis ad axem* E K *in utraque figura:* g *relinquitur figuram* ε E e *ad figuram* i E y *eſſe, ut axis rectus* L I *ad axem tranſverſum* E K. *Quod erat propoſitum.*

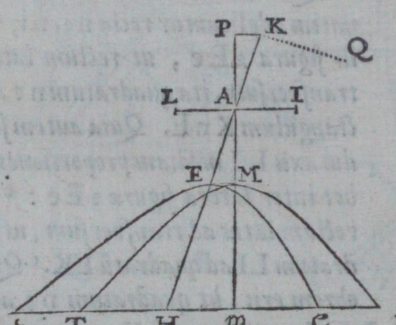
g *Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.*

Porrò hæc non tantùm locum habent juxta ſolam conſiderationem axium, ſicuti ea hîc fuerunt propoſita; verùm etiam ſecundùm quaſcunque diametros, quemadmodum ex demonſtratione colligi poteſt. Veruntamen quia in his eundem ferè ordinem quem in ellipſibus placuit nobis ſervare; ibidem autem oſtenderimus cui figuræ rectæ, ſub recta linea & portione circumferentiæ ellipſis comprehenſæ, æquaretur figura quævis ſcalena, itidem ſub recta linea & portione circumferentiæ ellipſis comprehenſa: ideo & hîc rectè facturos nos exiſtimavimus, ſi ſimiliter oſtendamus cui figuræ rectæ, quæ comprehenditur ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, æqualis ſit quælibet figura ſcalena, pariter ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ comprehenſa.

Sit ergo figura ε E e *ſcalena, contenta ſub recta* ε e *& portione lineæ hyperbolæ* ε E e, *cujus latus tranſverſum ſit* L I, *rectum autem* K Q; *ſive cujus tranſverſa diameter ſit* E K, *recta autem huic conjugata* L I.

Si itaque ex punctis E, K *alternatim ducantur rectæ* E M, K P *diametro* L I *parallelæ; ac deinde per centrum* A *recta* P A M *perpendicularis ad* ε e, *ſecans* E M, K P *in* M *&* P, *rectam autem* ε e *in* m; * *atque denuo circa* P M *quidem ut tranſverſum axem, rectum verò* L I, *deſcribatur linea hyperbole* T M f, *quæ ſecetur à recta* ε e, *vel ab ipſa in hanc vel illam partem producta in* T *&* f: *dico figuram* ε E e *figuræ* T M f *æqualem eſſe.*

* ꝑ 7 *Caput hujus.*



Quoniam enim ordinatim ad diametrum E K *adplicata eſt recta* H e *in figura* ε E e: h *erit ut rectum latus* K Q *ad tranſverſum* K E, i *ſive quadratum* L I *ad quadratum* K E, k *ſive etiam quadratum* A I *ad quadratum* A E, *α ita* H e *quadratum ad* K H E *rectangulum.*

Quoniam item l *parallelæ ſunt* K P, M E *&* m H: m *erit* A E *ad* E H, *ut* A M *ad* M m. *Et ſumptis antecedentium duplis, ut* K E *ad* H E, *ita* P M *ad* M m; n *componendoque* K H *ad* H E, *ut* P m *ad* m M. o *Ut autem* K H *ad* H E, *ita eſt rectan-*

h ꝑ 21 *Primi Conicorum Apollonii.*
i ꝑ *Corol.* 20 *Sexti Elem.*
k ꝑ 15 *Quinti Elem.*
l *Ex conſtructione.*
m ꝑ 2 *Sexti Elem.*
n ꝑ 18 *Quinti Elem.*
o ꝑ 1 *Sexti Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ctangulum KHE ad HE quadratum; & ut P m ad m M, ita eſt P m M rectangulum ad m M quadratum. [p] Erit igitur ut rectangulum KHE ad quadratum HE, ita rectangulum P m M ad m M quadratum; [q] & permutando rectangulum KHE ad rectangulum P m M, ut quadratum HE ad quadratum m M, ſive ut quadratum AE ad quadratum AM. Cum autem oſtenſum ſit, α quadratum H e ad rectangulum KHE eſſe, ut quadratum AI ad quadratum AE: [r] erit quoque ex æquo, ut quadratum H e ad rectangulum P m M, ita quadratum AI ad quadratum AM. Quia verò in figura TMf ſimiliter, ut ſupra, quadratum m f ad rectangulum P m M eſt, ut quadratum AI ad quadratum AM: [s] erit quoque quadratum H e ad rectangulum P m M, ut m f quadratum ad rectangulum P m M. E quibus ſequitur [t] quadratum H e quadrato m f, æquale eſſe. Æquales igitur quoque erunt rectæ H e, m f. unde & earum duplæ ε e, T f. Eadem eſt demonſtratio de omnibus aliis rectis H e, m f, ordinatim adplicatis in infinitum ad diametros KE, PM in utraque figura. [u] Quare conſtat figuram ſcalenam ε E e figuræ rectæ TMf æqualem eſſe. Quod erat propoſitum.

p p 11 Quinti Elem.

q p 16 Quinti Elem.

r p 22 Quinti Elem.

s p 11 Quinti Elem.

t p 9 Quinti Elem.

u Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Ex his quæ jam oſtenſa ſunt liquet, figuræ cuilibet datæ, quæ continetur ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, exhiberi poſſe aliam figuram eidem æqualem, contentam ſimiliter ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus tranſverſum & rectum inter ſe æqualia exiſtunt. Si enim ejuſmodi figura fuerit ſcalena, ut ε E e, oſtendimus hîc aliam TMf ipſi æqualem, quæ quidem eſt recta. porrò quam rationem hæc habeat ad figurã, ſub recta linea & hyperbola comprehenſam, cujus latus tranſverſum & rectum inter ſe æquantur, ex ſuperioribus quoque conſtat. Manifeſtum igitur eſt, cuivis figuræ datæ, quæ continetur ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuſcunque, exhiberi poſſe aliam ipſi æqualem, contentam ſimiliter ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus tranſverſum & rectum inter ſe ſunt æqualia.

CAPUT VII.

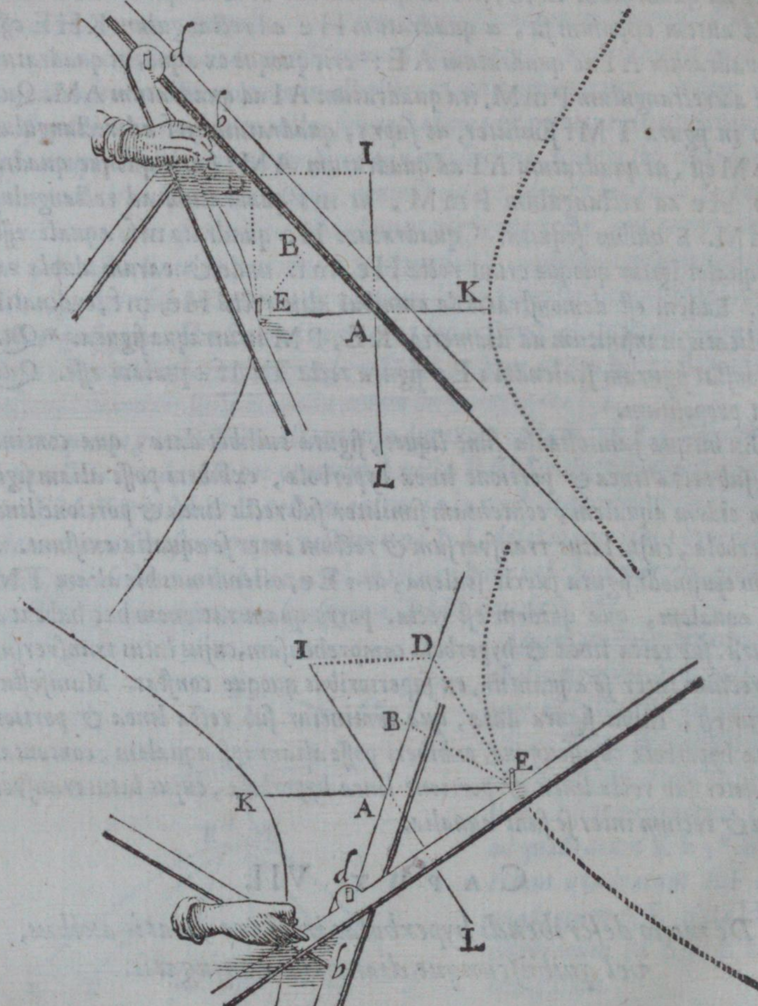
De modo deſcribendi hyperbolas in plano, datis axibus, vel quibuſcunque diametris conjugatis.

SIquidem præcedenti capite expoſuimus, quo pacto intelligendum ſit motu implicato in plano aliquo hyperbolas deſcribi: reliquum eſt ut oſtendamus, quomodo ipſæ in plano, datis axibus, vel quibuſcunque diametris conjugatis, deſcribantur.

Den-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Dentur itaque in plano quocunque, E K axis tranſverſus ſive diameter tranſverſa, I L autem rectus axis ſeu recta diameter priori E K conjugata, bifariam ſeſe in centro A ſecantes.



Oportet in eodem plano lineam hyperbolen deſcribere, cujus axes, diametrivè conjugatæ ſint, quos diximus.

Ductã

Ductâ igitur ex puncto I rectâ I D parallelâ ipſi K E, ſecante ductam ex E parallelam ipſi L I in D, agatur recta A D, eaque utrinque indefinitè protendatur. Porrò ſectâ A D biſariam in B, connectatur recta B E. Fiatque ex orichalco, ligno, aliâve materiâ ſolidâ norma, anguluſve obliquus rectilineus *d b ε*, æqualis angulo D B E aut ABE; cujus unum quidem crus *b d* æquetur ipſi BD; alterum autem *b ε* indefinitè verſus ε ſit extenſum, qui puncto *d* ſibi præterea annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoque extenſam, & quæ circumcircà illud liberè circumvolvi queat. His ita conſtructis, ſi feratur angulus *d b ε* per rectam A D, ita ut crus ejus *b d* applicatum perpetuò teneatur contra regulam, ipſi AD adjunctam; interea dum regula *d* E rotatur circa *d*, quam aſſiduè per punctum E tranſire cogimus: deſcribent crus *b ε* regulaque *d* E, continuâ illâ interſectione ε, in plano lineam curvam, hyperbolen dictam; cujus quidem axis, diameterve tranſverſa ſit K E; recta verò huic conjugata L I. Notandum autem occurrit, ſi aptè & accuratè omnia exſequi velimus; perforandam quidem eſſe regulam *d* E in *d*, ita ut punctum *d* margini ejuſdem exactè reſpondeat, ac ipſa paxillo, circa quem rotari poſſit, in extremitate *d* cruris *b d* dicti anguli *d b ε* extructo, injici queat. Similiter in E ſupra planum figendum eſſe paxillum, cui regula *d* E (quam tranſire ſemper oportet per E) ſuâ margine, in qua punctum *d* ſitum eſt, incumbat. Denique ſtylo acuminato uti erit neceſſe ad deſignandam puncti ε interſectionem.

Atque ut quidem ratione adductâ, datis axibus, diametriſve conjugatis, lineam hyperbolen deſcribi conſtat: ita ſimiliter, ſi transferamus regulam *d* E ac ipſam tranſire faciamus per punctum K, poſtquam converſus fuerit angulus *d b ε* in alteram partem rectæ AD, alia quoque ſimilis linea hyperbole huic oppoſita, eoſdem axes, diametroſve habens, deſignabitur.

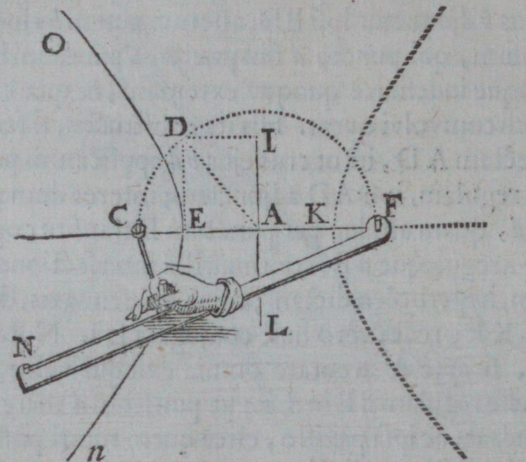
IDEM ALITER, DATIS AXIBUS.

QUia alius porrò modus occurrit, deſcribendi hyperbolas in plano, datis axibus, beneficio alicujus reſtis vel fili, qui originem ducit ex 5^tâ^ prop^ne^ libri 3^tii^ Conicorum Apollonii: placuit paucis eum hîc exponere. Is autem ſic ſe habet.

Proponatur itaque rurſus linea hyperbole deſcribenda, cujus axis tranſverſus ſit E K, rectus autem ipſi conjugatus IL, qui ſeſe biſariam & ad angulos rectos ſecent in A.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ductâ, ut ante, ex I rectâ I D æquidiſtante ipſi K E, donec ſecetur à recta ex E ductâ parallelâ cum L I in D, agatur recta AD; centroque A intervallo AD ſemicirculus deſcribatur CDF, ſecans hinc inde EK productam in C & F. Porrò defixis in punctis C & F duobus paxillis, annexoque extremitati N longæ regulæ NF extremo alicujus fili N ε C, ipsâ NF paulò breviori, perforetur altera ejus extremitas, ac ita paxillo F injiciatur; filum verò N ε C altero extremo paxillo C nectatur. His ita peractis, ſi immiſſo ſtylo ducatur filum N ε C juxta regulã NF, initio facto in *n* extremo fili, ſtyluſque deducatur ad E, ita ut pars fili N ε ſemper veluti agglutinata teneatur regulæ: deſcribet is in plano lineam curvam *n* ε E, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quocirca ſi velimus, ut hoc ipſo modo hyperbole in plano deſignetur, cujus quidem axis tranſverſus ſit E K, rectus autem L I, ut propoſitum eſt: curandum erit, ut longitudo regulæ NF longitudinem fili N ε C exactè ſuperet quantitate axis: ſive etiam, ut dum ſtylus ita deducitur, qui curvam lineam deſignat, ipſe accuratè pertingat ad punctum E. Cæterùm ſi transferatur regula ad partem reliquam rectæ CF versùs O, eodem modo alia portio O E deſignabitur. Quòd ſi autem regula ex F ad C, & filum ex C ad F transferantur, alia præterea ſimilis linea hyperbole, huic oppoſita eorundemque axium, deſcribetur.



Tandem ſciendum eſt, punctis C & F, deſcriptioni hyperboles inſervientibus, focorum nomen ab autoribus impoſitum fuiſſe, ſive etiam ipſa puncta urentia dici, ab effectu quem habent ſpecula & vitra ad hanc figuram expolita. Vide ea quæ poſt caput ſeptimum tractat vir Nobiliſſimus & Clariſſimus Renatus Des-Cartes in ſua Dioptrica.

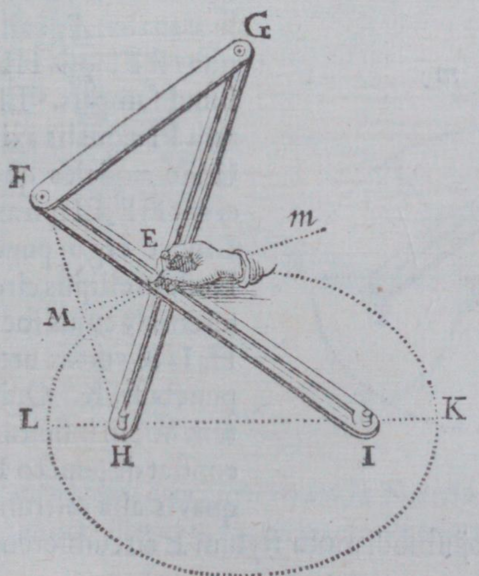
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Caput VIII.

De modo deſcribendi ellipſes in plano, datis focis, & utroque vertice.

INter modos ellipſeos deſcribendæ varios non minùs expeditus eſt is, qui procedit ex datis focis & utroque vertice: quamobrem rationi conſentaneum fore exiſtimavi, ſi poſt modos jam oſtenſos, quibus ellipſes in plano deſignantur, datis extremis vel etiam quibuſcunque diametris conjugatis, tradam quoque quo pacto ipſæ in plano, datis focis & utroque vertice, deſcribantur. Proceſſus autem talis eſt.

Dentur in plano aliquo foci H & I, vertex alter L, alter autem K, ita ut axis tranſverſus ſit LK: oportet in eodem plano ellipſis circumferentiam deſcribere, cujus foci & vertex uterque ſint, quos diximus.



Præparentur ex orichalco, ligno, aliàve ſolida materia regulæ tres HG, GF, & FI; quarum quidem HG & FI ſingulæ æquales ſint axi LK; ipſa autem FG æqualis diſtantiæ HI focorum ab invicem: regulæ verò HG, FI in longitudinem pertuſæ ſint fiſſurâ, quæ quidem ejus ſit latitudinis, cujus eſt craſſities ſtyli cylindrici inſerẽdi, quo circumferentia ellipſis ſit deſignanda. Cæterùm, perforentur quoque regulæ HG, FI in extremitatibus ſuis H, I, ita ut paxillis in H & I defixis injici queant; earundem verò extremitates G, F extremitatibus regulæ FG annectantur, eamque poſitionem habeant, quam in appoſita figura vi-

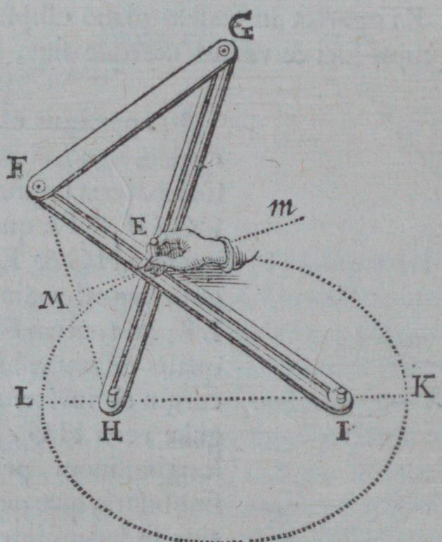
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

dere licet. His ita fabricatis, ſi ſtylus in utramque fiſſuram immiſſus, (hoc eſt, in E, communem interſectionem regularum HG, IF) circumferatur, ſecum ducens regulas HG, IF rotantes circa puncta H, I, deſcribet is prout ab L versùs K defertur ſemi-circumferentiam LEK ellipſeos quæſitæ. Quo quidem modo & alter ſemiſſis perficietur.

Quòd autem hâc ratione ſtylus circumductus E circumferentiam ellipſis deſcribat, cujus foci ſint H, I, & vertex uterque LK: ita liquet.

Jungatur recta FH. Quoniam itaque triangula FGH, FIH duo latera FG, GH duobus lateribus HI, IF utrumque utrique æqualia habent, baſin verò FH communem: [a] habebunt quoque angulum FHG angulo HFI ſub æqualibus rectis lineis contentum æqualem.

a p 8 Primi Elem.



Cum igitur trianguli FEH anguli ad H & F æquales inter ſe exiſtant, [b] erunt & ſubtenſa latera FE, EH inter ſe æqualia. Æqualis itaque eſt FI ipſis HE, EI ſimul ſumptis. [c] Eſt autem FI æqualis axi LK. Unde æquales quoque erunt HE, EI ipſi axi LK. Liquet ergo punctum E eſſe in ellipſis circumferentia, cujus foci ſint H, I, & vertex uterque puncta L, K. Quia autem hoc in infinitum ita conſtat de puncto E, in quavis alia inſtrumenti conſtitutione: [d] ſequitur ejuſmodi motu ſtylum E circumferentiam ellipſis quæſitæ deſcribere.

b p 6 Primi Elem.

c Ex conſtructione.

d p Converſâ 52 Tertii Conicorum Apollonii.

Sequitur præterea, ſi bifariam ſecetur recta HF in M, & recta connectatur ME, ipſam contingere ellipſin in puncto E.

Æqualia enim ſunt latera ME, FE trianguli MEF lateribus MH, HE trianguli MEH; & baſis ME utrique triangulo eſt communis: [e] quamobrem & anguli MEF, MEH inter ſe æquales erunt. [f] Eſt autem

e p 8 Primi Elem.

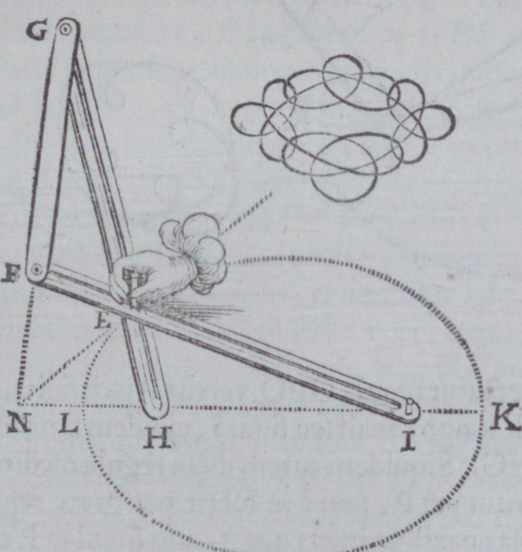
f p 15 Primi Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tem angulus MEF angulo *m* EI æqualis, quòd ſint ſecundùm verticem. Æqualis igitur quoque erit angulus MEH angulo *m* EI, atque adeò recta ME*m* ellipſin contingens in E, per converſam 48 Prop. libri 3^{tii} Conicorum Apollonii. Quod erat propoſitum.

SCHOLIVM.

Colligitur ex methodo allatâ ratio facillima ducendi rectam, quæ ellipſin in quovis dato puncto circumferentiæ contingat. Sit enim, exempli gratiâ, in puncto E *ducenda recta ellipſin contingens. Agatur ex alterutro foco* H *vel* I, *puta* I, *per* E *recta* IEF *æqualis axi* LK, *conjunganturque focus alter* H *& extremitas hujus rectæ* F, *rectâ* HF: *ſi namque bifariam ſectâ hâc rectâ in* M, *puncta* M, E, *rectâ lineâ connectantur, continget hæc ellipſin in* E.



Vel etiam in hunc modum.

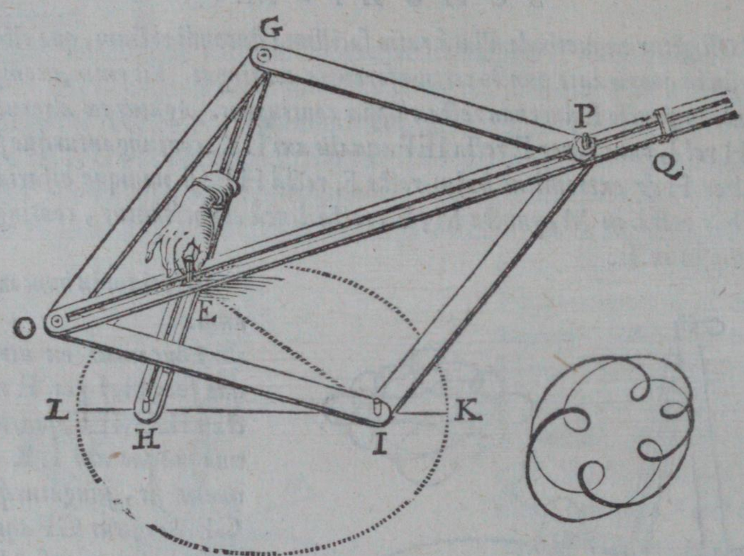
Educantur ex utroque foco H, I *per* E *rectæ* HEG, IEF, *quarum unaquæque axi* LK *æqualis ſit, jungaturque* GF. *Si igitur* GF *æquidiſtans fuerit ipſi* HI, *quod quidem accidet cùm punctum* E *extremitatem referet minoris axis: recta, quæ per* E *ipſi* HI *ducitur parallela, ellipſin in* E *continget. Si verò* FG, HI *non fuerint parallelæ, producantur ambæ donec concurrant in* N, *recta enim quæ ab* N *ad* E *perducitur, ſimiliter ellipſin in* E *continget. Vt erat propoſitum,*

IDEM ALITER.

Iſdem quæ ſupra poſitis, aſſumantur præter regulam HG aliæ quatuor regulæ æquales GP, PI, IO, & OG longitudinis cujuſlibet, modò tamen ea minor non ſit quàm LI ſeu HK; ipſæque extremitatibus ſibi invicem nectantur, ita ut rhombum, quadratumvè GPIO re-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

repræſentent. Ubi autem ipſæ in G connexæ ſunt, connectantur & ſimul cum extremitate G regulæ HG: ubi verò in I ſibi invicem ſunt annectendæ, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in I defixo injici queant, hâcque ratione connexæ habeantur; porrò ubi in O connexæ



ſũt, ipſis alia inſuper annectatur regula OPQ versùs P indefinita, quæ in longitudinẽ pertuſa ſit longo canali ſeu fiſſurâ, ejuſdem latitudinis cujus eſt fiſſura regulæ HG. Siquidem autem dicta regula medio ſuo tranſire perpetuò requiritur per P, non è re fuerit perforare regulas GP, IP in P, ita ut in ipſas paxillus inſeri queat, quo ſimul in P connexæ teneantur, paris quidem craſſitiei atque latitudo fiſſurarum, conſtans ſubtus ex lamella, ſuperiùs verò in cochleam extructus; ita ut, poſtquam regulæ GP, IP, & OP eidem injectæ fuerint, atque his alia lamella foramine pertuſa ſuperimponatur, dictæ regulæ cochleâ inter lamellas contineantur. Denique annulo quadrangulo regulam OP circundare oportebit extra P, qui arctè eam circumplectens ulteriùs quoque ſi opùs ſit amoveri poſſit, nec ſinat ut fiſſura in aliam evadat latitudinem. His ita conſtructis, ut ad deſcriptionem ellipſeos accedamus, ſumatur ſtylus aliquis cylindricus, ejus quidem craſſi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

craſſitiei cujus eſt latitudo utriuſque fiſſuræ, iſque in fiſſuram utramque immittatur, utpote in E quò ſecant invicem regulæ H G, O P, deferaturque ab L versùs K, prout à jam dictis regulis tenetur: quo opere deſignabitur quidem in plano ſemiſſis circumferentiæ ellipſis quæſitæ. Similiter autem alter ſemiſſis abſolvetur. Ratio hujus negotii perfacilis eſt. Ducatur enim recta I E.

Cum igitur triangulorum GPO, OPI duo latera OG, GP duobus lateribus OI, IP utrumque utrique æqualia ſint, baſis verò OP utriq; triangulo communis: [a] erunt quoque α anguli GPO, OPI, ſub æqualibus rectis lineis contenti, æquales. Porrò cum duo triangula GPE, EPI duo latera G P, P E duobus lateribus I P, P E utrumque utrique æqualia habeant, eſt namque E P utrique communis; habeant verò & angulum G P E angulo E P I ſub æqualibus rectis lineis contentum æqualem (α ut jam eſt oſtenſum): [b] habebunt quoque baſin GE baſi E I æqualem, β angulumque G E P angulo P E I, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Æqualis itaque eſt H G ipſis H E, E I ſimul ſumptis; eſt autem H G ex conſtructione æqualis axi L K: æquales ergo quoque erunt H E, E I ipſi axi L K, atque adeò punctum E in ellipſis circumferentiã cadet, cujus foci H, I, & axis major eſt LK, per converſam 52dam Prop. libri 3tii Conicorum Apollonii. Quia verò hoc ſimiliter conſtat de omni puncto E in qua libet alia inſtrumenti conſtitutione, relinquitur hâc viâ ſtylum E circumferentiam quæſitæ ellipſeos deſcribere. Quod præſtare opus erat.

a p 8 Primi Elem.

b p 4 Primi Elem.

Habet autem hæc methodus hoc ſibi peculiare, ut inter deſcribendum regula O P aſſiduè deſignet quoque lineam, quæ ellipſin in quovis circumferentiæ puncto E contingat. Quod quidem ſic liquet.

Quoniam enim anguli G E P, P E I æquales ſunt, (ut modò oſtendimus,) [c] angulus verò G E P angulo O E H æqualis, cum ſint ad verticem: erit etiam angulus P E I angulo O E H æqualis, atque ita recta O P ellipſin L E K contingens in E, per converſam 48vam Propnem libri 3tii Conicorum Apollonii. Ut proponebatur.

c p 15 Primi Elem.

ALITER, VULGARI MODO.

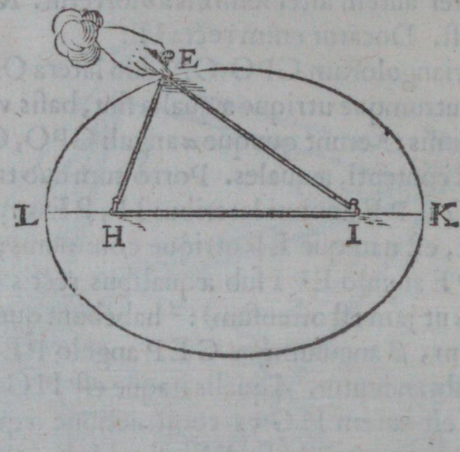
Iſdem poſitis, oſtendendum eſt ut propoſitum vulgari modo perficiatur.

Defixis itaque paxillis in H & I, filum capiatur quod duplicatum

nexis

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

nexis extremitatibus longitudinem L I vel H K adæquet, illudq́ue paxillis circumponatur: fiet enim, ſi immiſſo ſtylo filum extendatur



in triangulum, æquali ſemper vi, atque ita ſtylus circa paxillos circumducatur, ut is circumferentiam L E K quæſitæ ellipſeos in plano deſcribat.

Caput IX.

De modo deſcribendi hyperbolas in plano, datis focis & vertice.

TAmetſi promptè variis modis hyperbolæ quoque in plano deſcribuntur, infimo tamen loco non habendus eſt is, quo ex datis focis & vertice ipſæ in plano delineantur. Similiter igitur ſicut in ellipſi factum fuit, ubi, poſtquam docueramus quibus modis, datis extremis vel etiam quibuſcunque diametris conjugatis, ipſæ in plano deſcriberentur, oſtendimus quâ viâ ex datis focis & utroque vertice decircinandæ eſſent: ordo poſtulat ut & idem circa hyperbolas inſtituamus, præſertim cum præſentes modi iis, quos circa eandem de ellipſi Propoſitionẽ dedimus, conſentiant. Ut ex ſequentibus patebit.

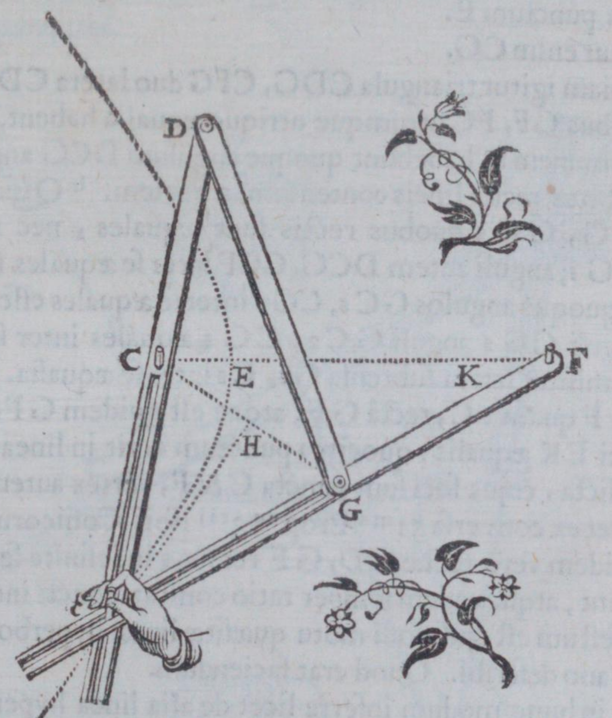
Dentur igitur in plano quocunque foci C, F, & vertex E. Oporteatq́ue in eodem plano lineam hyperbolen deſcribere, cujus C & F ſint foci, vertex autem E.

Ponatur KF æqualis C E, ita ut axis tranſverſus ſit E K; præparen-

tur-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

turque ex orichalco, ligno, aliavé dura materia regulæ tres CD, DG, & GF; quarum quidem CD, GF unaquæque axi EK; reliqua verò DG intervallo focorum æqualis ſit. Intelligi tamen volo, ut regulæ CD, GF ultra C & G indefinitè ſint extenſæ ac longæ, itemque per-



tuſæ fiſſurâ ejus latitudinis, quæ eſt craſſities ſtyli cylindrici inſerendi, quo hyperboles linea delineanda erit. Præterea perforari debent hæ regulæ in C & F, ut paxillis in C & F defixis injici queant, in D & G autem ipſæ connectendæ ſunt cum regula DG, quemadmodum per appoſitam figuram conſpicere licet. Quo facto, ſi immittatur ſtylus in utramque fiſſuram, nempe in ε punctum communis interſectionis regularum CD, GF, iſque deferatur ſecum ferens regulas CD, GF rotantes circa puncta C, F, prout ab E verſùs ε fertur: de-

ſcribet in plano lineam curvam E ε, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quod quidem ſimiliter ita ſe habet ad alteram partem rectæ CF. Si verò prædictæ regulæ CD, GF ad reliquam partem ultra D & F indefinitè quoque intelligantur extenſæ, non minùs alia linea hyperbole huic oppoſita, eoſdem focos, axemque habens, deſcribetur.

Demonſtrandum itaque eſt ratione oſtenſâ ſtylum ε lineam quæſitam hyperbolen deſcribere, hoc eſt, cujus foci ſunt puncta C, F, vertex autem punctum E.

Jungatur enim CG.

Quoniam igitur triangula CDG, CFG duo latera CD, DG duobus lateribus GF, FC utrumque utrique æqualia habent, baſin verò CG communem: [a] habebunt quoque angulum DCG angulo CGF, ſub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. [b] Quia autem anguli DCG, GCε duobus rectis ſunt æquales, nec non anguli CGF, CGε; anguli autem DCG, CGF inter ſe æquales ſint oſtenſi: ſequitur quoque angulos GCε, CGε inter ſe æquales eſſe. Cum igitur trianguli CGε anguli GCε, CGε æquales inter ſe exiſtant, [c] erunt ſimiliter latera ſubtenſa Gε, Cε inter ſe æqualia. Major itaque erit εF quàm εC, rectâ GF; atque eſt quidem GF ex constructione axi EK æqualis: quocirca punctum ε erit in linea curva, hyperbole dicta, cujus foci ſunt puncta C & F, vertex autem punctum E, ut liquet ex converſa 51ma $Prop^{ne}$ 3^{tii} libri Conicorum Apollonii. Siquidem verò rectæ CD, GF versùs ε indefinitè ſe mutuò ſecare poſſunt, atque eadem ſemper ratio conſtat puncti interſectionis ε: manifeſtum eſt ejuſmodi motu quæſitæ lineæ hyperboles portionem in plano deſcribi. Quod erat faciendum.

a p 8 Primi Elem.
b p 13 Primi Elem.
c p 6 Primi Elem.

Simile in hunc modum inferre licet de alia linea hyperbole, huic oppoſita, verticem habente in K.

Infertur præterea, ſi bifariam ſecetur recta CG in H, rectam connectentem puncta H, ε, hyperbolen in ε contingere.

Æqualia enim ſunt latera HC, Cε trianguli HCε, lateribus HG, Gε trianguli HGε, & baſis Hε utrique triangulo communis eſt: [d] quamobrem & anguli HεC, HεG ſub æqualibus rectis lineis contenti inter ſe æquales ſunt; adeoque recta Hε hyperbolen contingens in puncto ε, per converſam 48^{vam} $Prop^{nem}$ libri 3^{tii} Conicorum Apollonii. ut proponebatur.

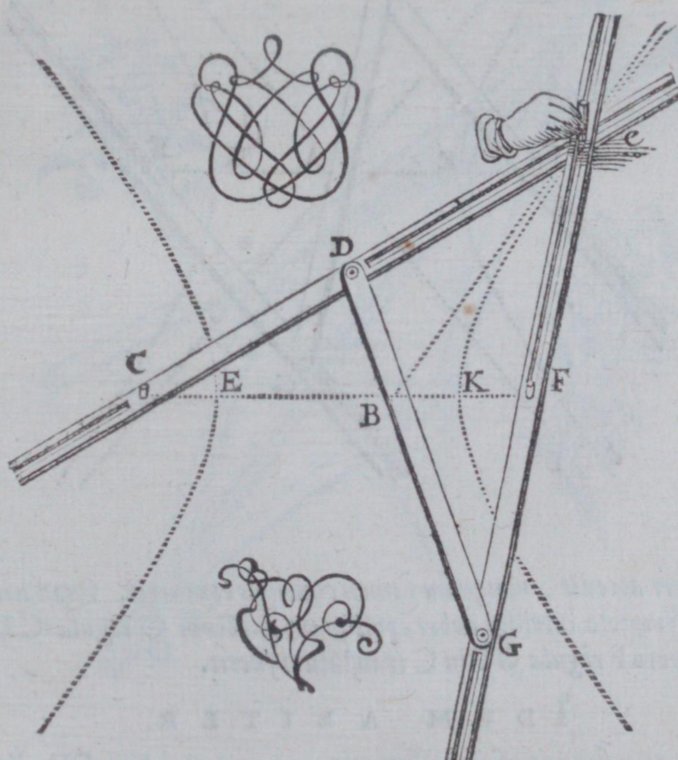
d p 8 Primi Elem.

SCHO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SCHOLIVM.

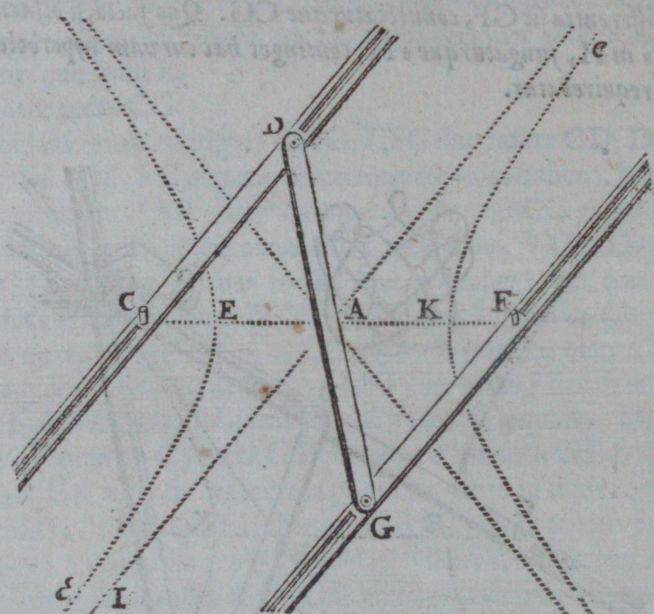
PErſpicuum eſt, ex adducta methodo facilè rectam lineam duci poſſe, quæ curvam hyperboles tangat in dato quolibet puncto. Si enim in e, *verbi gratiâ, ducenda ſit tangens curvam hyperboles* e E, *agantur ab* e *ad* C & F *rectæ* E C, E F; *auferaturque ex majori* e F *recta* e G *ipſi minori* e C *æqualis, ut differentia ſit* GF, *connectaturque* CG. *Quo facto, ſi biſariam ſecetur* CG *in* H, *jungaturque* e H, *continget hæc curvam hyperboles* e E *in* e, *ſicut requirebatur.*



Quod etiam in hunc modum fieri poteſt.

Agantur à puncto e *ad puncta* C, F *rectæ* e C, e F; *& ab* e C *quidem auferatur* C D *æqualis axi* E K; e F *verò tantundem producatur ad* G, *ut nimirum* GF *axi* EK *æqualis ſit, ducaturque* D G, *ſecans* C F *in* B: *ſimiliter enim ut ante, recta quæ à* B *ad* e *perducitur, hyperbolen in* e *continget.*

Notandem denique in hac methodo cùm regulæ CD, GF *ſunt parallelæ nec ullam interſectionem admittunt, qualem diximus: tum rectam* IA, *quæ per centrum* A *alteri ipſarum* CD, GF *æquidiſtans ducitur, eſſe alteram ex aſymptotis, ſeu quæ cum curvis dictarum hyperbolarum propiùs qui-*



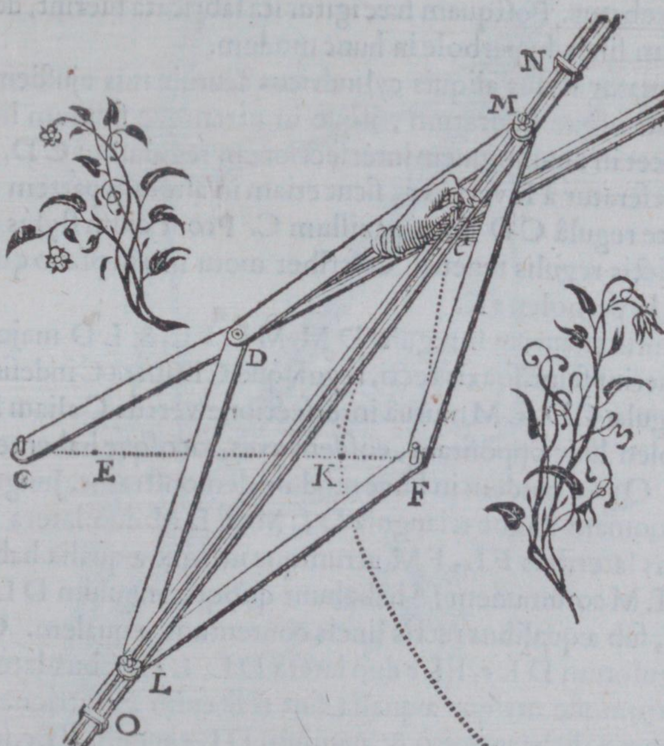
dem ſemper accedit, nunquam tamen cum ipſis concurrit. Quod itidem de altera aſymptoto intelligi debet, poſtquam punctum C *regulæ* CD *in* F; *punctum verò* F *regulæ* GF *in* C *tranſlatum fuerit.*

Idem aliter.

Iiſdem quæ ſupra poſitis, aſſumantur præter regulam CD aliæ quatuor æquales DM, MF, FL, & LD, longitudinis cujuſlibet majoris quàm KF, (requiritur autem cum hyperbola ex numero ſit earum linearum, quæ in infinitum augentur, nec unquam fines ſuos committat; ut illa minor non exiſtat quàm ſemiſſis axis recti: aliàs enim ſemper non niſi ejus portio quædam deſcribetur); ipſæque cum extremitatibus ſibi invicem nectantur in formam rhombi, quadrativè DMFL.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

DMFL. Ubi autem in D connexæ ſunt, annectantur & ſimul regulæ CD in puncto D; ubi verò in F ſibi invicem annectendæ ſunt, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in F defixo injici poſſint, atque hâc ratione ſimul nexæ habeantur. Porrò quandoquidem per L & M regulam aliquam medio ſuo aſſiduè tranſire oportet, utrinque indefinitè extenſam: gemina in eum finem ſumatur regula utrinque indefinitè extenſa, perforenturque prædictæ regulæ in extremitatibus ſuis



L, M, ita ut paxillis injici queant, ejuſdem craſſitiei ac fiſſuræ regulæ CD. Conducet autem hoſce paxillos ſubtus fieri ex lamella, ſuperiuſque in cochleam extructos eſſe; ut non ſolùm hâc ratione connexioni quatuor dictarum regularum inſerviant, verùm etiam ut ſi præter his impoſitam regulam geminam alia adhuc lamella foramine pertuſa illis ſuperimponatur, dictæ regulæ omnes inter lamellas cochleâ contineantur. Quæ quidem ex accurata figurarum contempla-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tione perſpicuiora evadunt, quàm ut multis verbis explicentur. Cæterùm oportebit annulis duobus quadrangulis O, N regulam L M circumdare, qui arctè eam amplectentes propiùs aut remotiùs, ut opus exiget, amoveri valeant: quibus regula gemina ita dictos paxillos continere cogatur, ut velut hiulcata ſit ac in longitudinem fiſſuram præ ſe ferat latitudinis paris atque regulæ C D. Fiet enim ſemper, ut, ſi per medium fiſſuræ hujus regulæ utrinque indefinitè extenſæ recta linea ducatur, ipſa perpetuò tranſeat per puncta L, M, ſicuti requirebatur. Poſtquam hæc igitur ita fabricata fuerint, deſignabitur quidem linea hyperbole in hunc modum.

Sumatur ſtylus aliquis cylindricus acuminatus ejuſdem craſſitiei, quæ utriuſque fiſſurarum, iſque in utramque fiſſuram immittatur, videlicet in *e* communem interſectionem regularum C D, L M; ipſeque deferatur à K versùs *e*, ſicut etiam in alteram partem rectæ C F, rotante regulâ C D circa paxillum C. Prout enim ſtylus ejuſmodi à jam dictis regulis tenetur, deſcribet motu illo in plano quæſitam lineam hyperbolen *e* K.

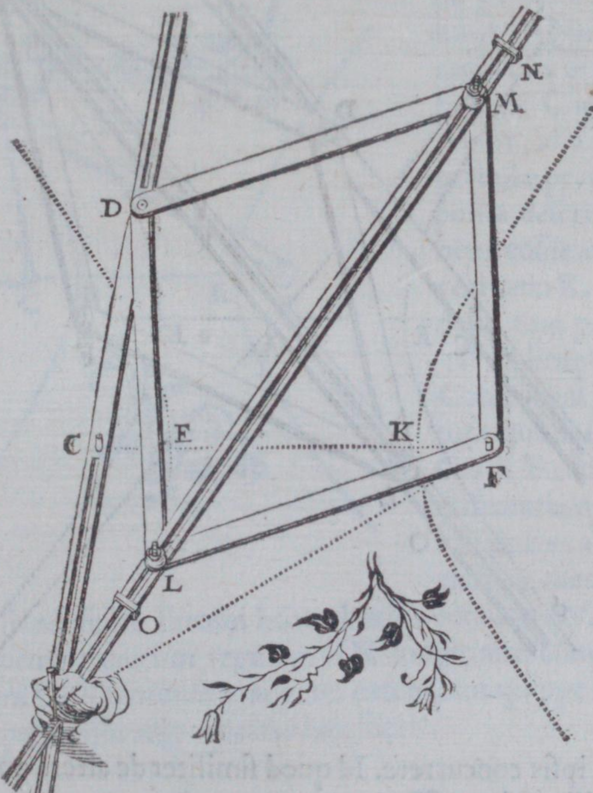
Similiter autem ſi regulæ D M, M F, F L, & L D majores aſſumptæ fuerint ſemiſſe axis recti, regulaque C D ultra C indefinitè extenſa: regulæ C D, L M mutuâ interſectione versùs C aliam lineam hyperbolen huic oppoſitam, eoſdem axes, focoſque habentem, deſcribent. Quod quidem in hunc modum demonſtratur. Jungatur F*e*.

Quoniam itaque triangula D L M, F L M duo latera L D, D M duobus lateribus F L, F M utrumque utrique æqualia habent, baſin *d p. 8 Primi Elem.* verò L M communem: [d] habebunt quoque angulum D L M angulo F L M, ſub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. Cum igitur triangulorum D L *e*, F L *e* duo latera D L, L *e* duobus lateribus F L, L *e* utrumque utrique æqualia ſint (eſt enim L*e* utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum D L *e* angulo F L*e*, ſub æqualibus *e p. 4 Primi Elem.* lateribus contentum, æqualem, ut jam oſtenſum eſt: [e] habebunt quoque baſin D*e* baſi *e*F æqualem, angulumque D *e* L angulo L *e* F, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Major itaque eſt C*e* quàm *e* F, ipsâ C D; eſt autem C D æqualis axi E K, ex conſtructione. Liquet ergo ex converſa 51ma Prop^ne^ libri 3^tii^ Conicorum Apollonii, punctum *e* eſſe in linea curva, hyperbole dicta; cujus foci ſunt puncta C & F; vertex autem punctum K. Quia verò rectæ C D, L M ita in infinitum ſe mutuò ſecare poſſunt, atque eadem ſemper ratio conſtat de puncto interſectionis *e*: manifeſtum eſt, ejuſmodi motu portio-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tionem lineæ hyperbolæ in plano deſcribi. Sicut faciendum proponebatur. Similis eſt ratio de alia hyperbola huic oppoſita, verticem habente in E.

Speciale autem hic modus illud præ ſe fert advertendum, ut inter deſcribendum regula LM continuò deſignet lineam rectam, quæ hy-

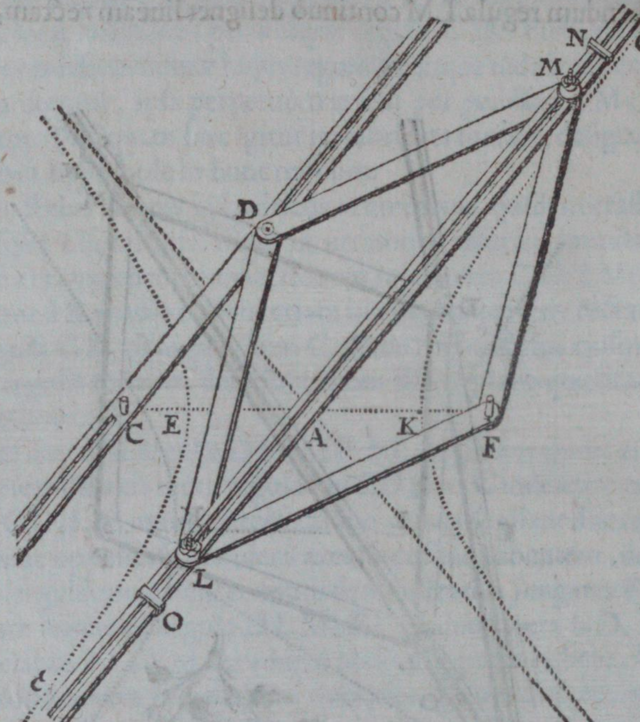


berbolen in quocunque curvæ puncto ε contingat. Hoc enim liquet è converſa 48va $Prop^{ne}$ libri 3^{tii} Conicorum Apollonii, propter æqualitatem angulorum C ε L, L ε F, quam modò demonſtravimus.

Notandum denique in hac methodo, cùm regulæ CD, L M ſunt parallelæ, ac nullam interſectionem admittunt, qualem diximus: regulam L M eo caſu alteram ex aſymptotis referre, id eſt, rectam lineam

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

lineam per medium ejus fiſſuræ ductam, propiùs quidem hinc inde cum curvis dictarum hyperbolarum ſemper accedere, nunquam ta-

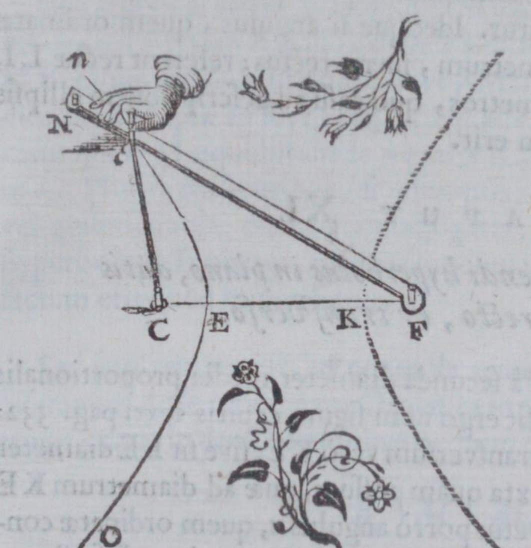


men cum ipſis concurrere. Id quod ſimiliter de altera quoque aſymptoto intelligendum eſt.

ALITER.

QUod autem propoſitum eſt licebit inſuper aliâ ratione cum illuſtri viro Renato des Cartes in hunc modum exequi. Defixis in C & F duobus paxillis, capiatur filum C ε N; illudq́ue altero extremo, paxillo C annecte; altero verò extremo, extremitati N regulæ NF, ipsâ CF longioris; quæ prædictum filum, poſtquam ita nexum fuerit, longitudine ſuperet, quantitate axis EK. Deinde perfore-

perforetur altera extremitas hujus regulæ, ut paxillo F injici queat, ac circa illum in plano rotari. Fiet enim, ut, immiſſo ſtylo eoque delato ab *n* extremo fili ad E, interea dum pars fili N ε velut agglutinata tenetur regulæ N F, rotanti circa F, quæſitæ lineæ hyperbolæ portio *n* ε E in plano deſcribatur, hoc eſt, cujus foci ſint C & F, vertex autem E. Tranſlatâ verò regulâ ad alteram partem lineæ CF, eodem modo reliqua hyperbolæ portio E O deſignabitur. Quòd ſi autem regula ex F in C, & filum ex C in F transferantur, alia inſuper hyperbolæ portio huic oppoſita deſcribetur, habens eoſdem focos, & verticem K. Quæ quidem, tum per converſã 51^{mam} Prop^{nem} 3^{tii} libri Conicorum Apollonii, tum quòd inter rectas C ε, ε F eadem ſemper differentia, quę inter C ε, ε N & F ε, ε N ſeu F N exiſtit, manifeſta ſunt.



Denique ſi indefinitè lineam hanc ulteriùs versùs *n* & O deſcribere lubet, oportebit tantùm regulam F N longiorem aſſumere, ſicuti etiam filum C ε N tantundem augere: extendetur quippe hæc linea eò longiùs, quò major augmentatio hæc fuerit.

Caput X.

De modo deſcribendi ellipſes in plano, datis latere recto, & tranſverſo.

QUoniam in ellipſi ſecunda diameter media proportionalis eſt inter latera figuræ, eſto itaque ut in figura capitis tertii pag. 314. latus rectum datum KQ, tranſverſum verò KE; ſive ſit K E diameter ellipſis, K Q autem linea juxta quam poſſunt, quæ ordinatim ad diametrum

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

metrum K E adplicantur. Detur præterea angulus *a*, quem ordinatæ conſtituere debent ad KE. Oporteatque ellipſin in plano deſcribere.

Sectâ igitur bifariam diametro K E in A, inveniatur inter K Q & KE media proportionalis L I, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ea angulum faciat æqualem dato *a*: erit ipſa ſecunda diameter, priori K E conjungata. Quo facto, circa diametros K E, L I ellipſis deſcribatur, quemadmodum capite quinto tradidimus, factumque erit quod quæritur. Ideoque ſi angulus, quem ordinatæ conſtituere debent ad diametrum, fuerit rectus; referent rectæ L I, KE axes ſeu extremas diametros, quo caſu ad deſcriptionem ellipſis caput quartum ſequendum erit.

Caput XI.

De modo deſcribendi hyperbolas in plano, datis latere recto, & tranſverſo.

Siquidem & in hyperbolâ ſecunda diameter media proportionalis eſt inter latera figuræ, ſit ergo ut in figura capitis ſexti pag. 332. latus rectum datum K Q, tranſverſum verò K E; ſive ſit KE diameter hyperbolæ, & K Q linea juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum K E ordinatim adplicantur. Detur porrò angulus *a*, quem ordinatæ conſtituere debent ad KE. Oporteatque hyperbolen in plano deſcribere.

Diviſâ itaque bifariam diametro K E in A, inveniatur inter K Q & KE media proportionalis L I, eâque ordinatim adplicatâ ad K E in A, ita ut cum ipſa angulum efficiat æqualem angulo dato *a*: erit ipſa ſecunda diameter, priori KE conjugata. Deinde datis diametris KE, L I, deſcribatur hyperbole K ε, quemadmodum capite ſeptimo traditum eſt, factumque erit, quod imperabatur.

Eodem modo deſcribetur quoque hyperbola E ε priori K ε oppoſita, ut ex eodem capite eſt manifeſtum.

Caput XII.

De modo deſcribendi hyperbolas in plano, per datum punctum, circa datas poſitione aſymptotos.

Æterùm cum frequentiſſimè occurrat hyperbole deſcribenda in plano, circa datas poſitione aſymptotos, quæ tranſeat per datum

tum punctum : viſum quoque fuit modum ſubindicare, quo illud Organicè expediri poſſit.

Repetitâ itaque figurâ capitis ſexti pag. 332, in eaque datis poſitione rectis lineis A D, A M, & puncto intra ipſas E, oporteat per E, circa aſymptotos A D, A M, hyperbolen in plano deſcribere.

Ducatur ex E alteri ipſarum AD, AM, puta AM, recta æquidiſtans EB, ſecans alteram AD in B; deinde aſſumptâ BD æquali AB, agatur D E, eaque producatur donec ſecet AM in M; junctâ autem EA, producatur hæc ipſa ad K, ut AK ſit æqualis AE: & per punctum A ducatur ipſi D M æquidiſtans ac æqualis IL, quæ à KE bifariam ſecetur in A. His ita exiſtentibus, ſi aſſumptis rectis KE, IL, ceu axibus, vel quibuſcunque diametris conjugatis, per E, tanquam verticem, hyperbole deſcribatur, quemadmodum capite 7mo oſtenſum fuit: factum erit quod imperabatur.

Sed jam tempus eſt, ut nonnulla quoque de parabola in medium afferamus, & de modis eam Organicè in plano deſcribendi. Præmittimus itaque in demonſtrationem eorum quæ ſequuntur, ſequens

L E M M A.

SIT parabole, cujus axis quidem AC, *vertex verò* A, *& à quopiam in ſectione puncto D adplicetur ad* AC *recta ordinatim* DC. *Abſcindatur autem ex axe ab* A *vertice linea* AB, *æqualis quartæ parti lateris recti, jungaturque* BD. *Dico hanc æqualem fore lineæ* EC, *quæ tum ex* EA *lateris recti quarta parte, tum ex AC componitur.*

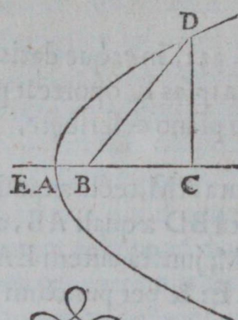
[a] *Quoniam enim quadrata* AC, AB *ſimul ſumpta æqualia ſunt rectangulo bis ſub* CA, AB *comprehenſo, unà cum quadrato* BC: *erit quadratum* BC *æquale quadratis* AC, AB, *dempto iiſdem rectangulo bis ſub* CA, AB. *Cum autem* AB *ex hypotheſi ſit quarta pars lateris recti,* [b] *erit quoque rectangulum ſub* CA, AB *rectanguli quod continetur ſub* CA *& latere recto parabolæ quarta pars; hoc eſt, rectangulum bis ſub* CA, AB *æquale erit ſemiſſi rectanguli, comprehenſi ſub* CA *& latere recto. Æquale igitur erit quadratum* BC

a p 7 Secundi Elem.

b p 1 Sexti Elem.

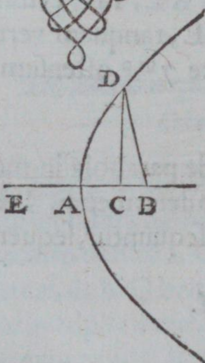
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quadratis A C, AB, *minus ſemiſſe rectanguli ſub* C A *& latere recto. Quocirca ſi utrobique commune addatur quadratum* C D, [c] *erit quadratum* B D *æquale quadratis* AC, AB, *minus ſemiſſe rectanguli ſub* C A *& latere recto. At cum* [d] *quadratum* C D *æquale ſit rectangulo ſub* C A *& latere recto, quadrata* A C, AB, CD, *multata ſemiſſe rectanguli ſub* C A *& latere recto, æquivalebunt quadratis* A C, A B *& ſemiſſi rectanguli ſub* C A *& latere recto, hoc eſt, ei quod bis ſub* C A, A E *continetur. E quibus ſequitur quadratum* B D *æquale eſſe quadratis* C A, A B *ſeu* A E, *unà cum rectangulo ſub* C A, A E *bis. Manifeſtum autem eſt,* [e] *quadrata* C A, A E, *unà cum rectangulo ſub* C A, A E *bis, ſimul æquari quadrato totius* E C. *Quocirca æqualia erunt quadrata* BD, EC; *unde & rectæ* B D, E C. *Quod erat propoſitum.*



c p 47 *Primi Elem.*

d p 11 *Primi Conicorum Apollonii.*



e p 4 *Secundi Elem.*

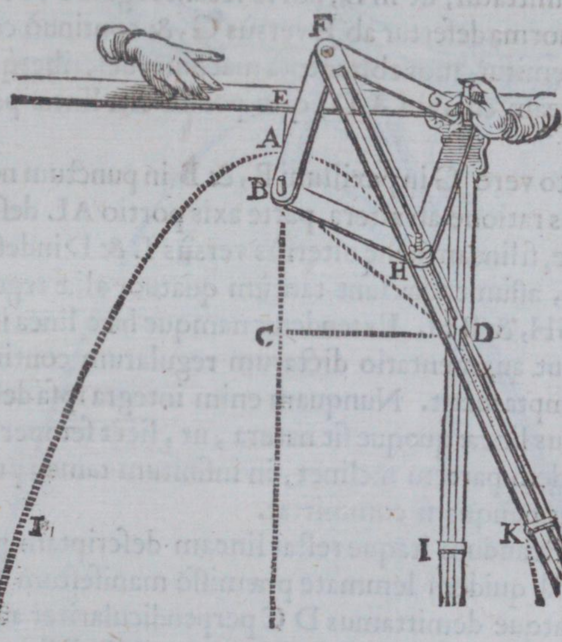
Caput XIII.

De modo deſcribendi parabolas in plano, datis axe, vertice, & latere recto.

In plano quocunque detur A C axis, vertexque punctum A, ſit autem AB lateris recti quarta pars. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen deſcribere, cujus quidem axis ſit recta A C, vertex punctum A, latus verò rectum linea recta ipſius AB quadrupla.

Producatur A C versùs A, donec A E ipſi A B ſit æqualis; & ex E erigatur ad E C perpendicularis E G, eaque indefinitè utrinque protendatur. Deinde aſſumantur quatuor regulæ æquales BF, FG, GH, & HB, longitudinis cujuſlibet, ita tamen ut illa non ſit minor quàm AB,

AB, ipſæque extremitatibus ſibi invicem annectantur, ſic ut rhombum, quadratumvé referant BFGH. Ubi autem in G connexæ ſunt, connectantur & ſimul puncto G normæ GDI, qualis appoſitâ figurâ exhibetur, hoc eſt, quæ per medium ſecundùm longitudinem GI pertuſa ſit longâ canali ſeu fiſſurâ, deſinente propè G, diſtantiam circiter rectæ AE, ipſaque versùs I indefinitè extenſa intelligatur. Ubi verò in B ſibi invicem ſunt annectendæ, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in B defixo injici queant, atque hâc ratione connexæ exiſtant.



Porrò cũ per F & H regula medio ſuo aſſiduè tranſire requiratur annectatur illa puncto F, ubi regulæ BF, FG ſibi mutuò ſunt annexę, quę in longitudinem ſit pertuſa quemadmodum norma, hoc eſt, pari fiſſurâ; perforenturque regulæ BH, HG in H, ſic ut in illas paxillus inſeri queat ejuſdem craſſitiei atque latitudo alterutrius fiſſuræ, conſtans ſubtus ex lamella, ſuperiùs verò in cochleam extructus; ita ut hâc ratione regulæ BH, HG in H ſint connexæ, & regula FH, intùs dictum paxillum comprehendens, medio ſuo per F & H ſemper tranſire cogatur. Ut autem regulæ BH, HG, & FH in paxillum injectæ

ſic eodem ſtatu conjunctæ perſeverent, ipſis alia lamella foramine pertusâ imponatur, atque matre perſtringatur. Denique adhibeantur duo annuli quadranguli I & K, regulam FH normamque GD circundantes, ut eas arctè circumplectentes ubique eandem fiſſuræ latitudinem conſervent, & qui huc vel illuc divelli quoque poſſint, prout uſus exiget. His ita peractis, linea parabole in hunc modum deſcribetur.

Adjunctâ ipſi EG regulâ, aſſumatur ſtylus aliquis cylindricus ejuſdem craſſitiei cum latitudine utriuſque fiſſuræ, iſque in utramque fiſſuram immittatur, ut in D, ubi ſe ſecant regula FH & norma GI: dum enim norma defertur ab E versùs G, & continuò contra dictam regulam premitur, movebitur tota machina, deſcribetque hoc motu ſtylus D lineam curvam AD, quæ portio erit lineæ parabolæ quæſitæ.

Tranſlato verò G in paxillum B, & B in punctum normæ G, eâdem prorſus ratione ab altera parte axis portio AL deſignabitur.

Denique, ſi lineam hanc ulteriùs versùs L & D indefinitè delineare velimus, aſſumendæ ſunt tantùm quatuor aliæ regulæ longiores BF, FG, GH, & BH. Extendetur namque hæc linea indefinitè longiùs, prout augmentatio dictarum regularum continuò major ac major aſſumpta fuerit. Nunquam enim integra ipſa deſcribi poterit, cum ea hujus lineæ quoque ſit natura, ut, licèt ſemper magis magiſque ad eandem partem inclinet, in infinitum tamen protenſa extremitates ſuas nunquam committat.

Demonſtrandum itaque reſtat lineam deſcriptam parabolen exiſtere. Quod quidem lemmate præmiſſo manifeſtum fiet, ſi jungamus BD, atque demittamus DC perpendiculariter ad AC. Erunt enim triangulorum BFH, HFG duo latera HB, BF duobus lateribus HG, GF utrumque utrique æqualia, baſiſque FH utrique triangulo communis: [a] quocirca & angulus BFH angulo HFG, ſub æqualibus rectis lineis contentus, æqualis erit. Igitur cum duo triangula DBF, DFG duo latera BF, FD duobus lateribus GF, FD utrumque utrique æqualia habeant (eſt enim FD latus utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum BFD angulo DFG, ſub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam eſt oſtenſum: [b] habebunt quoque baſin BD baſi DG æqualem, angulumque BDF angulo FDG, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Quoniam autem CE ipſi DG eſt æqualis, erunt quoque BD, CE inter ſe æquales. Patet ergo [c] pun-

a p 8 Primi Elem.

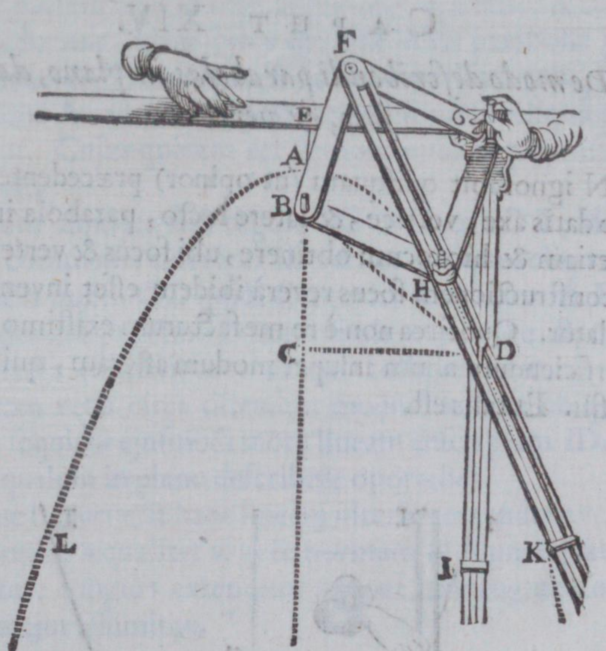
b p 4 Primi Elem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

[c] punctum D eſſe in curva linea parabole dicta, cujus axis eſt A C, vertex A, & latus rectum linea recta ipſius A B quadrupla. Cum autem adducto modo FH, G D ſe mutuò in infinitum ſecare poſſint, & eadem ſemper ratio de puncto interſectionis D conſtet: ſequitur ejuſmodi motu deſcriptam curvam LAD, eſſe lineam parabolã quæſitam.

c p Lemma antecedens.

Præterire autem non oportet, quod hîc obſervatu dignum occurrit, regulam nempe F D K inter deſcribendum medio ſuo tangere



continuò lineam parabolen in puncto D. Oſtenſum enim eſt, angulos BDF, FDG eſſe æquales. Quocirca cum [d] angulus F D G angulo IDK ſit æqualis, quòd ſecundum verticem conſiſtant: erit quoque angulus B D F angulo IDK æqualis, atque ita linea F D K parabolam contingens in D. Ut patet ex 41 Prop^ne^ libri 9^ni^ Perſpectivæ Vitellionis.

d p 15 Primi Elem.

Cæterùm ſciendum, B punctum Focum ab Opticis appellari ſolitum, eò quòd, ſi ſpeculum concavum ad hanc figuram expolitum Soli opponatur, radii ſpeculo incidentes axi paralleli, omnes ad hoc unicum punctum B reflectantur; atque ita à ſuperficie talium ſpeculorum ignem in B accendi.

SCHO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

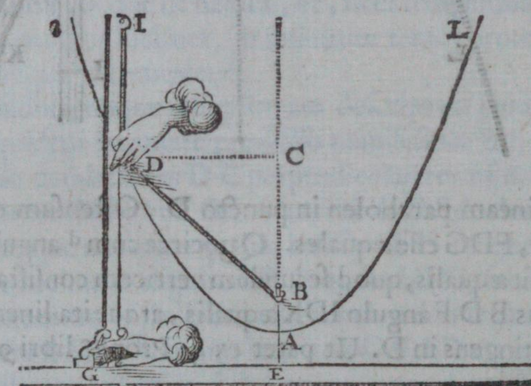
SCHOLIUM.

Liquet porrò ex allatis, nullâ operâ rectam lineam duci poſſe, quæ curvam paraboles in dato quolibet puncto contingat. Si enim in D*, exempli gratiâ, ejuſmodi tangens ducenda foret, agatur per* D *recta* D G *axi* A C *parallela, jungaturque* BD. *Quo facto, ſi biſariam ſecetur angulus* BDG *rectâ* D F*, continget hæc parabolam in* D*, ut requiritur.*

Caput XIV.

De modo deſcribendi parabolas in plano, dato foco, & vertice.

NON ignorabit quiſquam (ut opinor) præcedentem modum, quo datis axe, vertice, & latere recto, parabola in plano deſignatur, etiam & hîc locum obtinere, ubi focus & vertex datus eſt: cum ad conſtructionem focus reverà ibidem eſſet inveniendus, qui hîc jam datur. Quocirca non è re me facturum exiſtimo, ſi ad quæſitum perficiendum alium inſuper modum afferam, qui beneficio ſit alicujus fili. Et talis eſt.



Detur in plano quocunque focus punctum B, vertex autem punctum A. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen deſcribere, ut diximus.

Junctâ

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Junctâ A B, ipsâque eatenus ultra A productâ ad E, erigatur ex E ad eam perpendicularis E G. Deinde defixo paxillo in B, capiatur filum I D B; illudque cum una extremitate annecte paxillo B; cum altera verò extremitati I normæ I G, quæ quidem filo ſic nexo longitudine ſit æqualis. Oportet autem eam ipsâ EB majorem aſſumi. Ut itaque propoſitum exſequamur, adjungatur ipſi GE regula utrobique indefinitè extenſa; feraturque norma I G contra regulam à G versùs E. Fiet enim, ut, dum norma ita movetur, ac ſtylus immiſſus, qui tenet aſſiduè partem fili I D velut agglutinatam normæ & ab *i* extremo fili ad A deducitur, idem ſtylus quæſitæ lineæ parabolæ portionem *i* D A in plano deſcribat: hoc eſt, cujus focus ſit datum punctum B, vertex autem A. Cæterùm pari ratione à parte reliquâ portio A L deſignabitur. Cujus quidem rei demonſtratio ex præmiſſo lemmate perſpicua eſt.

Nam cum æquales ſint regula I G & filum I D B; ideo ſi ab his æqualibus communis auferatur ID: erunt quoque reliquæ G D, DB æquales. Eſt autem GD ipſi E C æqualis. Erit igitur & DB ipſi EC æqualis, adeoque punctum D in parabola, cujus focus B, & vertex A. Ut ex converſa lemmatis antecedentis colligere licet,

Quoniam verò circa oſtenſum modum eadem ubique ratio eſt puncti D: ſequitur ejuſmodi motu lineam deſcriptam *i*DAL eſſe parabolam, qualem in plano deſcribere oportebat.

Denique ſi placuerit hanc lineam ulteriùs extendere versùs *i* & L, oportet tantùm æqualiter augere normam & filum: quandoquidem illa indefinitè longiùs extenditur, prout hæc augmentatio ſemper major ac major aſſumitur.

S C H O L I U M.

Siquidem hactenus oſtendimus varios modos Conicas Sectiones Organicè in plano deſcribendi: ſimulque etiam quo pacto in ſingulis rectæ lineæ duci poſſint, quæ eaſdem in datis punctis contingant: ac porrò etiam relationem, quam inter ſe habent ſuperficies ellipſis ac cujuſlibet ejus ſegmenti & ſuperficies circuli ejuſque ſegmenti; ut & eam, quam inter ſe habent figura contenta ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuſcunque & alia ſimiliter ſub recta linea & portione lineæ hyperbolæ contenta, cujus latus rectum & tranſverſum ſunt æqualia (quæ meo judicio illa ſunt, quæ de earum ſuperficie à nobis tantummodo cognoſci poſſunt): Reſtat ut coronidis loco hîc

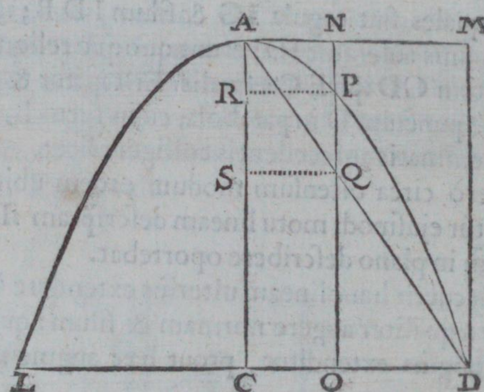
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ultra ſubjungamus relationem, quam inter ſe habent figura rectilinea & alia, ſub recta linea & portione lineæ parabolæ cujuſcunque comprehenſa. Quæ quidem ſola inter Conicas Sectiones hactenus ad quadrati formam reduci potuit, & ab Archimede primùm fuit oſtenſa. Aliam verò à nobis inventam ſic accipe.

Præmittimus autem ſequentia Theoremata demonſtrata, quoniam iis ad inſtitutum omnino indigebimus.

I.

Si in figura, contenta ſub recta linea L D & portione lineæ parabolæ LAD, diameter ſit A C, & baſis L C D ipſi A C ordinatim adplicata, jungaturque A D; compleatur



autem parallelogrammum CM, in quo ductâ NO ipſi A C vel DM utcunque parallelâ, occurrente ipſis A M, CD in N & O, atque ſecante A D in Q, lineam verò parabolæ in P: dico eſſe ON ad QN, ſicut Q N ad N P.

Hoc enim perſpicuum eſt, cum A C *ſit ad* A S, *ut* C D *ad* S Q *ſeu* RP; A C *autem ad* A R, *ut quadratum* C D *ad quadratum* R P, *per* 20^{mam} *Prop*^{nem} *libri* 1^{mi} *Conicorum Apollonii. Vnde liquet* A C, AS, & A R *eſſe proportionales, & eſſe quidem* A C *ſeu* NO *ad* AS *ſive* N Q, *ut* AS *ſive* N Q *ad* A R *ſeu* N P. *Vt proponebatur.*

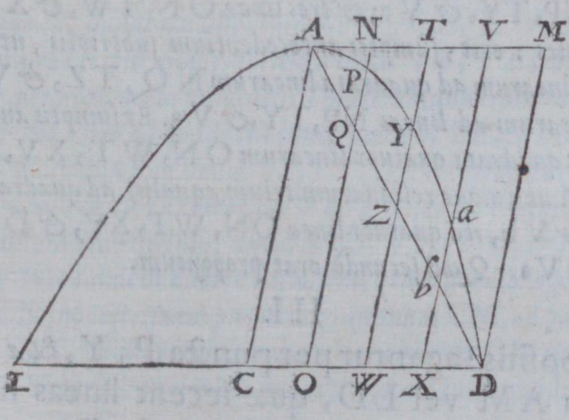
II. Iiſ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

II.

Iiſdem poſitis, ſi dividatur A M in partes quotcunque æquales, atque ex punctis diviſionum N, T, & V ad latus oppoſitum C D rectæ ducantur NO, TW, & VX parallelæ ipſi AC vel DM, quæ rectam AD ſecent in Q, Z, & b, lineam verò parabolen in P, Y, & a: Dico NO, TW, VX, & MD ſimul ſumptas eſſe ad NP, TY, V a, & MD ſimul ſumptas, ut quadrata ipſarum NO, TW, VX, & MD ſimul ſumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, V b, & MD ſimul ſumpta: itemque NO, TW, VX, & MD ſimul ſumptas eſſe ad NP, TY, & V a ſimul ſumptas, ut quadrata ipſarum NO, TW, VX, & MD ſimul ſumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, & V b ſimul ſumpta.

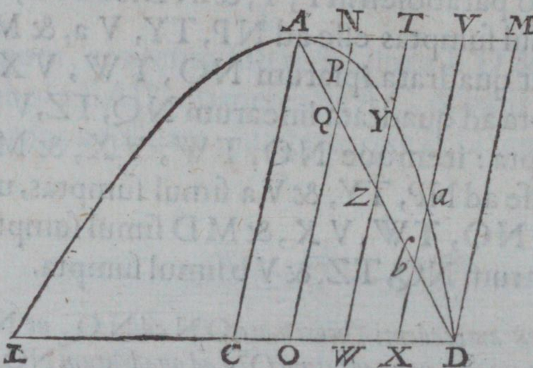
Eſt enim ex antecedenti Theoremate ON *ad* NQ, *ut* NQ *ad* NP. *Quocirca erit quoque, ut quadratum* ON *ad quadratum* NQ, *ita* ON *ad* NP. *Eodem modo cum ſit* WT *ad* TZ, *ut* TZ *ad* TY: *erit etiam quadratum* WT *ad quadratum* TZ, *ut* WT *ad* TY. *Itemque quia* XV *eſt ad*



V b, *ſicut* V b *ad* V a: *erit ſimiliter quadratum* XV *ad quadratum* V b, *ut* XV *ad* V a. *Omnia igitur quadrata* ON, WT, XV *erunt ad omnia quadrata* NQ, TZ, V b, *ut omnes lineæ* ON, WT, XV *ad omnes lineas*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

NP, TY, V a. *Denique cum & D M ad M D ſit, ut D M ad MD; erit itidem quadratum DM ad quadratum MD, ut DM ad MD. Vnde omnia quadrata ON, WT, X V, & D M erunt ad omnia quadrata N Q, T Z, V b, & MD, ſicut omnes lineæ ON, WT, XV, & D M ad omnes lineas NP, TY, V a, & MD. Quod primò erat propoſitum.*



Iam verò cum oſtenſum ſit quadrata ſimul O N, W T, & X V eſſe ad quadrata ſimul N Q, TZ, & V b, ut lineæ ſimul ON, WT, & X V ad lineas ſimul NP, TY, & V a; & tres lineæ O N, TW, & X V ſibi invicem ſint æquales: erit, ſumptis antecedentium ſubtriplis, ut quadratum unius harum linearum ad quadrata linearum N Q, T Z, & V b, ita una earundem linearum ad lineas NP, TY, & V a. Et ſumptis antecedentium quadruplis, ut quadrata quatuor linearum O N, W T, X V, & D M (eſt enim & D M unicuique reliquarum trium æqualis) ad quadrata linearum NQ, T Z, & V b, ita quatuor lineæ ON, WT, XV, & D M ad lineas NP, TY, & V a. Quod ſecundò erat propoſitum.

III.

Iiſdem poſitis: agantur per puncta P, Y, & *a* lineæ parallelæ ipſi AM vel LD, quæ ſecent lineas his punctis utrinque proximas in *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, & *h*. Dico parallelogrammum CM eſſe quidem parallelogrammis *c* N, *e* T, *g* V, & XM minus quàm triplum, parallelogrammis verò PT, YV, & *a* M majus quàm triplum.

Cum

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Cum enim lineæ MD, V*b*, TZ, *&* NQ *ſe invicem æqualiter excedant, exceſſus verò ſit æqualis minimæ* NQ, *& aliæ totidem exiſtant* MD, VX, TW, *&* NO, *quæ magnitudine maximæ* MD *ſint æquales: erunt, per* 10. *Prop. tractatus Archimedis de Lineis Spiralibus, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *harum æqualium linearum unà cum quadrato maximæ* MD *ac ſimul rectangulo, comprehenſo ſub minima* NQ *& linea æquali inæqualibus ſimul ſumptis, tripla quadratorum earundem inæqualium linearum* MD, V*b*, TZ, *&* NQ. *Vnde ſequitur quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *minora eſſe quàm tripla quadratorum à lineis* MD, V*b*, TZ, *&* NQ. *Quia autem ex proximè antecedenti Theoremate conſtat, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *ad quadrata* MD, V*b*, TZ, *&* NQ *eam habere rationem, quàm habent lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V*a*, TY, *&* NP: *ſequitur item lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* MD, V*a*, TY, *&* NP *minores eſſe quàm triplas. Manifeſtum autem eſt, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V*a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quàm parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc eſt, quàm parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma* XM, *g*V, *e*T, *& c*N. *Quare conſtat parallelogrammum* CM *minus eſſe quàm triplum parallelogrammorum* XM, *g*V, *e*T, *& c*N.

*Dico verò idem parallelogrammum parallelogrammorum a*M, YV, *&* PT *majus eſſe triplo.*

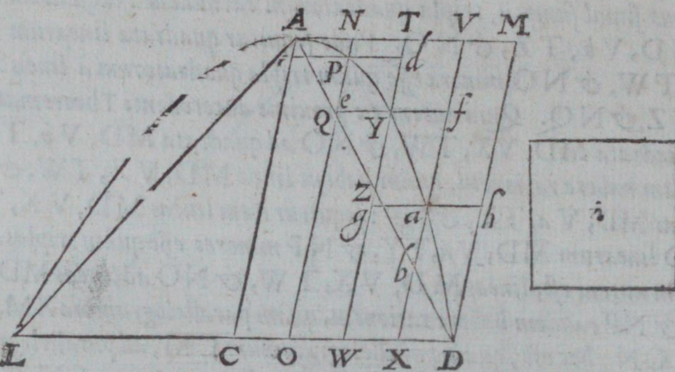
Quoniam enim ex demonſtratione citatæ Propoſitionis Archimedis perſpicuum quoque eſt, quadrata linearum MD, VX, TW, *&* NO *ſimul ſumpta majora eſſe triplo quadratorum à lineis* V*b*, TZ, *&* NQ, *ſimul ſumptorũ; &, per proximum præcedens Theorema, quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *ſint ad quadrata linearum* V*b*, TZ, *&* NQ, *ſicut lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP: *ſequitur quoque lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* V*a*, TY, *&* NP *majores eſſe quàm triplas. Eſt autem manifeſtum, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quam parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc eſt, quam parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma a*M, YV, PT. *Conſtat itaque parallelogrammum* CM *parallelogrammorum a*M, YV, *&* PT *majus eſſe quàm triplum. Quare conſtat propoſitum.*

IV.

Iiſdem poſitis: ſit ſpatium *i* parallelogrammi CM tertia pars. Dico jam ſpatium, comprehenſum à rectis AM, MD, & portione lineæ parabolæ AD, ſpatio *i* æquale eſſe.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Si enim ſpatium illud ſpatio i non fuerit æquale, erit majus eo aut minus. Eſto primùm majus, ſi fieri poſſit, & exceſſus, quo ſpatium hoc ſuperat ſpatium i, ſibi ipſi toties aggregetur, donec compoſitum ex ipſo excedat tandem parallelogrammum C M. *Poteſt itaque & ſumi ſpatium quoddam mi-*



nus illo exceſſu, quod ſit pars parallelogrammi C M. *Sit ergo* C N *parallelogrammum dicto exceſſu minus, & pars parallelogrammi* C M. *Erit quoque inde linea* AN *pars lineæ* A M. *Dividatur itaque* A M *in partes ipſi* A N *æquales, & reliqua fiant ut in ſuperioribus dictum eſt.*

Igitur cum parallelogrammum CN *ſit minus exceſſu, quo ſpatium* APY*a* D M *ſuperat ſpatium i: ſequitur ſpatium i & parallelogrammum* C N *ſimul ſumpta ſpatio* APY *a* D M *eſſe minora: ac proinde minora quàm parallelogramma c* N, *e* T, *g* V, *&* XM, *quæ ipſo ſpatio* A P Y *a* D M *ſunt majora. Parallelogrammo autem* C N *æqualia ſunt parallelogramma c* N, *e d, g f, &* X *h, per quæ parabola incedit. Quare ſi utrobique demantur parallelogramma c* N, *e d, g f, &* X *h: relinquetur quoque ſpatium i minus parallelogrammis reliquis* PT, YV, *& a* M. *Cumque parallelogrammum* C M *ſpatii i ſit triplum, erit parallelogrammum* C M *minus quàm triplum parallelogrammorum* P T, Y V, *& a* M. *At hoc eſt impoſſibile, oſtenſum enim eſt ipſis majus quàm triplum exiſtere. Non erit igitur ſpatium* APY*a* DM *majus ſpatio i.*

Dico item neque minus eſſe poſſe.

Sit enim minus, ſi fieri poteſt. Rurſuſque exceſſus quo ſpatium i ſuperat

APY

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

APY a D M ſibi ipſi toties addatur, donec ſuperet tandem parallelogrammum C M. Poteſt itaque ſumi ſpatium aliquod, quod ſit minus illo exceſſu, quodque ſit pars parallelogrammi C M, reliquis ut prius diſpoſitis.

Quoniam igitur parallelogrammum C N *minus eſt exceſſu, quo ſpatium i ſuperat ſpatium* A P Y *a* D M: *erunt ſpatium* APY *a* DM *& parallelogrammum* C N *ſimul ſumpta minora ſpatio i. Eſt autem ipſum i ſpatium minus parallelogrammis c* N, *e* T, *g* V, *&* XM. *Parallelogrammum enim* C M *ſpatii i eſt triplum, minus autem quàm triplum parallelogrammorum prædictorum, uti oſtenſum eſt. Igitur ſpatium* A P Y *a* D M *& parallelogrammum* CN *ſimul ſunt minora parallelogrammis c* N, *e* T, *g* V, *&* XM. *Quocirca ſpatio* APY *a* DM *utrinque ablato: erit quoque reliquum parallelogrammum* C N *reliquis ſpatiis* A *c* P, P *e* Y, Y *g a, & a* Y D *minus. Quod fieri non poteſt. Patet enim parallelogrammum* CN *parallelogrammis c* N, *e d, g f, &* X *b eſſe æquale, quæ ſimul dictis ſpatiis ſunt majora. Non erit igitur quoque ſpatium* A P Y *a* D M *ſpatio i minus. Oſtenſum autem eſt, & neque eo majus eſſe poſſe. Spatium itaque* APY *a* D M *ſpatio i neceſſariò erit æquale. Quod erat propoſitum.*

V.

Hoc autem demonſtrato, manifeſtum eſt ſpacium quodcunque, comprehenſum ſub recta linea & portione lineæ parabolæ, eſſe ſeſquitertium trianguli, eandem baſin & altitudinem cum ipſo ſpatio habentis.

Perſpicuum enim hoc eſt, ſi ducamus rectam L A.

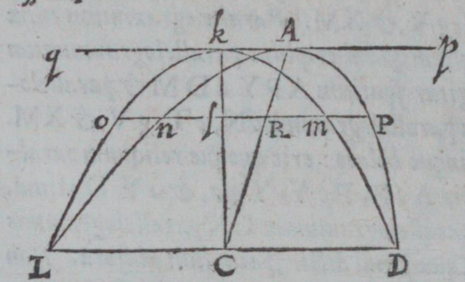
Patet namque triangulum LAD *parallelogrammo* CM *æquale eſſe. Ideoque qualium partium triangulum* L A D *continebit tres, talium ſpacium* APY *a* DM *erit una, & ſpacium* APY *a* DC *duæ, ſpatium verò* LAPY*a* D *quatuor. Seſquitertium itaque exiſtit ſpatium* LAPY*a*D *(comprehenſum ſub recta linea* L D *& portione lineæ parabolæ* L APY*a*D*) trianguli* L A D, *eandem cum ipſo baſin, eandemque altitudinem habentis. Quod oſtendere propoſitum erat.*

Denique licèt hæc ubique vera ſint ac locum habeant tam in hujuſmodi figuris ſcalenis quàm in rectis; attamen quia ſimiliter Quadrationem hanc concludere decrevimus atque in ellipſi & hyperbola factum fuit: placuit hîc porrò ſubjicere, quibus figuris rectis, ſub recta linea & portione lineæ parabolæ comprehenſis, æquentur hujuſmodi figuræ ſcalenæ, ſub recta pariter linea & portione lineæ parabolæ comprehenſæ.

Sit

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Sit itaque talis figura ſcalena L A D, *contenta ſub recta linea* L D *& portione lineæ parabolæ* L A D, *cujus diameter ſit* C A, *latus verò rectum* A p: *& ex* A *ducatur* A k *parallela* L D; *tum verò ex* C *ad* L D *erigatur perpendicularis* C k, *ſecans* A k *in* k: *atque circa puncta* L, k, D *linea parabole in plano deſcribatur. Dico figuram ſcalenam* LAD *figuræ rectæ* L k D *eſſe æqualem.*



Vt autem per puncta L k D *in plano portio lineæ parabolæ deſcribatur, adplicetur quadratum rectæ* LC *vel* CD *ad longitudinem* k C, *ſitque latitudo ortiva recta* kq; *ſive quod idem eſt, inveniatur ipſis* k C, CD *tertia proportionalis* kq. *Referet enim ea juxta* 11. *Prop. libri* 1mi *Conicorum Apollonii latus rectum parabolæ, cujus axis eſt* k C, *vertex* k, *& ordinatim adplicata* CD. *Vnde porrò facile eſt, per caput ultimum hujus tractatus, ejuſmodi lineæ portionem deſcribere.*

Ducatur jam ipſi L D *recta utcunque æquidiſtans* P R l o; *ſecans quidem parabolam* L A D *in* P *& n, ac diametrum ejus* C A *in* R; *parabolam verò* L k D *in m & o, ac axem ejus* C k *in l.*

His ita conſtitutis, dico rectas n P, o m *inter ſe æquales eſſe.*

Quoniam enim ob rectam CD, *in utraque figura ordinatam; in parabola quidem* L A D [a] *rectangulum ſub* C A *& latere recto* A p *quadrato ipſius* CD *eſt æquale; in parabola verò* L k D [b] *rectangulum ſub* C k *& latere recto* k q *eidem etiam quadrato* CD *eſt æquale: ſequitur rectangulum ſub* CA, A p *rectangulo ſub* C k, k q *eſſe æquale.* [c] *Vnde erit ut* C A *ad* C k, *ita* k q *ad* A p. *Vt autem* CA *ad* C k, [d] *ita quoque eſt (ob parallelas* R l, A k) *recta* CR *ad* C l, [e] *& reliqua* RA *ad reliquam* lk. [f] *Erit itaque ut* RA *ad* lk, *ita* kq *ad* A p. [g] *Æquale igitur eſt rectangulum* RA p *rectangulo* l k q. *Eſt autem in parabola* LAD [h] *rectangulũ* RA p *æquale quadrato* R p; *in parabola verò* LkD *rectangulum* lkq *æquale quadrato* lm. *Æqualia ergo quoque erunt quadrata* RP, lm, *ac proinde & ipſæ rectæ* RP, lm, *unde & earũ duplæ* nP, om.

a p 11 Primi Conicorum Apollonii.
b Ex conſtructione.
c p 16 Sexti Elem.
d p 4 Sexti Elem.
e p 19 Quinti Elem.
f p 11 Quinti Elem.
g p 16 Sexti Elem.
h p 11 Primi Conicorum Apollonii.

Eadem eſt ratio de omnibus aliis rectis, quæ ordinatim in infinitum ad diametros CA, C k *in utraque figura adplicantur.*

Quia itaque ejuſmodi æqualitas in infinitum apparet in utraque figura, relinquitur ipſas inter ſe æquales eſſe. Quod oſtendere propoſitum erat.

F I N I S.

FRAN-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheſcos Profeſſoris,

EXERCITATIONVM MATHEMATICARUM, LIBER V.

CONTINENS

Sectiones triginta miſcellaneas.



LVGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII, Academiæ Typographi.

cIↄ Iↄc LVII.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Clariſſimo, Conſultiſſimoqúe

VIRO,

D^no IOHANNI WALBEECK,

JC^to eximio, atque in curia Hollandiæ cauſarum patrono diſertiſſimo.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

S. D.

CUM ſingulari benevolentiâ atque humanitate, Vir Doctiſſime, ſemper me exceperis ac proſequutus ſis, & amicitiam, quę mihi à teneris tecum interceſſit, plurimis beneficiorum argumentis ſæpius obſignare ſtudueris: nil magis mihi in votis fuit, quàm ut iiſdem publicâ grati animi teſtificatione reſponderêm. Permitte igitur, quæſo, ut tractatum hunc, qui elegantiorum ac ſelectiorum quarundam propoſitionum quaſi ſpicilegium eſt, tuo nomini inſcribam, atq; in perpetuæ amicitiæ teſſeram tibi offeram dedicemque. Quem utique non ingratum tibi fore confido, gnarus ſcilicet, quo loco apud te ſint Mathematicæ ſcientiæ; qui illas etiamnum haud minori voluptate recolere, quàm antehac ſumma cum alacritate

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tractare conſueviſti, variaque earum munera non exiguâ cum laude obiiſti. Etenim noſti, Vir Conſultiſſime, quantùm ipſæ ad ingenii cultum faciant, & quantopere mentes, nimium luxuriantes, frænent, ne quid fucatum aut præter rei veritatem admittant; adeò ut ultra earum dignitatem, quam maximâ cum utilitate conjunctam habent, etiam plurimum ſubſidii conferant ad reliqua ſtudia faciliùs capeſſenda, quæ uberiorem quæſtum amploſque honorum titulos pollicentur, ideoque à vulgo magis probantur. Unde fit, ut minimè dubitem, quin ingenii tui acumen & ſingularem prudentiam, quam in te ſuſpicio, ac in rerum cauſis diſcutiendis omnes quotidie in foro experiuntur, non minùs tibi ex harum artium cultura, quàm ex cæteris tuis ſtudiis ritè pertractatis, comparaveris. Hinc, quotieſcunque te cauſas magno cum applauſu perorantem audivi, toties quoque non infeliciter te juris peritiam cum accurata Mathematum cognitione conjunxiſſe judicavi; unde & tuam in dicendo dexteritatem, & eruditionem in juſta legum interpretatione ſæpiſſimè ſum admiratus. Neque me ſeducit hîc ſingularis meus erga te amor: teſtes enim mihi ſunt complures civitates, quæ mentis tuæ præſtantiâ allectæ, limatiſſimumque tuum judicium ſæpiùs expertæ, cauſarum ſuarum patronum te diſertiſſimum ſimulac eruditiſſimum jure merito elegêre. Quamobrem ſi exactiſſimo tuo calculo probari hæc intelligam, nullibi meliùs operam hanc meam collocari potuiſſe arbitrabor. Accipe igitur, Vir Amiciſſime, exercitationes haſce, quas tanquam ἐπίμετρον præcedentibus addo, & nunc ſub nominis tui auſpiciis in lucem edo. Quòd, ſi verò eo animo, quo à me offeruntur, eas exceperis, laboris ſuſcepti præmium ſat amplum reportaſſe me exiſtimabo. Vale, ac me amare perge.

Se-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIONES MISCELLANEÆ.

SECTIO I.

Ratio inveniendi electiones omnes, quæ fieri poſſunt, datâ multitudine rerum.

RAtio inveniendi electiones omnes, quæ circa propoſitam rerum multitudinem fieri poſſunt, haud multùm aliena eſt à modo inveniendi dati cujuſque numeri aut quantitatis partes omnes aliquotas & diviſores, quem alibi expoſuimus.

Etenim ſi, verbi gratiâ, quatuor fuerint res diverſæ, deſignatæ per *a*,*b*,*c*,& *d*,ut inveniantur electiones omnes, quæ fieri poſſunt,prout ipſæ aliter atque aliter ſumuntur, multiplico *a* per *b*,& fit *ab*. Tum *a*,*b*,& *ab* per *c*, fiuntq; *ac*,*bc*,& *abc*. Ac deinde *a*,*b*, *ab*,*c*,*ac*, *bc*,& *abc* per *d*, fiuntque *ad*, *bd*,*abd*,*cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*. Omnino ut hîc infra videre licet.

Et invenitur electio, ſi ſumma omnium ſub ipſa comprehendatur, fieri poſſe 15 modis diverſis,

a
b. *ab*
c. *ac*. *bc*. *abc*
d. *ad*. *bd*. *abd*. *cd*. *acd*. *bcd*. *abcd*.

Utpote, ſumendo,
1mo. *a*
2. *b*
3. *a* & *b* ſimul
4. *c*
5. *a* & *c* ſimul
6. *b* & *c* ſimul
7. *a*, *b*, & *c* ſimul.
8. *d*
9. *a* & *d* ſimul
10. *b* & *d* ſimul
11. *a*, *b*, & *d* ſimul
12. *c* & *d* ſimul
13. *a*, *c*, & *d* ſimul
14. *b*, *c*, & *d* ſimul
15. *a*, *b*,*c*, & *d* omnes ſimul.

Hinc ſi per *a* deſignetur unũ malum, per *b* unum pirum, per *c* unum prunum, & per *d* unum ceraſum, & ipſa aliter atque aliter, ut ſupra, eligantur, electio eorum fieri poterit 15 diverſis modis, ut ſequitur.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Nimirum, ſumendo 1mo. malum
2. pirum.
3. malum, & pirum
4. prunum
5. malum, & prunum
6. pirum, & prunum
7. malum, pirum, & prunum
8. ceraſum
9. malum, & ceraſum
10. pirum, & ceraſum
11. malum, pirum, & ceraſum
12. prunum, & ceraſum
13. malum, prunum, & ceraſum
14. pirum, prunum, & ceraſum
15. malum, pirum, prunum, & ceraſum.

Ubi porrò notandum, quòd, cum ſupra inventarum electionum ſequens regula duplo ſemper plures electiones contineat quàm proximè præcedens, ad ſolam earum ſummam inveniendam, ſufficiat addere quatuor terminos proportionales 1, 2, 4, & 8: erit enim 15, eorum ſumma, numerus electionum quæſitus.

Sic ſi 5 fuerint res diverſæ, utputa: *a*, *b*, *c*, *d*, & *e*, quæraturque quot modis diverſis earundem electio fieri poſſit, addendi tantùm ſunt 5 proportionales 1, 2, 4, 8, & 16: eritque ſumma 31, quæſita electionum ſumma. Quæ quidem, ut ſupra, inventæ, ſic exhibentur.

a.

b. ab.

c. ac. bc. abc.

d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.

e. ae. be. abe. ce. ace. bce. abce. de. ade. bde. abde. cde. acde. bcde. abcde.

Præterea advertendum hîc eſt, rebus omnibus diverſis exiſtentibus, in unaquaque ſequentium regularum ſemper unam ampliùs inveniri electionem quàm in antecedentibus omnibus regulis ſimul. Sic *b* & *ab* unâ plures ſunt numero quàm *a*. Et *c*, *ac*, *bc*, & *abc* unà plures quàm *a*, *b*, & *a b* ſimul. Itemque *d*, *ad*, *b d*, *a b d*, *cd*, *a c d*, *b c d*, & *abcd* unâ plures quàm *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, & *a b c*. Atque ita ulteriùs.

Id quod oſtendit, in Progreſſione Geometrica rationis duplæ ab uni-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

unitate, terminos omnes antecedentes ſimul additos ſemper eſſe unitate minores termino ſubſequente. Adeoq́ue ſi ultimo termino addatur duntaxat numerus, qui eo unitate minor ſit, habebitur ſumma omnium terminorum. Quam etiam obtinere licet, ponendo binarium toties, quot ſunt termini ſeu res diverſæ, atque à numero continuè ab eo facto auferendo unitatem.

Ex quibus denique inferre ac notare licet, rerum diverſarum multitudine deinceps unitate excreſcente, differentias, quibus electionum numeri conſequenter ſe mutuò excipiunt, numeros ſemper eſſe progreſſionis duplæ ab unitate: Itemq́ue ſequentium electionum numerum ſemper unitate majorem eſſe duplo proximè præcedentis. Sicut hîc infra apparet.

Res datæ.	Multitudo electionum	Differentiæ electionum.
a	1	
ab	3	2
abc	7	4
abcd	15	8
abcde	31	16
abcdef	63	32
abcdefg	127	64
abcdefgh	255	128
abcdefghi	511	256
abcdefghik	1023	512

Et ſic in infinitum.

Cum autem hæc, quæ de electionibus earumq́ue numero dicta ſunt, ad partes quoque aliquotas & diviſores dati numeri aut quantitatis referri poſſint, (quoniam ratio illas inveſtigandi à modo inveniendi electiones, ut ſupra monuimus, parùm differt): Idcirco, ad id oſtendendum, propoſitum ſit quantitatis *a b c d*, productæ multiplicatione ipſarum *a*, *b*, *c*, & *d*, invenire partes omnes aliquotas & diviſores.

Hinc inventis, ut ſupra, harum *a*, *b*, *c*, *d* electionibus omnibus, videlicet *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*, ſi in locum ultimæ *a b c d*, quæ ſemper eſt data ſeu tota quantitas, non autem ejus pars aliquota, aſſumatur unitas, referent *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & 1 partes omnes aliquotas ipſius *abcd*. Adeò ut ſemper tot ſint partes, quot electiones. Quantùm verò ad diviſores, cum unaquæque quantitas ſe ipſam quoque per unitatem dividat:

dat:

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

dat: manifeſtum eſt diviſorum numerum unitate ſemper excedere electionum ſive partium multitudinem, ita ut ipſius *abcd* diviſores ſint 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*.

Quocirca ſi ſolummodò partium vel diviſorum numerum invenire animus ſit, illas autem ipſas exhibere ſupervacaneum fuerit, oportet tantùm terminos progreſſionis 1. 2. 4. 8, ut ſupra, addere, & fit ſumma 15. Hæc enim cum tam electionum quàm partium multitudinem deſignet, deſignabit 16 diviſorum numerum.

Idem de numeris eſt intelligendum. Ut ad inveniendam tam diviſorum quàm partium multitudinem numeri 210, quoniam 210 provenit multiplicatione quatuor primorum numerorum 2, 3, 5, & 7; ſive 210 dividendo per 2, ac tum qui fit per 3, ac quotiens rurſus per 5, ac denuo hic ultimus per 7, ſic pervenitur ad unitatem: manifeſtum eſt, ſi quatuor hi numeri tanquam res diverſæ accipiantur, multitudinem electionum, quæ ab ipſis ſemper aliter atque aliter fieri poſſunt, fore 15. Ac proinde 210 habere 15 partes aliquotas, & 16 diviſores, quos ex adjuncta operatione facilè colliges.

1
210 | 105 | 35 | 7 | 1
2 | 3 | 5 | 7

2

3 . 6

5 . 10 . 15 . 30

7 . 14 . 21 . 42 . 35 . 70 . 105 . 210. Atque ita de aliis.

Porrò cum in omnibus hiſce electionibus rerum, illæ quæ per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. deſignantur, continuò ſemel tantùm ita ſimplices occurrant, reliquæ autem electiones ex iis ſemper ſint compoſitæ: patet, ſi à numero electionum auferatur numerus rerum, reliquum indicare quot modis ipſæ aliter atque aliter poſſint conjungi.

Sic *a*, *b*, *c*, & *d* modis omnibus, quos excogitare licet, conjungentur 11cies, hoc eſt, 11 modis differentibus. Sic & ipſarum *a*, *b*, *c*, *d*, & *e* numerus conjunctionum, omnifariam ſumptarum, erit 26. Haud ſecus invenietur 7 Planetas conjungi poſſe 120 modis diverſis. Et ſic de aliis.

Jam verò ſicut ex *a*, *b*, *c*, & *d*, cùm ipſæ deſignant quatuor res diverſas, inferuntur 15 electiones variæ, ita ſi eandem rem deſignent, hoc eſt, *a*, *b*, *c*, & *d* omnes inter ſe æquales ſive ejuſdem valoris intelligan-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ligantur, poterunt tantùm ex iis quatuor colligi electiones. Si enim tunc, ut convenit, eodem nomine inſigniantur, hoc eſt, per *a*, *a*, *a*, & *a* deſignentur: electiones erunt *a*, *aa*, *aaa*, & *aaaa*.

Unde liquet ſi ipſius *aaaa* ſeu a^4 partes aliquotæ inveniendæ ſint, atque eum in finem loco ultimæ electionis *aaaa* ſumatur unitas: erunt ipſius a^4 partes aliquotæ *a*, *aa*, a^3, & 1; & diviſores 1, *a*, *aa*, a^3, & a^4.

Sic & ſi quinque fuerint res æquales, ſingulæ per *a* deſignatæ, reperientur quoque 5 earundem electiones, quæ ſunt *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, & *aaaaa*. Ita ut inde concludere liceat quantitatem a^5, propter quinque ejus dimenſiones, quinque ſimiliter habere partes aliquotas, quæ ſunt *a*, *aa*, a^3, a^4, & 1; & 6 diviſores, nimirum, 1, *a*, *aa*, a^3, a^4, & a^5. Idem de ſimilibus aliis intellige.

Cæterùm datâ multitudine rerum, quarum aliquæ tantùm inter ſe æquales ſint, ut ſi, verbi gratiâ, ipſæ ſint quatuor numero, quarum duæ ſibi invicem æquales exiſtant, eæque deſignentur per *a*, *a*, *b*, & *c*: ad inveniendas omnifarias illarum electiones, multiplico, ut ſupra, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *a* & *aa* per *b*, fiuntque *ab* & *aab*. Ac deinde *a*, *aa*, *b*, *ab*, & *aab* per *c*, fiuntque *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Et manifeſtum eſt, quæſitam electionum multitudinem, comprehendendo ſub ea ſemper omnium ſummam, fore 11. Ac proinde, ſi *a* ſupponatur deſignare gallinam, *b* perdicem, & *c* anſerem: electiones fieri poterunt, ut ſequitur.

Videlicet, ſumendo 1mo. 1 gallinam

	1mo.	1 gallinam
	2.	2 gallinas
a.	3.	1 perdicem
a. aa.	4.	1 gallinam & 1 perdicem
b. ab. aab.	5.	2 gallinas & 1 perdicem
c. ac. aac. bc. abc. aabc.	6.	1 anſerem
	7.	1 gallinam & 1 anſerem
	8.	2 gallinas & 1 anſerem
	9.	1 perdicem & 1 anſerem
	10.	1 gallinam, 1 perdicem, & 1 anſerem
	11.	2 gallinas, 1 perdicem, & 1 anſerem.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ubi, ut ſupra, liquet, poſt duas ipſius *aa* electiones, propter *b* ab iis diverſam, in ſequenti regula unam ampliùs inveniri electionem, utputa tres *b*, *ab*, & *aab*. Ac deinde in hanc rurſum ſequenti, propter *c* à præcedentibus iterum diverſam, unam ampliùs quàm duarum ſimul præcedentium, videlicet ſex *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Ita ut in toto ſint 11 electiones, addendo nempe numeros 2, 3, & 6. Quod idem in aliis ſimilibus electionibus colligendis obſervare licebit.

Idem de partibus aliquotis eſt intelligendum. Si enim quantitatis a^2bc partes aliquotæ quærantur, & in locum *aabc* ſumatur tantùm unitas: erunt & ipſius a_2bc undecim partes: nimirum *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & 1; & 12 diviſores, qui ſunt 1, *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*.

Similiter ſi fuerint quinque res, deſignatæ per *a*, *a*, *a*, *b*, & *b*, ut inveniantur electiones omnes, juxta quas aliter atque aliter ſunt ſumendæ, multiplico, ut ante, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *aa* rurſus per *a*, fit *aaa*. Deinde *a*, *aa*, & *aaa* per *b*, fiuntque *ab*, *aab*, & *aaab*. Ac denique *b*, *ab*, *aab*, & *aaab* per *b*, fiuntque *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Omnino ut hîc infra conſpicere licet. Eruntque electiones quæſitæ *a*, *aa*, *aaa*, *b*, *ab*, *aab*, *aaab*, *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*.

a

a. *aa*

a. *aaa*

b. *ab*. *aab*. *aaab*.

b. *bb*. *abb*. *aabb*. *aaabb*.

Ubi rurſus poſt 3 ipſius *aaa* electiones in ſequenti regula, propter *b* ab iis diverſam, reperiuntur quatuor *b*, *ab*, *aab*, & *aaab*, hoc eſt, una ampliùs quàm trium ipſius *aaa*, ſive trium præcedentium regularum; at verò propter *b* cum præcedenti eandem idem quoque electionum numerus qui hujus præcedentis, nimirum quatuor *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Adeò ut antecedens cujuſque regulæ litera, quæ ab antecedenti proximè præcedentis non differt, eundem quoque ſemper electionum atque illius regulæ numerum inferat; at verò cùm ab illa diverſa eſt, tum unâ ſemper plures electiones ſuppeditet, quàm antecedentium ſimul regularum. Id quod in genere tam ad electionum quàm

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quàm partium aliquotarum & diviſorum numerum inveniendum compendioſiſſimum eſt remedium. Sive enim ipſarum *a*, *a*, *a*, *b*, & *b* electionum numerum, ſive quantitatis $a^3 b^2$, ex iis compoſitæ, partium aliquotarum & diviſorum multitudinem invenire velimus: oportebit tantùm, propter 3 ipſius a^3 dimenſiones ſive *a* ter poſitam, notare 3 electiones aut partes; ac deinde propter *b* bis poſitam, (quæ ſemel poſita unam præcedentibus tribus ſuperaddit quatuorque tradit) notare 8 electiones aut partes. ita ut in toto ſint 11 electiones aut partes; at verò 12 diviſores.

Sic & ſi 6 res deſignatæ fuerint per *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, & *c*, & numerus electionum, quæ ab ipſis fieri poſſunt, ſit inveſtigandus; ſive etiam quantitas $a^3 b^2 c$ data ſit, cujus tam partium quàm diviſorum multitudo quæratur: noto, propter a^3 ſeu *a* ter poſitam, 3 electiones aut partes. Deinde propter b^2 ſeu *b* bis poſitam (quæ ſemel poſita unam præcedentibus tribus ſuper addit & quatuor tradit) noto 8 electiones aut partes. Ac denique propter *c*, quæ unam rurſus præcedentibus 3 & 8 ſimul ſuper addit, noto 12 electiones aut partes. Unde colligendo in unam ſummam 3, 8, & 12, quæſitus electionum aut partium numerus fit 23, & diviſorum 24.

Haud ſecus ſi datæ fuerint *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *b*, *c*, *c*, *c*, *d*, & *d*, aut quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$, ex iiſdem compoſita, ad inveniendum tam electionum illarum quàm hujus partium numerum, noto propter a^5 ſeu *a* quinquies poſitam, 5 electiones aut partes. Deinde propter b^4 ſeu *b* quater poſitam (quæ ſemel poſita unam præcedentibus 5 ſuper addit & 6 tradit) noto 24 electiones aut partes. Porrò propter c^3 ſeu *c* ter poſitam (quæ ſemel poſita unam rurſus præcedentibus 5 & 24 ſimul ſuper addit & 30 tradit) noto 90 electiones aut partes. Ac denique propter d^2 ſeu *d* bis poſitam (quæ ſemel poſita rurſus unam præcedentibus 5, 24, & 90 ſimul ſuper addit & 120 tradit) noto 240 electiones aut partes. Unde addendo ſimul 5, 24, 90, & 240, concludo 359 quæſitam eſſe electionum aut partium multitudinem; at verò diviſorum numerum eſſe 360.

Simili modo invenire licet dati numeri partium & diviſorum multitudinem. Ut ad inveniendum quot partes & diviſores habeat 15876000:

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

1 1	1 1 1	1 1 1	1 1	1 1 1	1 1 1 2 1	1 1	
15876000	7938000	3969000	1984500	992250	496125	165375	
2	2	2	2	2	3	3	

2 4 2 1	1	1					
55125	18375	6125	1225	245	49	7	1
3	3	5	5	5	7	7	

Quæro primùm ex quibus primis numeris 15876000 producatur, dividendo eum in finem 15876000 per primos numeros 2, 3, 5, *&c.* donec perveniatur ad unitatem. Perinde ut hîc ſupra factum vides. Hinc cum reperiam ipſum multiplicatione produci 14 primorum numerorum 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. 3. 3. 5. 5. 5. 7. 7, eundemq́ue notari poſſe, hoc modo: 2^5, 3^4, 5^3, 7^2, ita ut cum $a^5\,b^4\,c^3\,d^2$ præcedentis exempli omnino conſentiat ſive utriuſque eadem ratio ſit, patet, ipſius pariter fore 359 partes aliquotas, & 360 diviſores. Atque ita de aliis.

SECTIO II.

Ratio inveniendi multitudinem rerum, earumq́ue inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt.

AD inveniendam multitudinem rerum, earumq́ue inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt, ſciendum eſt, illam non ſemper omnino determinatam eſſe ſed ſæpe numero variam inveniri, prout datæ vices ſeſe obtulerint. Quibus autem caſibus id contingat, ac quo pacto illa inveſtiganda ſit, ſequentia exempla edocebunt.

1mum Exemplum.

Etenim ad inveniendum, quot res ſumendæ ſint, ac quænam inter eas habitudo exiſtat, quæ 15 diverſis modis eligi poſſint: addo ad 15 unitatem ſeu 1, & fit 16. Hic igitur numerus ſi reperiatur aliquis eorum, qui ab unitate in ratione dupla aſcendunt, hoc eſt, ut ipſe continuò per 2 dividi poſſit, donec ad unitatem perveniatur: indicabit diviſionum numerus, ſeu is qui oſtendit quotus poſt unitatem hic 16 ejuſdem Progreſſionis terminus obtingat, quot res diverſæ accipi debeant, quæ 15 modis aliter atque aliter eligi poſſint. Ac proinde cum 16 dictæ progreſſionis quartus terminus exiſtat ſive quatuor ejuſ-

16	8	4	2	1
2	2	2	2	

ejuſmodi diviſiones fieri queant: idcirco & quatuor diverſas res aſſumi debere, utputa *a*, *b*, *c*, & *d*, quæ 15 diverſis modis eligantur. Quemadmodum ex præcedenti ſectione facilè eſt colligere.

Jam verò ut hinc porrò conſtet, num & plures paucioreſvé res aſſumi queant, quę ſimiliter 15 diverſis modis eligantur: quæro utrum 16 per alios adhuc numeros dividi poſſit. Unde cum præter 2 etiam per 4, 8, & per ſe ipſum diviſibilis ſit, concludo ultra inventam multitudinem alias inſuper rerum multitudines reperiri, quæ idem præſtent.

Ad quas obtinendas ut & ad earum habitudinem indagandam, divido 16 per 4, & fit 4. Jam autem, dividendo ut ſupra 4 per 2, fit 2, ac rurſus 2 per 2, fit 1. Hinc ſi à diviſoribus 4, 2, & 2 unitas auferatur, & reliqua 3, 1, & 1 ſimul addantur: oſtendet ſumma 5, quinque item res, quarum tres inter ſe æquales ſint, aſſumi poſſe, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, & *c*, quæ rurſum 15 diverſis modis eligi valeant.

Eodem modo, cum 16 diviſo per 4, fiat 4, ac deinde 4 per 4, fiat 1; atque à diviſoribus 4 & 4 unitate ſublatâ reliqua 3 & 3 ſimul addita faciant 6: poterunt ſimiliter 6 res aſſumi, quarum tres unæ inter ſe æquales ſunt, ſicut & tres aliæ, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, & *b*, quæ 15 iterum diverſis modis eligentur.

Sic &, quia dividendo 16 per 8, fit 2, & 2 per 2, fit 1: Hinc à diviſoribus 8 & 2 ſublatâ unitate, ſi reliqua 7 & 1 ſimul addantur, indicabit 8 ſumma, poſſe quoque octo res, quarum 7 inter ſe æquales ſint, aſſumi, utputa *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, & *b*, quas denuo 15 diverſis eligere licet modis.

Denique cum 16 per 16 dividendo fiat 1, & à 16 auferendo 1 relinquatur 15, fit ut ſumendo res 15 inter ſe æquales, earum quoque electiones omnes 15 numero exiſtant.

Hinc cum 16 aliis quàm hiſce 5 modis dividi non eveniat, colligere licet, quæſitam rerum multitudinem quintuplicem eſſe; earundemque habitudines, ſeu quales ipſæ res aſſumendæ ſint, ex jam dictis conſtare. Quæ omnia, dum ex præcedenti ſectione manant, diligenter inquirenti, perſpecta evadent.

Deinde ad inveniendam multitudinem rerum, quæ, verbi gratiâ, 23 diverſis modis eligi queant, ut & ad indagandum quales illæ aſſumendæ ſint, addo ad 23 unitatem ſeu 1, & fit 24. Jam cum hic numerus non aliquis eorum exiſtat, qui ab unitate in ratione dupla aſcendunt, ſive ipſe continuò per 2 uſque ad unitatem diviſibilis ſit: argu- *2dum Exemplum.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

mentum eſt, multitudinem inveniendam non ex rebus, quæ omnes diverſæ aut inæquales ſint, conſtare poſſe. Quocirca ut habitudo earum innoteſcat, ſimulque palàm fiat num multitudo illa varia inveniri poſſit: quæro utrum 24 per diverſos numeros dividi queat,

1.

24	8	4	2	1
3	2	2	2	

2.

24	6	2	1
4	3	2	

3.

24	4	2	1
6	2	2	

4.

24	4	1
6	4	

5.

24	3	1
8	3	

6.

24	2	1
12	2	

7.

24	1
24	

priuſquam ad unitatem perveniatur, hoc eſt, utrum ex diverſis producatur numeris. Unde cum 24 ſeptuplicem admittere diviſionem deprehendam, ſeu eum 7 diverſis modis, hîc oblatis, ab aliis gigni: concludo quæſitam rerum multitudinem ſeptuplicem quoque inventum iri. Ad quas obtinendas, dum à diviſoribus ſigillatim auferendo unitatem, reliqua componunt 7 hoſce numeros 5, 6, 7, 8, 9, 12, & 23, qui ſinguli quæſitam rerum multitudinem demonſtrant: patet, res quæſitas (23 diverſis electionibus obnoxias) 7 ſequentibus modis eſſe ſumendas, nimirum, prout deſignantur

per *a, a, b, c, d.*
vel per *a, a, a, b, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a.*

3tium *Exemplum.* Cæterùm ut inveniatur multitudo rerum, quæ 42 diverſas electiones ſubeant, ſimulque indagetur quales illæ accipiendæ ſint: addo, ut ſupra, ad 42 unitatem ſeu 1, & fit 43. Jam cum hic numerus primus exiſtat, ſeu per nullum niſi per ſe ipſum & unitatem dividi poſſit, con-

concludo multitudinem quæſitam fore unicam: utpote ſumendo 42 res (prout datus numerus indicat), quæ omnes inter ſe æquales ſint. Atque ita de aliis.

SECTIO III.

Ratio inveniendi quantitates, datam habentes partium aliquotarum aut diviſorum multitudinem.

AD inveniendas quantitates, quæ datam habeant partium aliquotarum multitudinem: oportet per præcedentem ſectionem invenire quot qualeſque quantitates ceu res aſſumi debeant, quæ toties diverſimodè eligi poſſint, quoties indicat data partium multitudo. Eſt enim quantitas ex iis genita, illa quæ quæritur.

Unde ad inveniendas quantitates, datam diviſorum multitudinem habentes, nil aliud faciendum eſt, quàm ab eadem multitudine unitatem auferendo quærere quantitatem, ſicut jam dictum eſt, quæ tot partes habeat, quot reliquum continet unitates. Sed hæc exemplis clariora fient.

Ut ad inveniendam quantitatem, quæ 15 habeat partes aliquotas: quæro per præcedentem ſectionem quot quantitates accipiendæ ſint, qualiſque inter ipſas habitudo exiſtat, quæ 15 diverſis modis eligi queant. Jam cum multitudo earundem varia reperiatur, illæque quintupliciter ſumendæ occurrant, nimirum prout deſignantur per a, b, c, d, vel per a, a, a, b, c, vel per a, a, a, b, b, b, vel per a, a, a, a, a, a, a, b, vel per $a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a$: idcirco ex hiſce componendo quantitates $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, deſignabit quælibet ipſarum quantitatem, 15 partes aliquotas habentem, qualis requirebatur. *1mum Exemplum.*

Hinc ad inveniendam quantitatem, 16 diviſores habentem, quoniam quantitas quindecim partes habens ſedecim habet diviſores (ſiquidem diviſorum numerus ſemper unitate partium aut electionum numerum, ſicut 1mâ ſectione dictum fuit, excedit): fit ut inde quælibet inventarum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, ſedecim quoque diviſores admittat.

Haud ſecus, ſi invenire velimus quantitatem, 23 partes aliquotas habentem; quæro per præced. ſect. quot qualeſque quantitates ceu *2dum Exemplum.*

res

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

res aſſumi debeant, quæ 23 diverſis modis eligi poſſint. Unde cum ipſarum multitudo ſeptuplex reperiatur, atque earum inter ſe habitudinem deſignari per *a, a, b, c, d*, vel per *a, a, a, b, b, c*, vel per *a, a, a, a, a, b, c*, vel per *a, a, a, a, a, b, b, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, b, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a*: ſit ut ex iis componendo quantitates a^2bcd, a^3bc, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, a^{23}, quælibet harum habeat 23 partes, & 24 diviſores.

3tium Exemplum. Sic & ad inveniendam quantitatem, habentem 42 partes aliquotas: quæro per præc. ſect. quot quantitates aſſumendæ ſint, qualiſque ipſarum habitudo exiſtat, quæ 42 diverſis modis eligi valeant. Cum autem jam illarum multitudo non niſi unica reperiatur, atque ad hoc 42 quantitates ſumendas eſſe, quæ omnes inter ſe æquales ſint: idcirco quantitas ex iiſdem conflata deſignabitur per a^{42}. Unde ſequitur, ad deſignandam quantitatem, 43 diviſores habentem, ſcribendum pariter fore a^{42}. Atque ita de aliis. Quorum omnium veritas ex 1ma ſectione perſpicua eſt.

Exercitationis causâ atque majoris illuſtrationis ergo eorum, quæ oſtenſa ſunt, ſubjungimus hîc quantitates, datã partium multitudinem habentes ab 1 uſque ad 100, modis omnibus quibus deſignari poſſunt.

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
a	habet	1	
a^2	habet	2	
ab, a^3	habent ſingulæ	3	
a^4	&c.	4	
a^2b, a^5		5	
a^6		6	
a^3b, abc, a^7		7	
a^2b^2, a^8		8	Partes
a^4b, a^9		9	aliquotas
a^{10}		10	
$a^2bc, a^3b^2, a^5b, a^{11}$		11	
a^{12}		12	
a^6b, a^{13}		13	
a^4b^2, a^{14}		14	
$a^3bc, abcd, a^3b^3, a^7b, a^{15}$		15	
a^{16}		16	

a^2b^2c,

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.
$a^2b^2c, a^5b^2, a^8b, a^{17}$	habent ſingulæ	17
a^{18}	habet	18
$a^4bc, a^4b^3, a^9b, a^{19}$	&c.	19
a^6b^2, a^{20}		20
$a^{10}b, a^{21}$		21
a^{22}		22
$a^3b^2c, a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, a^{11}b, a^{23}$		23
a^4b^4, a^{24}		24
$a^{12}b, a^{25}$		25
$a^2b^2c^2, a^8b^2, a^{26}$		26
$a^6bc, a^6b^3, a^{13}b, a^{27}$		27
a^{28}		28
$a^4b^2c, a^5b^4, a^9b^2, a^{14}b, a^{29}$		29
a^{30}		30
$a^3bcd, a^3b^3c, a^7bc, abcde, a^7b^3, a^{15}b, a^{31}$		31
$a^{10}b^2, a^{32}$		32
$a^{16}b, a^{33}$		33
a^6b^4, a^{34}		34
$a^2b^2cd, a^5b^2c, a^3b^2c^2, a^8bc, a^8b^3, a^5b^5, a^{11}b^2, a^{17}b, a^{35}$		35
a^{36}		36 Partes aliquotas
$a^{18}b, a^{37}$		37
$a^{12}b^2, a^{38}$		38
$a^4bcd, a^4b^3c, a^9bc, a^7b^4, a^9b^3, a^{19}b, a^{39}$		39
a^{40}		40
$a^6b^2c, a^6b^5, a^{13}b^2, a^{20}b, a^{41}$		41
a^{42}		42
$a^{10}bc, a^{10}b^3, a^{21}b, a^{43}$		43
$a^4b^2c^2, a^8b^4, a^{14}b^2, a^{44}$		44
$a^{22}b, a^{45}$		45
a^{46}		46
$a^3b^2cd, a^5bcd, a^5b^3c, a^2bcde, a^3b^3c^2, a^7b^2c, a^{11}bc, a^7b^5, a^{11}b^3, a^{15}b^2, a^{23}b, a^{47}$		47
a^6b^6, a^{48}		48
$a^4b^4c, a^9b^4, a^{24}b, a^{49}$		49
$a^{16}b^2, a^{50}$		50
$a^{12}bc, a^{12}b^3, a^{25}b, a^{51}$		51
a^{52}		52
$a^2b^2c^2d, a^5b^2c^2, a^8b^2c, a^8b^5, a^{17}b^2, a^{26}b, a^{53}$		53
$a^{10}b^4, a^{54}$		54
$a^6bcd, a^6b^3c, a^7b^6, a^{13}bc, a^{13}b^3, a^{27}b, a^{55}$		55

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
$a^{18}b^{2}, a^{56}$	habent ſingulæ	56	
$a^{28}b, a^{57}$	habent ſingulæ	57	
a^{58}	&c.	58	
$a^{4}b^{2}cd, a^{4}b^{3}c^{2}, a^{5}b^{4}c, a^{9}b^{2}c, a^{9}b^{5}, a^{11}b^{4}, a^{14}bc, a^{14}b^{3}, a^{19}b^{2}, a^{29}b, a^{59}$		59	
a^{60}		60	
$a^{30}b, a^{61}$		61	
$a^{6}b^{2}c^{2}, a^{8}b^{6}, a^{20}b^{2}, a^{62}$		62	
$a^{3}b^{3}cd, a^{3}bcde, a^{7}bcd, a^{7}b^{3}c, a^{3}b^{3}c^{3}, abcdef, a^{7}b^{7}, a^{15}bc, a^{15}b^{3}, a^{31}b, a^{63}$		63	
$a^{12}b^{4}, a^{64}$		64	
$a^{10}b^{2}c, a^{10}b^{5}, a^{21}b^{2}, a^{32}b, a^{65}$		65	
a^{66}		66	
$a^{16}bc, a^{14}b^{3}, a^{33}b, a^{67}$		67	
$a^{22}b^{2}, a^{68}$		68	
$a^{6}b^{4}c, a^{9}b^{6}, a^{13}b^{4}, a^{34}b, a^{69}$		69	
a^{70}		70	
$a^{5}b^{2}cd, a^{3}b^{2}c^{2}d, a^{2}b^{2}cde, a^{5}b^{3}c^{2}, a^{8}bcd, a^{7}b^{2}c^{2}, a^{8}b^{3}c, a^{5}b^{5}c, a^{11}b^{2}c, a^{11}b^{5}, a^{8}b^{7}, a^{17}bc, a^{17}b^{3}, a^{23}b^{2}, a^{35}b, a^{71}$		71	
a^{72}		72	Partes aliquotas
$a^{36}b, a^{73}$		73	
$a^{4}b^{4}c^{2}, a^{14}b^{4}, a^{24}b^{2}, a^{74}$		74	
$a^{18}bc, a^{18}b^{3}, a^{37}b, a^{75}$		75	
$a^{10}b^{6}, a^{76}$		76	
$a^{12}b^{2}c, a^{12}b^{5}, a^{25}b^{2}, a^{38}b, a^{77}$		77	
a^{78}		78	
$a^{4}b^{3}cd, a^{4}bcde, a^{9}bcd, a^{4}b^{3}c^{3}, a^{7}b^{4}c, a^{9}b^{3}c, a^{9}b^{7}, a^{15}b^{4}, a^{19}bc, a^{19}b^{3}, a^{39}b, a^{79}$		79	
$a^{2}b^{2}c^{2}d^{2}, a^{8}b^{2}c^{2}, a^{8}b^{8}, a^{26}b^{2}, a^{80}$		80	
$a^{40}b, a^{81}$		81	
a^{8}		82	
$a^{6}b^{2}cd, a^{6}b^{3}c^{2}, a^{6}b^{5}c, a^{13}b^{2}c, a^{11}b^{6}, a^{13}b^{5}, a^{20}bc, a^{20}b^{3}, a^{27}b^{2}, a^{41}b, a^{83}$		83	
$a^{16}b^{4}, a^{84}$		84	
$a^{42}b, a^{85}$		85	
$a^{28}b^{2}, a^{86}$		86	
$a^{10}bcd, a^{10}b^{3}c, a^{10}b^{7}, a^{21}bc, a^{21}b^{3}, a^{43}b, a^{87}$		87	
a^{88}		88	
$a^{4}b^{2}c^{2}d, a^{5}b^{4}c^{2}, a^{8}b^{4}c, a^{9}b^{2}c^{2}, a^{14}b^{2}c, a^{9}b^{8}, a^{14}b^{5}, a^{17}b^{4}, a^{29}b^{2}, a^{44}b, a^{89}$		89	

$a^{12}b^{6},$

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
$a^{12}b^6$, a^{90}	habent ſingulæ	90	Partes aliquotas
$a^{22}bc$, $a^{22}b^3$, $a^{45}b$, a^{91}	habent ſingulæ	91	
$a^{30}b^2$, a^{92}	&c.	92	
$a^{46}b$, a^{93}		93	
$a^{18}b^4$, a^{94}		94	
a^3b^2cde, a^5b^3cd, a^5bcde, $a^3b^3c^2d$, a^7b^2cd, a^2bcdef, $a^7b^3c^2$, a^5b^3c, a^7b^5c, $a^{11}bcd$, $a^{11}b^3c$, $a^{15}b^2c$, $a^{11}b^7$, $a^{15}b^5$, $a^{23}bc$, $a^{23}b^3$, $a^{31}b^2$, $a^{47}b$, a^{95}		95	
a^{96}		96	
a^6b^6c, $a^{13}b^6$, $a^{48}b$, a^{97}		97	
$a^{10}b^2c^2$, $a^{10}b^8$, $a^{32}b^2$, a^{98}		98	
a^4b^4cd, $a^4b^4c^3$, a^9b^4c, a^9b^9, $a^{24}bc$, $a^{19}b^4$, $a^{24}b^3$, $a^{49}b$, a^{99}		99	
a^{100}.		100.	

SECTIO IV.

Ratio inveniendi minimos numeros, datam habentes partium aliquotarum aut diviſorum multitudinem.

INventis per proximè præcedentem Sectionem, quantitatibus omnibus, datam habentibus partium aut diviſorum multitudinem, oportet, aſſumendo pro quantitatibus, ex quibus producuntur, minimos primos numeros, & ex iis aſſignando omnium minimos quantitatibus, quæ plurimas habent dimenſiones, quærere quiſnam ex his pari modo productis omnium exiſtat minimus. Eſt enim hic eorum, qui ipſius datæ multitudinis inveniri poſſunt, minimus, qui quæritur.

1mum *Exemplum.*

Ut ad inveniendum minimum numerum, 15 partes aliquotas habentem, quoniam quantitates $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15} ſingulæ habent 15 partes, & tribuendo ipſis a, b, c, & d minimos primos numeros 2, 3, 5, 7, horum multiplicatione pro $abcd$ invenitur 210; at verò ductu ipſarum a, a, a, b, c pro a^3bc invenitur 120; & ductu ipſarum a, a, a, b, b, b, pro a^3b^3 invenitur 216; & ductu ipſarum a, a, a, a, a, a, a, b pro a^7b invenitur 384; ac denique ductu ipſarum a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, pro a^{15} invenitur 32768: erit 120 eorum, qui inveniri poſſunt, ac 15 partes aliquotas habent, minimus quæſitus.

Ita & ſi quæratur minimus numerus, habens 16 diviſores, quo-

 niam

niam ſimiliter quantitates 16 diviſores habentes ſunt *abcd*, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}; ſumendoque $a \propto 2$, $b \propto 3$, $c \propto 5$, & $d \propto 7$, pro iis, ut ſupra, reperiuntur numeri 210, 120, 216, 384, & 32768, inter quos 120 eſt minimus: erit pariter 120 eorum, qui 16 diviſores habent, omnium minimus.

2dum Exemplum. Eodem modo, ut inveniatur minimus numerus, habens 23 partes aliquotas, & 24 diviſores, quoniam a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23} ſingulæ habent 23 partes & 24 diviſores, ac tribuendo ipſis *a*, *b*, *c*, *d* minimos primos numeros 2, 3, 5, 7 pro a^2bcd invenitur 420, pro a^3b^2c 360, pro a^5bc 480, pro a^5b^3 864, pro a^7b^2 1152, pro $a^{11}b$ 6144, & pro a^{23} 8388608: erit 360 eorum qui 23 partes habent & 24 diviſores omnium minimus.

Notandum autem eſt in hoc & præcedenti exemplo, cum diverſæ quantitates reperiantur, eandem partium aut diviſorum multitudinem admittentes, quòd iis ſingulis tanquam diverſis modis uti poſſimus ad infinitos numeros inveniendos, qui datam illam partium aut diviſorum multitudinem habeant.

Ita ſi infinitos invenire velimus numeros, qui ſinguli habeant 15 partes & 16 diviſores, uti poſſumus unaquâque quantitatum *a b c d*, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}, tribuendo tantùm quantitatibus *a*, *b*, *c*, & *d*, ex quibus producuntur, numeros primos, ut libet, eoſque aliter atque aliter ſumendo, vel etiam pro iis accipiendo ſemper alios atque alios primos. Sic enim tribuendo *a* 2, *b* 3, *c* 5, invenietur pro a^3bc 120. At tribuendo *a* 3, *b* 2, *c* 5, invenietur pro a^3bc 270. Et tribuendo *a* 5, *b* 2, *c* 3, invenietur pro a^3bc 750. Vel etiam aſſumendo $a \propto 7$, $b \propto 11$, $c \propto 13$, fiet $a^3bc \propto 49049$. Aut ſumendo $a \propto 17$, $b \propto 19$, & $c \propto 23$, fiet $a^3bc \propto 2146981$. Atque ita porrò in infinitum. Idem intellige de qualibet reliquarum quantitatum *abcd*, a^3b^3, a^7b, a^{15}; ut & de ſingulis a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23}, ad infinitos numeros inveniendos, qui 23 habent partes, & 24 diviſores.

Ad hæc notatu dignum, quòd, licèt indifferenter per quamlibet harum quantitatum, æquè multas partes aut diviſores habentium, infiniti numeri reperiantur ejuſdem multitudinis, nihilominus tamen non ſemper per unamquamque ex illis abſque diſcrimine minimus numerus inveniri poſſit, qui totidem partes aut diviſores habeat. Nam tametſi, & ante, quâlibet uti poſſumus quantitatum *abcd*, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, & per eas ſingulas tanquam per diverſos modos invenire infinitos numeros, habentes 15 partes & 16 diviſores; tamen, cum

ad

ad minimos obtinendos (tribuendo quantitatibus *a*, *b*, *c*, *d* minimos primos 2, 3, 5, 7) ipſarum beneficio nulli reperiantur minores quàm 210, 120, 216, 384, 32768, patet quantitatem a^3bc eſſe illam ſolam, per quam omnium reperire licet minimum 120.

Sic &, cùm per a^3b^2c inveniatur 360, atque hic numerus omnibus illis, qui per a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, a^{11}, a^{23} reperiri poſſunt, minor ſit: erit quantitas a^3b^2c illa, quæ ad minimum numerum inveniendum, habentem 23 partes & 24 diviſores, tantùm inſervit.

Adeò ut hinc conſtet, tunc demum datæ multitudinis partium aut diviſorum minimum obtineri numerum, cùm juxta omnes modos, qui extant, inventis minimis numeris eum inter hos eſſe minimum apparet.

Porrò ut in præcedenti tabula quantitates, quæ minimis numeris datæ multitudinis partium aut diviſorum inveniendis inſerviunt, ab aliis facilè dignoſcantur: conceſſimus illis priorem cujuſque regulæ locum, reliquis conſequenter poſteriores tribuentes, prout continuò majores minimos numeros ſuppeditant, indeque aliis poſthabendæ videntur.

Denique ad inveniendum minimum numerum, habentem 42 partes, & 43 diviſores, quoniam quantitas hanc habens partium & diviſorum multitudinem unico tantùm modo deſignari poteſt, utpote ſcribendo a^{42}: fit ut, ſi pro *a* minimus ſumatur primus numerus 2, iſque quadrageſies & bis ponatur, ac deinde multiplicetur, productus numerus 4398046511104 minimus ſit quæſitus, cum præter eum nullus alius minimus exiſtat. Atque ita de aliis. *3^tium Exemplum.*

His ſubjungere viſum fuit ſequentem tabulam minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & diviſorum ab 1 uſque ad 100.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Syllabus 100 *minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & diviſorum, ab* 1 *uſque ad* 100.

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.	Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.	Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.
2 habet	1 part.aliquot.&	2 diviſores.
4	2	3
6	3	4
16	4	5
12	5	6
64	6	7
24	7	8
36	8	9
48	9	10
1024	10	11
60	11	12
4096	12	13
192	13	14
144	14	15
120	15	16
65536	16	17
180	17	18
262144	18	19
240	19	20
576	20	21
3072	21	22
4194304	22	23
360	23	24
1296	24	25
12288	25	26
900	26	27
960	27	28
268435456	28	29
720	29	30
1073741824	30	31
840	31	32

9216

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.		Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.	Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.
9216	habet	32 part.aliquot.&	33 diviſo-
196608		33	34 res.
5184		34	35
1260		35	36
68719476736		36	37
786432		37	38
36864		38	39
1680		39	40
1099511627776		40	41
2880		41	42
4398046511104		42	43
15360		43	44
3600		44	45
12582912		45	46
70368744177664		46	47
2520		47	48
46656		48	49
6480		49	50
589824		50	51
61440		51	52
4503599627370496		52	53
6300		53	54
82944		54	55
6720		55	56
2359296		56	57
805306368		57	58
288230376151711744		58	59
5040		59	60
1152921504606846976		60	61
3221225472		61	62
14400		62	63
7560		63	64
331776		64	65
46080		65	66
73786976294838206464		66	67

983040

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.	Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.	Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.
983040 habet	67 part.aliquot.&	68 diviſo-
37748736	68	69 res.
25920	69	70
1180591620717411303424	70	71
10080	71	72
4722366482869645213696	72	73
206158430208	73	74
32400	74	75
3932160	75	76
746496	76	77
184320	77	78
302231454903657293676544	78	79
15120	79	80
44100	80	81
3298534883328	81	82
4835703278458516698824704	82	83
20160	83	84
5308416	84	85
13194139533312	85	86
2415919104	86	87
107520	87	88
309485009821345068724781056	88	89
25200	89	90
2985984	90	91
62914560	91	92
9663676416	92	93
211106232532992	93	94
21233664	94	95
27720	95	96
79228162514264337593543950336	96	97
233280	97	98
230400	98	99
45360	99	100
1267650600228229401496703205376	100	101.

Se-

SECTIO V.

Syllabus numerorum primorum, qui continentur in decem prioribus chiliadibus.

CUM ad ſolutionem Quæſtionum de partibus aliquotis & diviſoribus primos numeros in promptu habere valde opportunum ſit, atque his illarum praxis omnino facilis reddatur: haud inconveniens fore duximus, ſi, in ipſis hîc, tanquam in abaco, exponendis, prout eos ab unitate uſque ad 10.000 ſummâ accuratione inveſtigavimus, Sectionem hanc inſumeremus. Quod eò, magis conſultum judicavimus, quò ipſorum uſum latiùs per haſce diſciplinas ſe diffundere deprehendimus. Cum enim operatio quælibet, quæ per numeros inſtituenda eſt, per primos numeros tanquam per omnium minimos ſeu ſimpliciſſimos procedat, ipſique ulteriùs ad Quæſtiones, quæ per numeros enodari debent, diſſolvendas, præſertim deſerviant: nullus (ut confido) futurus eſt, qui illorum uſum hac in re non ſit agniturus. Quippe conſtat, ad Quæſtionem aliquam per numeros illuſtrandam, ſi ipſi ad id abſque delectu aſſumantur, eandem interdum, licèt quæſtio aliàs per ſe facilis ſit, tam vaſtis ac tædioſis numeris involvi, ut à Quæſtionis inſpectione tyrones è veſtigio deterreantur. His adde, quòd hi numeri ad fractiones abbreviandas non parùm quoque ſubſidii conferant; & iidem in dividendis æquationibus, earumque inveſtigandis radicibus, ut & in componendis Logarithmis, ac in omni fermè calculo uſum ſuum præbeant.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Numeri primi
1. Chiliadis.

	2		151		353		577		811
	3		157	16.	359		587		821
	5	21.	163		367		593		823
	7		167		373		599		827
	11		173		379		601		829
	13		179		383		607		839
	17		181		389		613		853
	19		191		397		617	15.	857
	23		193		401		619		859
	29		197		409		631		863
	31		199		419		641		877
	37		211		421	16.	643		881
	41		223		431		647		883
	43		227		433		653		887
25.	47		229		439		659		907
	53		233		443		661		911
	59		239		449		673		919
	61		241	17.	457		677		929
	67		251		461		683		937
	71	16.	257		463		691		941
	73		263		467		701		947
	79		269		479		709	14.	953
	83		271		487		719		967
	89		277		491		727		971
	97		281		499		733		977
	101		283		503		739		983
	103		293		509		743		991
	107		307		521	14.	751		997
	109		311		523		757		
	113		313		541		761		
	127		317		547		769		
	131		331		557		773		
	137		337	14.	563		787		
	139		347		569		797		
	149		349		571				

Nu-

Numeri primi 2. Chiliadis.

	1009		1213		1433	15.	1619	12.	1867
	1013		1217		1439		1621		1871
	1019		1223		1447		1627		1873
	1021		1229		1451		1637		1877
	1031		1231	17.	1453		1657		1879
	1033	15.	1237		1459		1663		1889
	1039		1249		1471		1667		1901
	1049		1259		1481		1669		1907
16.	1051		1277		1483		1693		1913
	1061		1279		1487		1697		1931
	1063		1283		1489		1699		1933
	1069		1289		1493		1709		1949
	1087		1291		1499		1721	13.	1951
	1091		1297		1511		1723		1973
	1093		1301		1523		1733		1979
	1097		1303		1531		1741		1987
	1103		1307		1543	12.	1747		1993
	1109		1319		1549		1753		1997
	1117		1321	12.	1553		1759		1999
	1123	11.	1327		1559		1777		
	1129		1361		1567		1783		
	1151		1367		1571		1787		
12.	1153		1373		1579		1789		
	1163		1381		1583		1801		
	1171		1399		1597		1811		
	1181		1409		1601		1823		
	1187		1423		1607		1831		
	1193		1427		1609		1847		
	1201		1429		1613		1861		

Numeri primi 3. Chiliadis.

2003
2011
2017
2027
2029
2039
2053
14. 2063
2069
2081
2083
2087
2089
2099
2111
2113
2129
2131
2137
10. 2141
2143
2153
2161
2179
2203
2207

2213
2221
2237
2239
2243
2251
15. 2267
2269
2273
2281
2287
2293
2297
2309
2311
2333
2339
2341
2347
15. 2351
2357
2371
2377
2381
2383
2389

2393
2399
2411
2417
2423
2437
2441
10. 2447
2459
2467
2473
2477
2503
2521
2531
2539
2543
11. 2549
2551
2557
2579
2591
2593
2609
2617
2621

2633
2647
2657
2659
2663
2671
15. 2677
2683
2687
2689
2693
2699
2707
2711
2713
2719
2729
2731
14. 2741
2749
2753
2767
2777
2789
2791
2797

2801
2803
2819
2833
2837
2843
12. 2851
2857
2861
2879
2887
2897
2903
2909
2917
2927
2939
11. 2953
2957
2963
2969
2971
2999

Nu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Numeri primi
4. Chiliadis.

	3001		3221		3433		3623		3847
	3011		3229		3449		3631		3851
	3019		3251		3457		3637	11.	3853
	3023	11.	3253	11.	3461	13.	3643		3863
	3037		3257		3463		3659		3877
	3041		3259		3467		3671		3881
12.	3049		3271		3469		3673		3889
	3061		3299		3491		3677		3907
	3067		3301		3499		3691		3911
	3079		3307		3511		3697		3917
	3083		3313		3517		3701		3919
	3089		3319		3527		3709		3923
	3109		3323		3529		3719		3929
	3119		3329		3533		3727	11.	3931
	3121		3331		3539		3733		3943
	3137		3343		3541		3739		3947
	3163	15.	3347	14.	3547	12.	3761		3967
10.	3167		3359		3557		3767		3989
	3169		3361		3559		3769		
	3181		3371		3571		3779		
	3187		3373		3581		3793		
	3191		3389		3583		3797		
	3203		3391		3593		3803		
	3209		3407		3607		3821		
	3217		3413		3613		3823		
					3617		3833		

Numeri primi
5. Chiliadis.

	4001		4211		4421		4639	8.	4861
	4003		4217		4423		4643		4871
	4007		4219	11.	4441	12.	4649		4877
	4013		4229		4447		4651		4889
	4019	16.	4231		4451		4657		4903
	4021		4241		4457		4663		4909
	4027		4243		4463		4673		4919
15.	4049		4253		4481		4679		4931
	4051		4259		4483		4691		4933
	4057		4261		4493		4703		4937
	4073		4271		4507		4721	15.	4943
	4079		4273		4513		4723		4951
	4091		4283		4517		4729		4957
	4093		4289		4519		4733		4967
	4099		4297		4523		4751		4969
	4111		4327	12.	4547	12.	4759		4973
	4127	9.	4337		4549		4783		4987
	4129		4339		4561		4787		4993
	4133		4349		4567		4789		4999
	4139		4357		4583		4793		
9.	4153		4363		4591		4799		
	4157		4373		4597		4801		
	4159		4391		4603		4813		
	4177		4397		4621		4817		
	4201		4409		4637		4831		

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Numeri primi
6. Chiliadis.

5003
5009
5011
5021
5023
12. 5039
5051
5059
5077
5081
5087
5099

5101
5107
5113
5119
5147
11. 5153
5167
5171
5179
5189
5197

5209
5227
5231

10. 5233
5237
5261
5273
5279
5281
5297

5303
5309
5323
5333
10. 5347
5351
5381
5387
5393
5399

5407
5413
5417
5419
3431
13. 5437
5441
5443

5449
5471
5477
5479
5483

5501
5503
5507
5519
5521
13. 5527
5531
5557
5563
5569
5573
5581
5591

5623
5639
5641
5647
5651
12. 5653
5657

5659
5669
5683
5689
5693

5701
5711
5717
5737
5741
10. 5743
5749
5779
5783
5791

5801
5807
5813
5821
5827
5839
5843
16. 5849
5851
5857

5861
5867
5869
5879
5881
5897

5903
5923
5927
7. 5939
5953
5981
5987

Nu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Numeri primi
7. Chiliadis.

	6007
	6011
	6029
	6037
	6043
12.	6047
	6053
	6067
	6073
	6079
	6089
	6091
	—
	6101
	6113
	6121
	6131
	6133
11.	6143
	6151
	6163
	6173
	6197
	6199
	—
	6203
	6211
	6217
	6221
	6229
	6247
	6257
13.	6263
	6269
	6271
	6277
	6287
	6299
	—
	6301
	6311
	6317
	6323
	6329
	6337
	6343
15.	6353
	6359
	6361
	6367
	6373
	6379
	6389
	6397
	—
	6421
	6427
	6449
8.	6451
	6469
	6473
	6481
	6491
	—
	6521
	6529
	6547
	6551
	6553
11.	6563
	6569
	6571
	6577
	6581
	6599
	—
	6607
	6619
	6637
	6653
10.	6659
	6661
	6673
	6679
	6689
	6691
	—
	6701
	6703
	6709
	6719
	6733
	6737
12.	6761
	6763
	6779
	6781
	6791
	6793
	—
	6803
	6823
	6827
	6829
	6833
12.	6841
	6857
	6863
	6869
	6871
	6883
	6899
	—
	6907
	6911
	6917
	6947
	6949
	6959
13.	6961
	6967
	6971
	6977
	6983
	6991
	6997
	—

Nu-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Numeri primi
8. Chiliadis.

	7001		7229		7481		7639		7841
	7013	11.	7237		7487		7643	10.	7853
	7019		7243		7489	12.	7649		7867
	7027		7247		7499		7669		7873
9.	7039		7253		—		7673		7877
	7043		7283		7507		7681		7879
	7057		7297		7517		7687		7883
	7069		—		7523		7691		—
	7079		7307		7529		7699		7901
	—		7309		7537		—		7907
	7103		7321		7541		7703		7919
	7109		7331		7547		7717		7927
	7121	9.	7333	15.	7549		7723	10.	7933
	7127		7349		7559		7727		7937
10.	7129		7351		7561	10.	7741		7949
	7151		7369		7573		7753		7951
	7159		7393		7577		7757		7963
	7177		—		7583		7759		7993
	7187		7411		7589		7789		—
	7193		7417		7591		7793		
	—		7433		—		—		
	7207		7451		7603		7817		
	7211		7457		7607		7823		
	7213	11.	7459		7621		7829		
	7219		7477						

Numeri primi
9. Chiliadis.

8009
8011
8017
8039
8053
11. 8059
8069
8081
8087
8089
8093
——
8101
8111
8117
8123
8147
10. 8161
8167
8171
8179
8191
——
8209
8219

8221
8231
8233
8237
8243
14. 8263
8269
8273
8287
8291
8293
8297
——
8311
8317
8329
8353
9. 8363
8369
8377
8387
8389
——
8419
8423

8429
8. 8431
8443
8447
8461
8467
——
8501
8513
8521
8527
8537
12. 8539
8543
8563
8573
8581
8597
8599
——
8609
8623
8627
8629
8641

8647
13. 8663
8669
8677
8681
8689
8693
8699
——
8707
8713
8719
8731
8737
11. 8741
8747
8753
8761
8779
8783
——
8803
8807
8819
8821

8831
8837
13. 8839
8849
8861
8863
8867
8887
8893
——
8923
8929
8933
8941
9. 8951
8963
8969
8971
8999
——

Nu-

Numeri primi 10. Chiliadis.

	9001		9203		9413		9619		9811
	9007		9209		9419		9923		9871
	9011		9221		9421		9629		9829
	9013		9227		9431		9631		9833
	9029		6239		9433	13.	9643	12.	9839
11.	9041	11.	9241		9437		9649		9851
	9043		9257	15.	9439		9661		9857
	9049		9277		9461		9677		9859
	9059		9281		9463		9679		9871
	9067		9283		9467		9689		9883
	9091		9293		9473		9697		9887
	9103		9311		9479		9719		9901
	9109		9319		9491		9721		9907
	9127		9323		9497		9733		9923
	9133		9337		9511		9739		9929
	9137		9341		9521		9743	9.	9931
	9151	11.	9343		9533	11.	9749		9941
12.	9157		9349	7.	9539		9767		9949
	9161		9371		9547		9769		9967
	9173		9377		9551		9781		9973
	9181		9391		9587		9787		
	9187		9397		9601		9791		
	9199		9403		9613		9803		

SECTIO VI.

De Progreſſionibus, rectangula triangula conſtituentibus, quorum latera ſint rationalia.

QUO pacto rectangula triangula inveniri poſſint, quorum latera per numeros rationales exprimantur, oſtenditur inferiùs Sectione 24. Id autem cum in componendis variis Quæſtionibus ſive Problematîs Geometricis ad irrationalium calculum evitandum plurimùm inſerviat, aut ad ea in numeris proponenda, quibus illuſtrari & facilè ſolvi poſſint, magnum uſum habeat: non injucundum fuerit, ſi ex Stifelio expoſuero duas Progreſſiones, quas in eundem finem adfert in Commentariis ſuis ad 1^{mum} caput Algebræ Chriſtophori Rudolphi, Germanicè editæ. Quæ ſunt hujuſmodi:

$$1\tfrac{1}{3}.\ 2\tfrac{2}{5}.\ 3\tfrac{3}{7}.\ 4\tfrac{4}{9}.\ 5\tfrac{5}{11}.\ 6\tfrac{6}{13}.\ 7\tfrac{7}{15}.\ 8\tfrac{8}{17},\ \&c.$$

$$1\tfrac{7}{8}.\ 2\tfrac{11}{12}.\ 3\tfrac{15}{16}.\ 4\tfrac{19}{20}.\ 5\tfrac{23}{24}.\ 6\tfrac{27}{28}.\ 7\tfrac{31}{32}.\ 8\tfrac{35}{36},\ \&c.$$

In quarum utraque tres animadvertere licet Progreſſiones Arithmeticas diſtinctas: nimirum integrorum, tum numeratorum, ac deinde etiam denominatorum. Sunt autem omnes diviſionum quotientes duorum numerorum, quorum quadrata, cùm adduntur, etiam quadratum efficiunt.

Hinc ad eos obtinendos, ſi integer multiplicetur per denominatorem & producto addatur numerator, fiet major quæſitus. Minor verò quæſitus ſemper eſt denominator.

Sic aſſumendo quotientem $2\tfrac{11}{12}$, quoniam 2 per 12 multiplicatus & producto 24 additus 11, fit 35: poterunt 35 & 12 aſſumi pro duobus lateribus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus item 3^{tium} latus ſeu hypotenuſa ſit rationalis. Etenim additis illorum quadratis 1125 & 144, cum inde, per 47 Prop. 1^{mi} libri Elem. Euclidis, pro quadrato hypotenuſæ reperiatur quadratus numerus 1369, cujus radix eſt 37: patet hypotenuſam fore 37. Atque ita de aliis.

Porrò quoniam duabus hiſce Stifelii Progreſſionibus Simon Jacobi Coburgenſis in majori ſua Arithmetica, Germanicè conſcriptâ, ad pag. 240 ſex alias ſuperaddit, ſeque mille ejuſmodi Progreſſiones exhibere poſſe ſcribit, non autem artem quâ inveniendæ ſint tradens: haud afferre pigebit modum, quo infinitæ inveniri queant, qualem eum olim ab inſigni Arithmetico D. Nicolao Huberti à Perſijn didici. Ipſius autem modus talis eſt.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Aſſumptis duobus rationis alicujus terminis, ut ex iis inveniatur numerator, oportet, uno termino per alterum multiplicato, obſervare utrum productum ſit par an impar. Si enim impar fuerit, deſignabit illud ipſum numeratorem; at verò pari exiſtente, ſi ejuſdem producti ſumatur duplum.

Deinde ad inveniendum denominatorem, addantur dicti rationis termini, & ſumma, ſi impar eſt, per terminorum differentiam multiplicata, dabit denominatorem; at verò pari exiſtente, ſi hujus producti ſumatur ſemiſſis.

Porrò ut 2dus obtineatur numerator, multiplicetur terminorum differentia per 2, ſi par fuerit; aut per 4, ſi impar ſit, productoque ducto in majorem terminum, quod exſurgit addatur numeratori priùs invento, & fiet numerator 2dus.

Denique ad habendum 2dum denominatorem, addatur quadratum differentiæ terminorum, ſi id par fuerit, aut ejuſdem duplum, ſi impar, ad denominatorem priùs inventum, fietque denominator 2dus.

Ex quibus inde facile eſt per ſupra dicta reliquos Progreſſionis terminos reperire in infinitum.

Ut ſi termini rationis ſint 1 & 2. quoniam hi in ſe invicem ducti faciunt 2, numerum parem, ideo 4, ipſius duplum, erit numerator.

Deinde quia additis 1 & 2, ſumma 3 eſt impar numerus, hinc multiplicato 3 per 1, differentiam terminorum, fiet 3, denominator.

Porrò quoniam 1, differentia terminorum, impar eſt, hinc ſi ipſa multiplicetur per 4, ac rurſus productum 4 per 2, majorem terminum: erit 12, ſumma hujus producti & prioris numeratoris, numerator 2dus.

Denique quia 1, quadratum differentiæ terminorum impar eſt, ideo ſi duplum ejus 2 ad denominatorem inventum 3 addatur, fiet 5 denominator 2dus. Adeò ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{12}{5}$ ſinguli exhibeant duo trianguli latera, quæ ſunt circa rectum angulum, cujuſquè trianguli hypotenuſa item rationalis ſit.

Quibus ita conſtitutis, cùm numeratoribus per denominatores diviſis oriantur $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{2}{5}$ qui priores ſunt duo termini 1mæ ex duabus ſupra allatis Progreſſionibus Stifelii: patet, hanc eandem ex duplæ rationis terminis 1 & 2 originem ducere, ac reliquos ejuſdem Progreſſionis terminos ex iis nullo negotio inveniri, ſi modò integri, tum numeratores, ac deinde etiam denominatores ſinguli ſeparatim Arithmeticam Progreſſionem conſtituere fingantur.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ubi notandum, quòd, ſicut ex terminis rationis 1 ad 2, ope prioris partis hujus regulæ invenimus numeratorem & denominatorem primæ fractionis $\frac{4}{3}$, ac deinde ope poſterioris partis numeratorem & denominatorem 2^{dæ} fractionis $\frac{12}{5}$, & ex binis hiſce poſtea cæteras omnes, ut dictum eſt, ita ope ſolius primæ partis numeratorem ac denominatorem invenire liceat 2^{dæ}, utendo ad id terminis rationis 2 ad 3; at verò reliquarum omnium ſequentium, utendo ad id terminis rationum 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

Idem de ſequentibus eſt intelligendum.

Ut ſi termini rationis fuerint 1 & 3, invenietur inde per priorem regulæ partem fractio $\frac{3}{4}$; ſumendoque terminos rationis 3 ad 5, invenietur inde fractio $\frac{15}{8}$, atque ita porrò reliquæ $\frac{35}{12}$, $\frac{63}{16}$, $\frac{99}{20}$, $\frac{143}{24}$, $\frac{195}{28}$, $\frac{255}{32}$, $\frac{323}{36}$, aſſumendo terminos rationum 5 ad 7, 7 ad 9, 9 ad 11, 11 ad 13, 13 ad 15, 15 ad 17, 17 ad 19. Unde 2da Stifelii reſultat Progreſſio $\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$ &c.

Eodem modo invenitur, quòd termini Progreſſionis $\frac{8}{15}$, $1\frac{23}{33}$, $2\frac{38}{51}$, $3\frac{53}{69}$, $4\frac{68}{87}$, $5\frac{83}{105}$, &c. fiunt ab hiſce rationum terminis 1—4, 4—7, 7—10, 10—13, 13—16, 16—19, &c.

Et Progreſſionis $\frac{5}{12}$, $1\frac{17}{28}$, $2\frac{29}{44}$, $3\frac{41}{60}$, $4\frac{53}{76}$, $5\frac{65}{92}$, &c. fiunt ab his 1—5, 5—9, 9—13, 13—17, 17—21, 21—25: &c.

Et Progreſſionis $\frac{12}{35}$, $1\frac{47}{85}$, $2\frac{82}{135}$, $3\frac{117}{185}$, $4\frac{152}{235}$, $5\frac{187}{285}$. &c. fiunt ab his 1—6, 6—11, 11—16, 16—21, 21—26, 26—31. &c.

Et Progreſſionis $\frac{7}{24}$, $1\frac{31}{60}$, $2\frac{55}{96}$, $3\frac{79}{132}$, $4\frac{103}{168}$, $5\frac{127}{204}$. &c. fiunt ab his 1—7, 7—13, 13—19, 19—25, 25—31, 31—37. &c.

Atque ita de aliis.

Haud ſecus termini Progreſſionis $\frac{20}{21}$, $2\frac{2}{39}$, $3\frac{5}{57}$, $4\frac{8}{75}$, $5\frac{11}{93}$, $6\frac{14}{111}$. &c. fiunt ab his 2—5, 5—8, 8—11, 11—14, 14—17, 17—20. &c.

Et Progreſſionis $1\frac{1}{20}$, $2\frac{5}{36}$, $3\frac{9}{52}$, $4\frac{13}{68}$, $5\frac{17}{84}$, $6\frac{21}{100}$. &c. fiunt ab his 3—7, 7—11, 11—15, 15—19, 19—23, 23—27. &c.

Et Progreſſionis $1\frac{7}{65}$, $2\frac{22}{115}$, $3\frac{37}{165}$, $4\frac{52}{215}$, $5\frac{67}{265}$, $6\frac{82}{315}$. &c. fiunt ab his 4—9, 9—14, 14—19, 19—24, 24—29, 29—34. &c.

Atque ita de aliis.

Cæterùm ſciendum, quâlibet harum fractionum exhiberi ſemper triangulum in minimis numeris, eandem cum ipſis rationem habentibus: ac proinde ſi hæc triangula omnia ſimiliter poſita concipiantur, ipſa continuò fore diſſimilia ſeu alterius atque alterius ſemper ſpeciei. Adeò ut quis hâc arte nullo negotio centum & plura triangula intra horam reperire valeat, quæ à ſe invicem ſint diverſa.

SE-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIO VII.

De modo inveniendi numeros, qui per datos diviſi certos poſt diviſionem relinquant.

QUò Sectio hæc ritè intelligatur, explicabimus eam per ſequentes quæſtiones.

1ma *Quæſtio*:

Invenire numerum, qui per 2, 3, & 5 diviſus in diviſione relinquat 1; at ſi per 7 dividatur, ut nihil remaneat.

Ad hoc ſuppoſitâ $2 \propto a$, $3 \propto b$, $5 \propto c$, & $7 \propto d$, cum nulla hîc quotorum ſit ratio habenda, patet, conditionibus requiſitis ſatisfactum iri, ſi pro quæſito numero ſtatuamus dz, vel $av + 1$, vel $bx + 1$, vel $cy + 1$; adeò ut habeatur hæc æqualitas: $dz \propto av + 1 \propto bx + 1 \propto cy + 1$, ſeu hæc $dz - 1 \propto av \propto bx \propto cy$.

E qua liquet, ad quæſitum numerum obtinendum, opùs tantùm eſſe quærere numerum, qui dividi poſſit per 2, 3, & 5, & ſi unitate augeatur, dividi queat per 7.

Quoniam autem ad id ſumendo primùm 30, minimum communem dividuum numerorum 2, 3, & 5, eique addendo unitatem ſumma 31 abſque reliquo per 7 dividi nequit: progrediendum erit ad duplum, triplum, quadruplum, aliudvé multiplum ipſius 30. Hinc cum ſumendo 30 ter, & producto addendo 1, ſumma 91 per 7 dividi poſſit, erit 91 numerus quæſitus.

Porrò ne quis in his multiplis ſumendis diviſionem pluries tentare opus habeat, illud operoſum putans, poterit quæſitum numerum è priori diviſione nullo negotio elicere. Nam cum 7 in 30 contineatur quater, & remaneat 2: fiet ut in 90, ejus triplo, contineatur 12^{cies}, & 6 remaneat; adeoque 91 per 7 ſine reliquo dividatur, oriaturque 13.

Cæterùm cum infiniti ſint numeri, qui quæſito ſatisfaciant, poterimus invento jam primo ſeu omnium minimo 90 ex eo facilè reliquos ſequentes invenire.

Etenim invento diviſorum datorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, cum ipſe ad 91 additus faciat numerum 301, qui iiſdem diviſionum legibus eſt obnoxius cum invento 91: idcirco ipſe erit alter quæſitus. Huic autem ſi rurſus addas 210, fiet 511, tertius quæ-

ſitus. Atque ita in infinitum, addendo ſemper 210 ad ultimum inventum.

Notandum autem, ut quæſtio propoſita ſolvi queat, oportere unumquemque datorum numerorum 2, 3, & 5 cum 7 eſſe primum. Aliàs enim fieri nequit, ut ipſius 7 reperiatur aliquis multiplus, qui multiplum alterius cum eo non primi unitate excedat.

2da *Quæſtio.*

Invenire numerum, qui diviſus per 7 relinquat 2, per 11 diviſus relinquat 1, & per 13 diviſus relinquat 9.

Quoniam hæc Quæſtio reducta, ut ante, ad æqualitatem, fit $7x + 2 \propto 11y + 1 \propto 13z + 9$, vel $7x + 1 \propto 11y \propto 13z + 8$, atque hæc ipſa, ad quæſitum numerum obtinendum, nos docet, ſumendum eſſe numerum 11, aliumvé hujus multiplum, qui ſit talis, ut ab eo ablatis 1 & 8 reliqui dividi poſſint per 7 & 13: patet, ſi ad id ſumatur 99, noncuplum ipſius 11, & ab eo auferantur 1 & 8, reliquorum alterum 98 dividi per 7, & alterum 91 per 13. adeoque numerum inveniendum, qui per $7x + 2$, vel $11y + 1$, vel $13z + 9$ deſignatur, fore 100. Is enim per 7 diviſus, relinquit 2, per 11 diviſus relinquit 1, & per 13 diviſus relinquit 9, ſicut requirebatur.

Porrò ut infiniti ejuſmodi numeri habeantur, opùs tantùm erit ad jam inventum 100 addere 1001, diviſorum 7, 11, & 13 minimum communem dividuum, & fit 1101, alter quæſitus. Atque ita addendo continuò 1001 ad ultimò inventum invenientur ſemper alii ac alii in infinitum.

Cæterùm cum ad hujuſmodi quæſtiones ſolvendas modum ingenioſiſſimum excogitarit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Perſijn, placuit eum, qualem ab ipſo accepi, paucis hîc ſubjicere.

Ut ad ſolvendam 1mam Quæſtionem, invento primùm diviſorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, eoque per unumquemque ex ipſis bis diviſo: conſidero quid in ſingulis ſecundis diviſionibus relinquatur. Eſt autem reliquorum ſequens habenda ratio:

```
       1
210 | 105 | 52.
  2 |   2 |
```

Quoniam in hac diviſione relinquitur 1, erit 105 ut inferiùs pro multiplicatore ſumendus.

```
      11
210 | 70 | 23.
  3 |  3 |
```

Similiter quia in hac diviſione relinquitur 1, erit 70 eodem modo pro multiplicatore ſumendus.

2
210 | 42 | 8.   Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet pariter
5 | 5 | 42 pro multiplicatore accipi.

Sed jam 42 toties ſumi debet, ut, ſi per 5 dividatur, reliquum ſit 1, id eſt, ter ſumendus erit. Quod ut facili negotio exploretur, oportet tantùm inquirere, quoties reliquum 2 ſumendum ſit, ita ut ſi per 5 dividatur reliquum ſit 1. Et fit, ut ante, ter. Eodem modo fac in ſequentibus. Hinc ſumendo 42 ter fit 126, pro multiplicatore.

2
210 | 30 | 4.   Haud ſecus ſi reliquum in hac diviſione fuiſſet 1, debuiſſet itidem 30 pro multiplicatore aſſumi.
7 | 7 |

Nunc autem aſſumpto reliquo 2 toties, ita ut per 7 diviſo relinquatur 1, id eſt, quater, multiplico 30 per 4, & fit 120, pro multiplicatore.

Jam quo pacto ex inventis hiſce multiplicatoribus quæſitus numerus reperiatur, ſequens operatio indicabit.

Diviſores.	Reliqua.	Multiplicatores.	Producta.
2	. 1	— 105	105
3	. 1	— 70	70
5	. 1	— 126	126
7	. 0	— 120	0
		ſumma	301

Divid. 301 (9) per min.com.div. 210 { 1. Reliquum 91 arguit quæſitum numerum.

Similiter ad ſolvendam 2dam Quæſtionem, Invento diviſorum 7, 11, 13 minimo communi dividuo 1001, eoque bis per unumquemque ex ipſis diviſo, reliquorum cujuſque diviſionis ſequens habeatur ratio.

32
1001 | 14 (3 | 20.   Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet 143 pro multiplicatore accipi.
7 | 7 |

Jam autem aſſumpto reliquo 3 toties, ita ut per 7 diviſo relinquatur 1, id eſt, quinquies: multiplico 143 per 5, & fit 715, pro multiplicatore.

1 13
1001|91|8. Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet 91 pro multiplicatore accipi.
11|11|

Jam autem aſſumpto reliquo 3 toties, ita ut per 11 diviſo relinquatur 1, id eſt, quater: multiplico 91 per 4, & fit 364 pro multiplicatore.

9 12
1001|77|5. Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet 77 pro multiplicatore accipi.
18|13|

Jam autem aſſumpto reliquo 12 toties, ita ut per 13 diviſo relinquatur 1, id eſt, duodecies: multiplico 77 per 12, & fit 924 pro multiplicatore.

Ex multiplicatoribus inventis quæſitum numerum ſic elicies.

Diviſo-res.	Reli-qua.	Multipli-catores.	Produ-cta.
7 .	2	715	1430
11 .	1	364	364
13 .	9	924	8316
		ſumma.	10110

Divide 10110 per min. com. div. 1001 — 0 — 10. Reliquum indicat quæſitũ numerum.

Atque ita de aliis.

De his tradidit quoque celebris Arithmeticus Simon Jacobi Coburgenſis in Arithmetica ſua majori, ſed multiplicatores invenire non docet.

SECTIO VIII.

Praxis ponderandi.

CUM utilis pariter atque jucunda ſpeculatio ſit cenſenda, quæ ponderandi praxin concernit, docens paucis ponderibus complures libras expendere: viſum fuit præſentem de illâ ſectionem inſtituere.

Quoniam autem dupliciter id fieri poſſe compertum eſt, vel ſcilicet additione ſolâ, vel additione & ſubtractione ſimul: explicabo ſubinde quæ ad utrumque modum pertinent.

Ad

Ad priorèm modum pertinet Progreſſionis duplæ conſideratio ſequens:

nimirum,

Si, ab unitate in ratione dupla acceptis quotlibet numeris, ſumantur pondera tot librarum, quot Progreſſionis hujus termini indicant: poterunt eorum beneficio per ſolam additionem libræ omnes obtineri, quas aliquis ad ponderandum propoſuerit:

Etenim, aſſumptis duobus primis 1 & 2, ſi 1 ℔ in lancem ponam pendet 1 libram; & ſi 2 ℔ in lancem ponam pendent 2 libras; ac deinde ſi 1 & 2 ℔ ſimul in lancem ponam pendent 3 libras. Quòd ſi verò ad hæc duo pondera 1 & 2 librarum tertium acceſſerit pondus 4 librarum, atque hoc pondus 4 librarum lanci committatur, habebo 4 libras; quibus ſi 1 ℔ addatur, habebo 5 libras; tollendo autem hanc 1 ℔ ejuſque loco 2 ℔ immittens, habebo unà cum prædictis 4 libris 6 libras; his ſi præterea apponatur 1 ℔, fient 7 libræ. Sicque 1, 2, & 4 libris ponderare potero libras omnes ab 1 uſque ad 7 ℔.

Similiter beneficio quatuor ponderum 1, 2, 4, & 8 librarum potero librare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15 libras; & ope 5 ponderum 1, 2, 4, 8, & 16 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 31 ℔. Pari ratione licebit cum ſex hiſce 1, 2, 4, 8, 16, & 32 librarum expendere libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 63 ℔; & ope horum ſeptem 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 127 libras. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Porrò ad inveſtigandum, quo pacto, aſſumptis compluribus horum ponderum, ipſa ſimul jungi debeant, ut ordine libræ omnes mediantibus iis ponderentur: deſigno 1, 2, 4, 8 &c. per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. harumque quæro electiones omnes, ſicut 1^mâ ſectione oſtenſum fuit, & invenio electiones ſequentes:

1
a

2 3
b. ab.

4 5 6 7
c. ac. bc. abc.

8 9 10 11 12 13 14 15
d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.

Indicantes ordine omnes libras, quæ datis quatuor ponderibus

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

1, 2, 4, & 8 librarum appendi poſſunt, ut & quo pacto dicta pondera conjungi debeant.

Idem de aliis compluribus in infinitum intellige.

In poſterioris modi explanationem lubet hoc loco in medium adducere, quæ à Stifelio afferuntur in commentariis ſuis ad 1^{mum} caput Algebræ Chriſtophori Rudolphi, ubi hæc de Progreſſione tripla ſcribit:

Progreſſio 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 &c. ſingularem quoque ſuam habet proprietatem. Si enim pondera accipiantur totidem librarum quot hujus Progreſſionis termini indicant: poterimus cum duobus primis, 1 & 3 librarum, ponderare 1, 2, 3, & 4 libras. Nam ſi 1 ℔ in lancem ponam, pendet unam libram; & ſi 3 ℔ ponam in alteram lancem, pendent hæ 3 ℔ non niſi 2 libras, propter 1 ℔ in priori lance poſitam: quam libram ſi tollam, ponderabo 3 ℔; at verò ſi unà ſimul jungam, habebo 4 libras.

Eodem modo ope trium priorum librarum 1, 3, & 9 ponderari poterunt libræ ſequentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & 13. Sic & 1, 3, 9, 27 libræ, facientes ſimul 40 libras, inſervire poterunt ad quemvis librarum numerum ab 1 ℔ uſque ad 40 ℔ ponderandum. Haud ſecus ſi quinque ſumantur pondera, nimirum: 1, 3, 9, 27, & 81 librarum, poterunt eorum beneficio ponderari omnes libræ ab 1 ℔ uſque ad 121 libras. Et per ſex 1, 3, 9, 27, 81, & 243 omnes libræ ab 1 uſque ad 364. Atque ita porrò in infinitum.

Quoniam igitur ex his conſtat, utendo numeris progreſſionis triplæ, ope pauciorum ponderum plures ponderari libras, quàm ſi in eundem finem uteremur ponderibus progreſſionis duplæ; non è re fore exiſtimo, ſi hîc deinceps, ut ante, quo pacto hæc pondera ſeparatim utrique lanci imponenda ſint, ad omnes ordine libras expendendas, oſtendam: ad quod inveſtigandum & evulgandum Clariſſimus Vir Juvenis D. Theodorus Cranen, L. A. M. ac Med. Doctor Mathematumque peritiſſimus, me incitavit.

Ut autem pateat, quæ ratiocinatio nos ad terminorum hujus Progreſſionis inventionem deduxerit, ſequentem propono quæſtionem:

Invenire duos, tres, pluresvé numeros, qui ſoli ſumpti ut & modis omnibus additi ac ſubtracti, faciant numeros ab unitate in ſerie naturali excreſcentes.

Primò ad inveniendos duos hujuſmodi numeros, pono pro uno 1, & pro

& pro altero z. Reſtat igitur ut ſoli ſumpti, ut & additi ac ſubtracti, faciant numeros ab unitate in ſerie naturali excreſcentes. Unde, cum hinc fiant 1, z-1, z, & $z+1$, relinquitur, ut per eos deſignentur numeri 1, 2, 3, & 4.

E quibus elicitur, ſumendo 1 pro 1mo, ad unam libram ponderandam, pro 2do z accipiendum eſſe 3, hiſque binis ad quatuor libras nec ultra aſcendi poſſe.

Deinde ad inveniendos tres, pono pro 1mo 1, pro 2do z, & pro 3^{tio} y. Et manifeſtum eſt, ſi à tertio ſeu majori y abſtulero duos primos 1 & z, reliquum $y-z-1$ indicare debere librarum numerum, omnium minimum, qui à tribus ponderibus ponderari poteſt, hoc eſt, ipſum deſignare debere 5 libras. Unde ad $y-z-1$ addendo 1, deſignabit $y-z$ ſex libras. Cui rurſus unitate additâ, fit $y-z+1$ pro 7 libris. Huic verò ſi denuo addatur unitas, fiet $y-z+2$, pro 8 libris deſignandis. Sed cum nullum pondus 2 librarum habeam, at verò ejus loco aſſumere poſſim $z-1$, fit ut ad $y-z$ addendo $z-1$ ſumma $y-1$ deſignet 8 libras. Ad quem ſi iterum unitatem addam, habebo y ad 9 libras deſignandas.

Et liquet, ſi pro 1mo quæſitorum numerorum ſumatur 1, & pro 2do z. 3, tunc pro 3^{tio} y accipiendum fore 9. Cui ſi ulteriùs addidero 1, tum $z-1$, tum z, tum $z+1$: habebo $y+1$, $y+z-1$, $y+z$, & $y+z+1$, ad ordine ſequentium librarum numeros 10, 11, 12, & 13, nec ultra, per inventa hæc tria pondera expendendos.

Porrò ad inveniendos quatuor numeros, pono pro 1mo 1, pro 2do z, pro 3^{tio} y, & pro quarto x. Et evidens eſt, ſi ab hoc quarto ſeu majori x ſuſtulero tres priores 1, z, & y, reliquum $x-y-z-1$ indicare librarum numerum, qui omnium minimus à quatuor ponderibus libretur; adeoque ipſum deſignare 14 libras. Unde quartus x facilè innoteſcit. Etenim cum $y+z+1$ & $x-y-z-1$, indicantes 13 & 14 libras, ſimul additi in unam ſummam côaleſcant, quæ eſt x, deſignabit x. 27 libras. Quibus igitur quatuor ponderibus, ſi omnia ſimul ſumantur, uſque ad 40 libr. aſcendetur. Similiterque ſi quinque numeri quærantur, & pro quinto ponatur v, deſignabit $v-x-y-z-1$ libras 41. Cui ſi addidero $x+y+z+1 \propto 40$, habebo $v \propto 81$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

His igitur ita ſe habentibus, ſupereſt ut explicemus, quo pacto ad praxin referenda ſint.

Quantùm itaque ad primum modum, quo libræ quotlibet beneficio ponderum duplæ Progreſſionis ordine ponderari poſſunt, perin-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

de atque per literas *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, *abcd*, &c. indicatur: oportet tantùm in locum ipſarum *a*, *b*, *c*, *d*, &c. quibus ad pondera 1, 2, 4, 8, &c. librarum deſignanda uſi ſumus, ſubrogare numeros 1, 2, 4, 8, &c. eoſque hiſce characteribus inſignire ①, ②, ④, ⑧, &c. Quæ porrò prout ſic inſignita ſeorſim vel junctim, ſicut præcedentes literæ indicant, in lancem A immiſſa fuerint, ordine pondera exhibebunt, ad quemlibet librarum numerum expendendum.

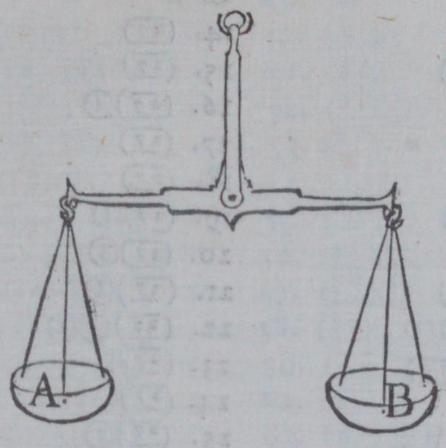
Quod ſecundum modum concernit, quo libræ quotvis ope ponderum progreſſionis triplæ ordine ponderantur, omnino ſicut literæ $1, z-1, z, z+1, y-z-1, y-z, y-z+1, y-1, y, y+1, y+z-1, y+z, y+z+1$ &c. demonſtrant: opus ſolummodò erit in locum ipſarum 1, *z*, *y*, *x*, *v*, &c., quæ pondera 1, 3, 9, 27, 81, &c. librarum deſignare inventa ſunt, ſubſtituere numeros 1, 3, 9, 27, 81, &c., tribuendo iis ſequentes characteres ①, ③, ⑨, (27), (81), &c.

Cum autem in his ponderibus deſignandis contingat ut aliis ſignum +, aliis verò ſignum — præfigatur: ſcire oportet eo caſu pondera utrique lanci eſſe committenda, nimirum illa, quæ abſque ſigno vel per + denotantur, debere lanci A imponi; at verò quæ per — deſignantur eſſe lanci B aſsignanda. Hæc enim, cum ſemper ab iis, quæ in A, præponderentur, faciunt, ut in ordine librandis quotcunque libris compenſatio juſta ad amuſsim ubique adhibeatur.

Cæterùm quoniam ponderandi praxis in omni fermè negotiatione uſu venit, placuit dilucidioris explicationis ergò eorum, quæ oſtenſa ſunt, duas hîc tabellas ſubjungere, quarum altera, ordine tradit libras omnes ab 1 uſque ad 127 ℔, quæ ope 7 ponderum 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum ſecundùm priorem modum expendi poſſunt; altera, omnes libras ab 1 uſque ad 121 ℔, quæ beneficio 5 ponderum 1, 3, 9, 27, & 81 librarum juxta poſteriorem modum librari queunt. Ubi præterea advertendum, utramque eodem modo de libræ partibus & minutiis eſſe intelligendam, ac proinde earundem uſum in onerum, merciumque traditione & receptione quàm maximè eſſe conſpicuum: ita ut in foris, lanienis, ac officinis denique quibuſvis, ubi ponderum ratio haberi ſolet, haud parvo cum emolumento uſurpentur.

A eſt

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



A	eſt lanx, in qua collocari debent	pondera.
B		merces.

C. Sunt libræ mercium expendendæ.
D. Sunt pondera lanci A imponendæ.
E. Sunt pondera unà cum mercibus lanci B imponenda.

Tabella prior.

C.	D
1.	①
2.	②
3.	①②
4.	④
5.	①④
6.	②④
7.	①②④
8.	⑧
9.	①⑧
10.	②⑧
11.	①②⑧
12.	④⑧
13.	①④⑧

Tabella poſterior.

C.	D	E
1.	①	
2.	③	①
3.	③	
4.	③①	
5.	⑨	③①
6.	⑨	③
7.	⑨①	③
8.	⑨	①
9.	⑨	
10.	⑨①	
11.	⑨③	①
12.	⑨③	
13.	⑨③①	

14. ②④⑧

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Tabella prior.

C.	D
14.	②④⑧
15.	①②④⑧
16.	(16)
17.	①(16)
18.	②(16)
19.	①②(16)
20.	④(16)
21.	①④(16)
22.	②④(16)
23.	①②④(16)
24.	⑧(16)
25.	①⑧(16)
26.	②⑧(16)
27.	①②⑧(16)
28.	④⑧(16)
29.	①④⑧(16)
30.	②④⑧(16)
31.	①②④⑧(16)
32.	(32)
33.	①(32)
34.	②(32)
35.	①②(32)
36.	④(32)
37.	①④(32)
38.	②④(32)
39.	①②④(32)
40.	⑧(32)
41.	①⑧(32)
42.	②⑧(32)
43.	①②⑧(32)
44.	④⑧(32)
45.	①④⑧(32)
46.	②④⑧(32)
47.	①②④⑧(32)
48.	(16)(32)
49.	①(16)(32)

Tabella poſterior.

C.	D	E
14.	(27)	⑨③①
15.	(27)	⑨③
16.	(27)①	⑨③
17.	(27)	⑨①
18.	(27)	⑨
19.	(27)①	⑨
20.	(27)③	⑨①
21.	(27)③	⑨
22.	(27)③①	⑨
23.	(27)	③①
24.	(27)	③
25.	(27)①	③
26.	(27)	①
27.	(27)	
28.	(27)①	
29.	(27)③	①
30.	(27)③	
31.	(27)③①	
32.	(27)⑨	③①
33.	(27)⑨	③
34.	(27)⑨①	③
35.	(27)⑨	①
36.	(27)⑨	
37.	(27)⑨①	
38.	(27)⑨③	①
39.	(27)⑨③	
40.	(27)⑨③①	
41.	(81)	(27)⑨③①
42.	(81)	(27)⑨③
43.	(81)①	(27)⑨③
44.	(81)	(27)⑨①
45.	(81)	(27)⑨
46.	(81)①	(27)⑨
47.	(81)③	(27)⑨①
48.	(81)③	(27)⑨
49.	(81)③①	(27)⑨

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Tabella prior. C.	D	Tabella poſterior. C.	D	E
50.	②(16)(32)	50.	(81)	(27)③①
51.	①②(16)(32)	51.	(81)	(27)③
52.	④(16)(32)	52.	(81)①	(27)③
53.	①④(16)(32)	53.	(81)	(27)①
54.	②④(16)(32)	54.	(81)	(27)
55.	①②④(16)(32)	55.	(81)①	(27)
56.	⑧(16)(32)	56.	(81)③	(27)①
57.	①⑧(16)(32)	57.	(81)③	(27)
58.	②⑧(16)(32)	58.	(81)③①	(27)
59.	①②⑧(16)(32)	59.	(81)⑨	(27)③①
60.	④⑧(16)(32)	60.	(81)⑨	(27)③
61.	①④⑧(16)(32)	61.	(81)⑨①	(27)③
62.	②④⑧(16)(32)	62.	(81)⑨	(27)①
63.	①②④⑧(16)(32)	63.	(81)⑨	(27)
64.	(64)	64.	(81)⑨①	(27)
65.	①(64)	65.	(81)⑨③	(27)①
66.	②(64)	66.	(81)⑨③	(27)
67.	①②(64)	67.	(81)⑨③①	(27)
68.	④(64)	68.	(81)	⑨③①
69.	①④(64)	69.	(81)	⑨③
70.	②④(64)	70.	(81)①	⑨③
71.	①②④(64)	71.	(81)	⑨①
72.	⑧(64)	72.	(81)	⑨
73.	①⑧(64)	73.	(81)①	⑨
74.	②⑧(64)	74.	(81)③	⑨①
75.	①②⑧(64)	75.	(81)③	⑨
76.	④⑧(64)	76.	(81)③①	⑨
77.	①④⑧(64)	77.	(81)	③①
78.	②④⑧(64)	78.	(81)	③
79.	①②④⑧(64)	79.	(81)①	③
80.	(16)(64)	80.	(81)	①
81.	①(16)(64)	81.	(81)	
82.	②(16)(64)	82.	(81)①	
83.	①②(16)(64)	83.	(81)③	①
84.	④(16)(64)	84.	(81)③	
85.	①④(16)(64)	85.	(81)③①	

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Tabella prior. C.	D	Tabella poſterior. C.	D	E
86.	②④(16)(64)	86.	(81)⑨	③①
87.	①②④(16)(64)	87.	(81)⑨	③
88.	⑧(16)(64)	88.	(81)⑨①	③
89.	①⑧(16)(64)	89.	(81)⑨	①
90.	②⑧(16)(64)	90.	(81)⑨	
91.	①②⑧(16)(64)	91.	(81)⑨①	
92.	④⑧(16)(64)	92.	(81)⑨③	①
93.	①④⑧(16)(64)	93.	(81)⑨③	
94.	②④⑧(16)(64)	94.	(81)⑨③①	
95.	①②④⑧(16)(64)	95.	(81)(27)	⑨③①
96.	(32)(64)	96.	(81)(27)	⑨③
97.	①(32)(64)	97.	(81)(27)①	⑨③
98.	②(32)(64)	98.	(81)(27)	⑨①
99.	①②(32)(64)	99.	(81)(27)	⑨
100.	④(32)(64)	100.	(81)(27)①	⑨
101.	①④(32)(64)	101.	(81)(27)③	⑨①
102.	②④(32)(64)	102.	(81)(27)③	⑨
103.	①②④(32)(64)	103.	(81)(27)③①	⑨
104.	⑧(32)(64)	104.	(81)(27)	③①
105.	①⑧(32)(64)	105.	(81)(27)	③
106.	②⑧(32)(64)	106.	(81)(27)①	③
107.	①②⑧(32)(64)	107.	(81)(27)	①
108.	④⑧(32)(64)	108.	(81)(27)	
109.	①④⑧(32)(64)	109.	(81)(27)①	
110.	②④⑧(32)(64)	110.	(81)(27)③	①
111.	①②④⑧(32)(64)	111.	(81)(27)③	
112.	(16)(32)(64)	112.	(81)(27)③①	
113.	①(16)(32)(64)	113.	(81)(27)⑨	③①
114.	②(16)(32)(64)	114.	(81)(27)⑨	③
115.	①②(16)(32)(64)	115.	(81)(27)⑨①	③
116.	④(16)(32)(64)	116.	(81)(27)⑨	①
117.	①④(16)(32)(64)	117.	(81)(27)⑨	
118.	②④(16)(32)(64)	118.	(81)(27)⑨①	
119.	①②④(16)(32)(64)	119.	(81)(27)⑨③	①
120.	⑧(16)(32)(64)	120.	(81)(27)⑨③	
121.	①⑧(16)(32)(64)	121.	(81)(27)⑨③①	

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

C. D.

122. ② ⑧ (16) (32) (64)
123. ① ② ⑧ (16) (32) (64)
124. [4] ⑧ (16) (32) (64)
125. ① [4] ⑧ (16) (32) (64)
126. ② [4] ⑧ (16) (32) (64)
127. ① ② [4] ⑧ (16) (32) (64)

SECTIO IX.

Ratio inveniendi numeros amicabiles, hoc eſt, duos numeros, quorum partes aliquotæ, cùm adduntur, eos ipſos vice verſâ componunt.

SUnt qui exiſtimant, plures operationes Arithmeticas reperiri, quæ Algebræ non ſubjiciantur, inter quos eſt Arithmeticus haud ignobilis Michaël Stifelius, qui in commentariis ſuis ſuper Algebra Chriſtophori Rudolphi, poſt reſolutionem quæſtionum, quæ ad Cubicam Æquationem aſcendunt, hæc ſcribit:

,, Wie wol aber ein jede Coß einen unaußſprechlichen begriff hat
,, in ſich allerley künſtlicher rechnung/dennoch findet man viel feiner
,, rechnung welche der Coß nicht ſind underworffen/ſondern neben
,, der Coß flieſſen auß der Theorica / welchs ich wol wolte mit vielen
,, feynen Exempeln beweyſen / wil es aber hie bey einem oder zweyen
,, Exempeln beruhen laſſen.

Quorum ſenſus hic eſt:

At licèt reſolutio æquationis cujuſque gradus ineffabilem uſum habeat expediendi quemlibet artificioſum calculum, nihilominus tamen multæ egregiæ ſupputationes reperiuntur, quæ Algebræ non ſunt obnoxiæ, ſed citra eam ex Theorica fluunt, quod multis utique elegantibus exemplis demonſtrare poſſem, niſi id uno aut altero exemplo oſtendiſſe ſufficeret.

Eſt autem primum, quod in eum finem adfert, hujuſmodi.

Quære duos numeros, ita ut partes omnes aliquotæ minoris ſimul additæ faciant majorem numerum, & partes omnes aliquotæ majoris ſimul additæ faciant minorem numerum.

Quapropter cùm ego longè aliter ſtatuendum eſſe putem, oſtendam quo pacto Algebræ beneficio non tantùm duos hoſce numeros reperire in procinctu ſit; ſed etiam quiſnam ſit progreſſus in infini-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tum inveſtigandi ſemper alios duos, qui idem præſtent; ſiquidem hoc id ipſum eſt, quod præſens Sectio innuit.

Ad quos igitur inveniendos, pono pro uno numero $4x$, & pro altero $4yz$, hoc eſt, a^2x & a^2yz.

Unde cum per 1^{mam} Sectionem partes aliquotæ ipſius $4x$ ſint 1, 2, 4, x, & $2x$: erit $7 + 3x \propto 4yz$

$$\& \text{ fit } x \propto \frac{4yz - 7}{3}$$

$$\text{adeoque } 4x \propto \frac{16yz - 28}{3}.$$

Eodem modo, cum partes aliquotæ ipſius $4yz$ ſint 1, 2, 4, y, $2y$, $4y$, z, $2z$, $4z$, yz, & $2yz$:

$$\text{erit } 4x, \text{ hoc eſt, } \frac{16yz-28}{3} \propto 7 + 7y + 7z + 3yz$$

Unde, reductâ æquatione, invenitur $y \propto \frac{3z+7}{z-3}$, ſeu $3 + \frac{16}{z-3}$.

Vel etiam $z \propto \frac{3y+7}{y-3}$, ſeu $3 + \frac{16}{y-3}$.

Hinc cum, pro y aſſumpto primo numero 5, pro z inveniatur primus 11, & pro x primus 71, è quibus $4x$ fit $\propto 284$, & $4yz \propto 220$: patet, quæſitos numeros fore 284 & 220.

Jam verò ut conſtet num & minores duo numeri quàm 284 & 220 inveniri poſſint, qui idem præſtent, pono pro uno numero ^2x, & pro altero $2yz$, hoc eſt, ax & ayz.

Vnde cum operando, ut ſupra, inveniatur $x \propto 2yz - 3$,

$$\& \; y \propto 1 + \frac{4}{z-1},$$

$$\text{vel } z \propto 1 + \frac{4}{y-1}:$$

patet, ſi pro y ſumatur primus numerus 5, tunc pro z inveniri primum 2, & pro x primum 17. Verùm quia ſic pro z idem fit numerus 2, qui hypotheſium $2x$ & $2yz$, quique has eaſdem deſtruit, ac in locum ax & ayz ſubſtituit ax & aay: evidens fit inventis hiſce numeris quæſito non ſatisfactum iri. Quare cum ſumendo pro y alium primum numerum, ut 3, tunc pro z etiam inveniatur 3, quod perinde po-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

poſitiones convertit, præterquam quod eo caſu x quoque non ſit primus; nec præter jam aſſumptos ullos alios aſſumere liceat (ſiquidem pro y, unde z & x ſunt inveniendæ, talis primus numerus aſſumi debet, ut, ab eo ſublatâ unitate, reliquum dividere poſſit 4): argumentum eſt, juxta præcedentem viam, minores duos numeros quàm ſupra inventos 284 & 220 non reperiri.

Sed dicet aliquis eos fortè aliâ viâ inventum iri, utpote pro iis ponendo $2x$ & yz, hoc eſt, ax & yz; vel etiam xy & xyz. Verùm cum juxta priorem hanc ſuppoſitionem inveniatur $z \propto \frac{y+7}{2y-1}$, & juxta poſteriorem $1+x+y+z+xy+xz+yz \propto xy$; illic autem pro y nullus primus numerus aſſumi poſſit, ut inde z & x reperiantur, quales requiruntur; hîc verò æquatio omnino ſit impoſſibilis, idemque hoc in quavis alia ſuppoſitione contingat: concludo 284, & 220 eſſe omnium eorum, qui inveniri poſſunt, minimos.

Porrò ut quærantur duo alii majores, pono pro uno numero $8x$ & pro altero $8yz$, hoc eſt, a^3x & a^3yz: invenieturque, operando ut ante, $x \propto \frac{8yz-15}{7}$

& $y \propto 7 + \frac{64}{z-7}$

vel $z \propto 7 + \frac{64}{y-7}$. Unde ſumendo $y \propto 11$, erit $z \propto 23$, & $x \propto 287$. qui numerus non eſt primus. Hinc ſumendo $y \propto 23$, cum pro z inveniatur 11, & pro x idem numerus, qui ante, nec pro y ullus alius primus numerus aſſumi poſſit, ita ut inde z & x reperiantur, ut requiritur: conſtat juxta hanc hypotheſin quæſitos numeros non inveniri.

Pergo itaque, ponendo pro uno numero $16x$, & pro altero $16yz$, hoc eſt, a^4x & a^4yz. Unde juxta ſuperiorem modum invenitur

$$x \propto \frac{16yz-31}{15}$$

$$\& \; y \propto 15 + \frac{256}{z-15}$$

 vel

$$\text{vel } z \propto 15 + \frac{256}{y-15}.$$

Hinc quoniam ſemper eadem ratio eſt quærendi quantitatem y per quantitatem z, quæ quærendi z per y, & aſſumendo pro y primum numerum 47, pro z fiat primus 23, & pro x primus 1151: idem continget ſi pro z ſumatur 47, fiet enim tunc $y \propto 23$, & $x \propto 1151$, ut ante. E quibus alter quæſitus numerus $16\,x$ fit $\propto 18416$, & alter $16\,yz \propto 17296$. Qui ſunt duo alii amicabiles præter ſupra inventos 284 & 220.

Ut autem primi numeri, pro y vel z ſumendi, qui huc conducere poſſunt, nullo negotio offendantur, conſentaneum fuerit ad id quærere priùs numeri 256 omnes diviſores, atque ex ſummis, poſtquam ipſis ſingulis numerus 15 eſt additus, eligere primos numeros. In quem finem primos numeros Sectionis 5tæ inſpicere haud erit inopportunum.

Omnino ut hîc videre licet.

256	128	64	32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256, diviſores numeri 256,
adde 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15:
Et fit pro y. 16. 17. 19. 23. 31. 47. 79. 143. 271. Qui numeri omnes præter 16 & 143 primi ſunt.

Similiter, ut quærantur rurſus alii duo, pono pro uno numero $32\,x$ & pro altero $32\,yz$, hoc eſt, a^5x & a^5yz: invenioque, ſicut ſuperiùs factum fuit, $x \propto \frac{32yz-63}{31}$

$$\& \; z \propto 31 + \frac{1024}{y-31}.$$

Sed cum hîc nullus primus pro y ſumi queat, è quo etiam z & x primi reperiantur, ſicut requiritur, progredior, ponendo pro uno $64\,x$ & pro altero $64\,y\,z$, hoc eſt, a^6x & a^6yz. At verò cum & hic non magis quàm juxta præcedentem hypotheſin primi obtingant, progrediendo rurſus ſuppono unum numerum eſſe $128\,x$ & alterum $128\,yz$, hoc eſt, a^6x & a^6yz.

Cum

Cum autem hîc operando, ut ſupra, x fiat $\infty \frac{128yz-255}{127}$, & $z \infty 127 + \frac{16384}{y-127}$; & aſſumpto pro y primo numero 191, pro z reperiatur primus 383, & pro x primus 73727: hinc alter quæſitus 128 x erit 9437056, & alter 128 $yz \infty$ 9363584. Qui ſunt duo adhuc alii amicabiles præter ſupra inventos 284 & 220, & 18416 & 17296. Eodem modo procedere licet in infinitum ad inveniendos ſemper alios atque alios duos.

Rationem verò primos numeros eligendi, pro y ſumendos, poteris ex adjuncta operatione non aliter ac ſupra colligere.

x	x	x			x	x			x					
16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad numeri 16384 diviſores:

	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	8192.	16384.
adde	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.
& fit pro y.	128.	129.	131.	135.	143.	159.	191.	255.	383.	6 9.	1151.	2175.	4223.	8319.	16511.

Qui numeri omnes, præter 131, 191, 383, & 1151, ſunt compoſiti.

Cæterùm ut iis, qui Algebræ ignari ſunt, ratio quoque amicabiles numeros inveniendi conſtet, in medium adducturus ſum Regulam, quam olim ab illuſtri Viro Renato des-Cartes didici, qui Algebræ peritiâ doctiſſimorum conſenſu non modò ſummas in hiſce Diſciplinis difficultates ſuperare novit, ipſiuſque beneficio Regulas & Theoremata, earundem reſolutioni inſervientia, invenire; ſed etiam, quicquid demum circa illas ab humano ingenio cognoſci potuit determinare. Quam excolendo, tandem illam ſibi efformavit Methodum, quâ obvia quælibet, ipſis etiam Perſpicaciſſimis (id quod pluries expertus loquor) Ingeniis remoram injicientia, uno quaſi obtutu penetrare potis fuit; ac, quidcunque certi in reliquis Scientiis lumine naturali ſciri potuit, ex Indubitatis Principiis deducere valuit.

Dicta autem ipſius regula eſt hujuſmodi:

Si ſumatur binarius vel quilibet alius numerus ex ſolius binarii multiplicatione productus, modò ſit talis, ut ſi tollatur unitas ab ejus triplo fiat numerus primus: Itemqúe ſi tollatur unitas ab ejus ſextuplo, fiat numerus primus: Et denique ſi tollatur ab ejus quadrati octodecuplo, ducaturqúe hic ultimus

mus numerus primus per duplum numeri aſſumpti, Fiet numerus, cujus partes aliquotæ dabunt alium numerum, qui vice verſâ partes aliquotas habebit æquales primo numero præcedenti.

1. Exemplum.

Sic aſſumendo binarium

2 binarius	2	2
per 3	per 6	2
6 ejus triplum.	12 ejus ſextuplum.	4 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	toll. 1 unitas	per 18
5 num. primus.	11 num. primus.	72 ejus octodecuplum
		tollatur 1 unitas
		71 numerus primus.
		per 4 duplũ numeri aſſumpti
		284 unus numerus quęſitus.

Alius autem numerus quæſitus producetur multiplicando duos primos inventos numeros primos unum per alterum, & productum per duplum aſſumpti.

Ergo. 5 numerus primus prior.
per 11 numerus primus alter.
55 productum
per 4 duplum aſſumpti
220 alter numerus quæſitus.

2. Ex-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Aſſumatur numerus   2. *Exemplum.*

8   8   8

per 3   per 6   8

24 ejus triplum.   48 ejus ſextuplum.   64 ejus quadratum

tollatur 1 unitas.   tollatur 1 unitas   per 18

23 numerus primus prior.   47 numerus primus alter.   512

23   64

141   1152 ejus octodecuplum

94   tollatur 1 unitas

1081 productum.   1151 numerus primus 3tius

per 16 duplum aſſumpti.   per 16 duplum aſſumpti

6486   6906

1081   1151

17296 alter numerus quæſitus.   18416 unus numerus quæſitus.

3. *Exemplum.*

Et ſumendo 64, quia 191, 383, & 73727 ſunt numeri primi, habebo numeros 9437056 & 9363584. Et ſic de cæteris.

Ecce ſequentem operationem.

64 Aſſumptus num.   64   64

per 3   per 6   64

192 ejus triplum.   384 ejus ſextuplū.   256

tollatur 1 unitas   tollatur 1 unitas   384

191 numerus primus prior.   383 num. primus alter.   4096 ejus quadratum.

191   per 18

383   32768

3447   4096

383   73728 ejus octodecuplum.

tollatur 1 unitas

73153 productum.   73727 num. prim. tert.

per 128 duplum aſſumpti.   per 128 duplū aſſūpti.

585224   589816

146306   147454

73153   73727

9363584 alter num. quæſitus.   9437056 unus num. quæſitus.

Cum plures de partibus aliquotis quæſtiones per Algebram enodare, perfectorumque numerorum naturam auxilio ejus exponere hîc decreviſſem, ne tamen aliorum operam, quam ea in re collocaſſe poſt deprehendi, fruſtrare viderer, prætermittere id æquum duxi. Cum enim, ſicut Mercennus refert in Reflexionibus ſuis Phyſico-Mathematicis, Vir Eximius D. Frenicluis de numeris figuratis, primis, compoſitis, &c. tria volumina conſcripſerit, quæ nondum (quod ſciam) in lucem prodière: præſtolari illa ſatiùs mihi viſum eſt, quàm plura afferendo mea ipſius inventis anteponere. His adde quòd inter Carteſii monumenta, de quo ſupra memini, tractatus etiam extet, qui de partibus aliquotis inſcribitur, cujus item editionem ut & reliquorum ipſius ſcriptorum à munificentia Viri Excellentiſſimi, D. PETRI CHANUT, harum Scientiarum peritiſſimi, penes quem illa religiosè aſſervantur, exſpectamus, quàm primùm graviora ejus munera id permittent. Quocirca ne tantorum Virorum inventis invidere, propriam quærendo gloriam, quin potiùs in iiſdem promovendis operam conferre cenſear: placuit ea pauca, quæ de partibus aliquotis ac diviſoribus tradidi (tanquam aditum ad illa) præmittere, donec illorum ſcripta impetremus.

SECTIO X.

De modo inveniendi triangula, quorum ſingula latera, ſegmenta baſis & perpendicularis exprimantur per numeros rationales abſolutos.

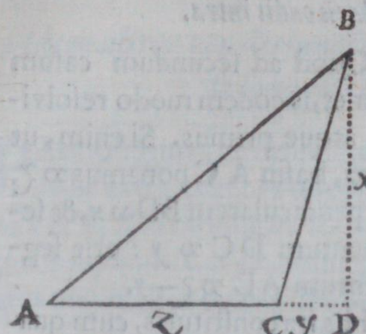
HOc Problema duos caſus habet, perpendicularis enim aut cadit extra, aut intra triangulum.

1. *caſus, in quo perpendicularis cadit extra.*

Igitur ad ſolvendum primum caſum, pro baſi A C pono z, pro perpendiculari B D x, & pro ſegmento externo C D y: unde ſegmentum AD fit $z + y$.

Quibus ita poſitis, cum quadratum ex C B ſit æquale binis quadratis ex C D, D B, erit $xx+yy$ æquale □to. Eſto quadrato à latere $y+b$: eritque $xx + yy \propto yy + {}^2by + bb$. Hoc eſt, dempto utrinque yy, & ordinatâ æquatione ita ut y reperiatur ſola, fiet $y \propto \frac{xx-bb}{2b}$.

Simi-



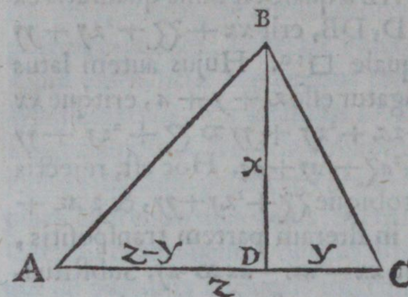
Similiter, quoniam quadratum ex AB æquale eſt binis quadratis ex AD, DB, erit $xx + zz + {}^2zy + yy$ æquale $\square^{to}$. Hujus autem latus fingatur eſſe $z + y + a$, eritque $xx + zz + {}^2zy + yy \propto zz + {}^2zy + yy + {}^2az + {}^2ay + aa$. Hoc eſt, rejectis utrobique $zz + {}^2zy + yy$, & $2az + aa$ in alteram partem tranſpoſitis, erit $xx - {}^2az - aa \propto {}^2ay$. Subſtituatur jam in locum y valor ejus inventus, & fit $xx - {}^2az - aa \propto \frac{axx - abb}{b}$. Tum multiplicato utrinque per b, & tranſlatis terminis, ita ut quantitas z unam obtineat æquationis partem: habebitur $z \propto \frac{bxx - axx + abb - aab}{2ab}$.

Ubi patet, ſumendo x, b, & a ad libitum, quo pacto inveniantur y & z. Unde porrò facile eſt invenire AB & BC. Cum enim pro latere quadrati, cui quadratum ex CB adæquatum eſt, ſtatuerimus $y + b$: erit ipſa CB $\propto \frac{xx + bb}{2b}$; & AB, cujus quadratum quadrato ex $z + y + a$ æquiparatum eſt, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ad communem denominatorem ${}^2ab$ reductis, ſi ipſe deinde omittatur, fiet pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx - axx + abb - aab$.

Hinc, aſſumptis pro x, b, & a quantitatibus utcunque, ita tamen ut b & a ſingulæ ipſâ x ſint minores, liquet, quâ ratione quis tot triangula conſtituere poſſit, quot voluerit, quorum ſingula latera, & perpendicularis cadens extra, nec non baſis ſegmenta per rationales numeros abſolutos exprimantur.

Etenim ſi pro x ſumatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto 2abx \propto 12$, ſegmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, ſegmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde baſis AC fit 11; latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et ſic de aliis.

2^{dus}. *caſus, in quo perpendicularis cadit intra.*



Quod ad ſecundum caſum attinet, is eodem modo reſolvitur atque primus. Si enim, ut ſupra, baſin A C ponamus $\propto z$, perpendicularem BD $\propto x$, & ſegmentum D C $\propto y$: erit ſegmentum AD $\propto z - y$.

His ita conſtitutis, cum quadratum ex C B æquetur duobus quadratis ex C D, D B: erit $xx + yy$ æquale □^{to}. Hinc ponendo pro ejus latere $y + b$, habebitur $xx + yy \propto yy + {}^2by + bb$. Et fit, ut ante, $y \propto \frac{xx - bb}{2b}$.

Eodem modo, quia quadratum ex AB tantundem valet atque duo quadrata ex AD & DB: erit $xx + zz - {}^2zy + yy$ æquale □^{to}. Pro cujus radice ſi ponamus $z - y + a$, habebitur $xx + zz - {}^2zy + yy \propto zz - {}^2zy + yy + {}^2az - {}^2ay + aa$. Et fit $2ay \propto aa + {}^2az - xx$. Unde ſubrogando valorem ipſius y invenietur $z \propto \frac{bxx + axx - abb - aab}{2ab}$.

Ubi, ut ſupra, patet, ſumendo x, b, & a pro lubitu, quâ ratione inveniri poſſint y & z. E quibus porrò nullo negotio inveniuntur A B & B C. Nam cum pro latere quadrati, cui quadratum ex CB æquale ſuppoſitum eſt, ſtatuerimus $y + b$: erit ipſa CB $\propto \frac{xx + bb}{2b}$, & AB, cujus quadratum quadrato à radice $z - y + a$ adæquatum eſt, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$.

Quibus omnibus ſub eodem denominatore $2ab$ reductis, fiet, ipſo deinde rejecto, pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro A C $bxx + axx - abb - baa$.

Unde, aſſumptis utcunque quantitatibus x, b, & a, ita tamen ut b & a ſingulæ minores ſint quàm x, liquet, quo pacto ex iis triangula conſtitui poſſint, quorũ latera ſingula, & perpendicularis cadens intra, nec non baſis ſegmenta per num. rationales abſolutos exprimantur.

Si enim pro x accipiatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto {}^2abx \propto 12$, ſegmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, ſegmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde baſis A C fit 21, latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et ſic de aliis.

Idem

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Idem aliter per disjunctionem & conjunctionem duorum triangulorum rectangulorum.

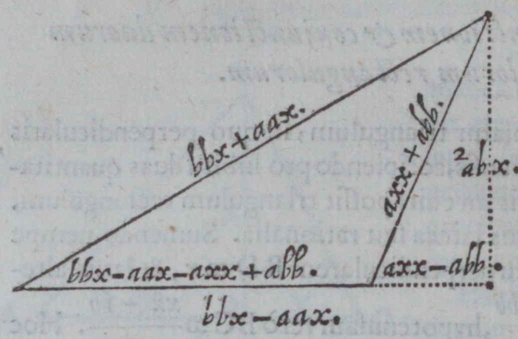
PRimò igitur, ut inveniatur triangulum, in quo perpendicularis cadit extra, patet ex oſtenſis, accipiendo pro lubitu duas quantitates x & b, quâ ratione ex iis inveniri poſſit triangulum rectangulum, quale ſuperius CBD, cujus latera ſint rationalia. Sumendo nempe latus unum circa rectum ſeu perpendicularem BD ꝏ x, & latus alterum ſeu baſin DC ꝏ $\frac{xx-bb}{2b}$, hypotenuſam verò BC ꝏ $\frac{xx+bb}{2b}$. Hoc eſt, in integris, multiplicando ubique per denominatorem $2b$, fiet, ipſo deinde rejecto, perpendicularis ꝏ $2bx$, baſis ꝏ $xx-bb$, & hypotenuſa ꝏ $xx+bb$.

Haud ſecus aſſumptis ad libitum duabus quantitatibus b & a, invenietur ex iis alterum triangulum, cujus perpendicularis eſt ꝏ $2ab$, & baſis ꝏ $bb-aa$, hypotenuſa verò ꝏ $bb+aa$.

Jam ut ex binis hiſce inventis triangulis tertium efformetur, cujus perpendicularis extra cadat, quæque ut & ſingula ipſius latera & baſis ſegmenta abſolutis numeris exprimatur, reduco ipſa ad eandem altitudinem. quod ſit quærendo quantitatibus $2bx$ & $2ab$, perpendicularibus aſſignatis, quantitatem $2abx$, minimam ſcilicet, quæ per eas ſine reliquo dividi poteſt. Hâc enim inventâ, ſi $2abx$ per $2bx$ & $2ab$ dividatur, & ortæ quantitates a & x per ſuas baſes & hypotenuſas multiplicentur: invenietur $axx-abb$ pro baſe, & $axx+abb$ pro hypotenuſa unius trianguli; at $bbx-aax$ pro baſi, & $bbx+aax$ pro hypotenuſa alterius trianguli, quorum utriuſque altitudo ſeu perpendicularis eſt $2abx$. Quæ duo triangula ſi ab eadem porrò perpendicularis parte conſtituta intelligantur, mutuâ ſuâ disjunctione triangulum referent, quod quæritur. Ipſum autem eſt quale ſequitur.

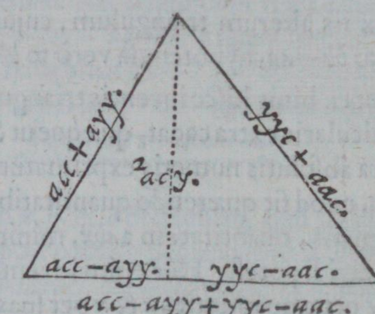
Deinde, ad inveniendum triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quoniam ſumendo pro lubitu duas quantitates c & y, per eas obtinetur triangulum rectangulum, cujus perpendicularis eſt $2cy$, baſis $cc-yy$, & hypotenuſa $cc+yy$; ſimiliterque aſſumptis y & a per eas alterum invenitur, cujus perpendicularis eſt $2ay$, baſis $yy-aa$, & hypotenuſa $yy+aa$: fit, ut ſi hæc ipſa ad eandem poſtea altitudinem reducta fuerint, quæſitum triangulum ex iis conſtituatur.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



Quocirca cum minima quantitas, quæ per *2cy* & *2ay* diviſibilis eſt, ſit *2acy*; & dividendo ^{2}acy per *2cy* fiat *a*; at *2acy* per *2ay* fiat *c*: ideo multiplicando $cc - yy$ & $cc + yy$ per *a*, fiet $acc - ayy$ pro baſe, & $acc + ayy$ pro hypotenuſa unius trianguli; at verò yy-aa & $yy + aa$ per *c*, fiet $yyc - aac$ pro baſe, & $yyc + aac$ pro hypotenuſa alterius trianguli. Quorum itaque communis altitudo ſeu perpendicularis eſt *2acy*.

Hinc ſi bina hæc triangula conjunctim poſita intelligantur, hoc eſt, ut unum ab una parte perpendicularis, & alterum ab altera parte reperiatur, component triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quæ haud aliter atque ſingula ipſius latera ac baſis ſegmenta per abſolutos numeros rationales exprimetur. Ipſum autem tale eſt.



SECTIO XI.

Modus inveniendi duo triangula ejuſdem baſis & altitudinis, quorum ſingula latera, baſis ſegmenta, & perpendiculares exprimantur per numeros rationales integros.

PRoblema hoc per antecedens reſolvitur, ad id nempe binis huc revocatis præcedentibus triangulis, cum quantitatibus adſcriptis. Primò enim, quia invenienda hæc triangula ejuſdem altitudinis requi-

requiruntur, habebitur æquatio inter $2abx$ & $2acy$. Unde pro x invenitur $\frac{cy}{b}$, & pro xx. $\frac{ccyy}{bb}$.

Deinde cum ipſa ejuſdem quoque baſis exiſtere debeant, erit ſimiliter $bbx - aax - axx + abb$ æquale $acc - ayy + yyc - aac$. Unde ſubrogatis valoribus ipſius x & xx, fit $\frac{bbcy - aacy}{b} - \frac{accyy}{bb} + abb \propto acc - ayy + yyc - aac$. Multiplicetur ubique per bb, & æquatio ritè ordinetur, fietque:

$$yy \propto \frac{\begin{matrix} +\,b^3cy & +\,aabbc \\ -\,aabc & +\,ab^4 \\ & -\,abbcc \end{matrix}}{bbc + acc - abb.}$$

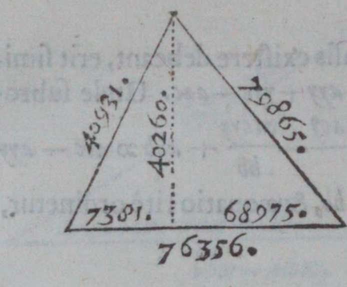
Jam ut in hac æquatione evitetur radicis extractio, ſupponatur $aabbc + ab^4 \propto abbcc$: invenieturque $a \propto c - \frac{bb}{c}$. Quoniam autem ſumendo c & b ad libitum, per eas invenimus reliquas quantitates a, y, & x, ſtatuendo nempe c majorem quàm b: fiet, ut, ſi accipiamus $c \propto 3$, & $b \propto 2$, pro a reperiatur $\frac{5}{3}$, pro y. $\frac{22}{61}$, & pro x. $\frac{33}{61}$. E quibus inde facile eſt ſingula utriuſque trianguli latera reperire, quemadmodum etiam baſis ſegmenta, & perpendicularem. In priori namque triangulo fiet $2abx \propto \frac{180}{183}$, $axx - abb \propto -\frac{68975}{11163}$, $axx + abb \propto \frac{79865}{11163}$, $bbx - aax \propto \frac{121}{183}$, & $bbx + aax \propto \frac{671}{183}$. In poſteriori verò triangulo, fiet $2acy$, ut ante, $\propto \frac{660}{183}$, $acc - ayy \propto \frac{165025}{11163}$, $acc + ayy \propto \frac{169865}{11163}$, $yyc - aac \propto -\frac{88669}{11163}$, & $yyc + aac \propto \frac{97381}{11163}$.

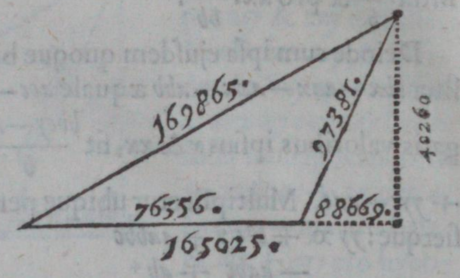
Porrò ne quem moveat, quòd lineæ hîc repertæ ſint, quæ nihilo ſunt minores, perinde ac ſi ſolutio illegitima aut abſurda foret, advertendum eſt, ipſas tantùm hoc caſu in plus convertendas eſſe, eaſdemque ad alteram partem perpendicularis ſumendas; ita ut in priori triangulo perpendicularis intra cadat, & in poſteriori extra, commutando videlicet unum triangulum in alterum: ſiquidem ſic inventa triangula quæſito omnino reſpondent.

Cæterùm ſi velimus, ut lineæ hæ omnes inventæ abſolutis numeris exprimantur: oportet duntaxat illas ſub communi denominatore reducere, qui eſt 6 .61.3 ſeu 11163 & eundem poſtea ubique rejicere. Unde bina hæc emergunt triangula:

Eodem

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16





Eodem modo infinita alia triangulorum paria invenire licet.

Ad hæc notatu dignum, ex allatis facile eſſe invenire trapezium, cujus duo latera ſint parallela, & in quo utraque diagonalis & perpendiculares, ex angulis in oppoſita latera demiſſæ, perinde atque ſingula ipſius latera, eorumque ac diagonalium ſegmenta, rationales exiſtant.

SECTIO XII.

Solutio Problematis, quod anno 1633 Pariſiis palàm fuit propoſitum, qualem illam adinvenit Vir illuſtris R. des CARTES.

Eſt autem tale.

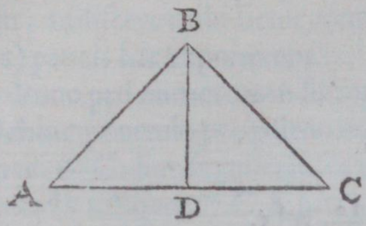
Invenire duo triangula æquicrura ejuſdem areæ & ambitus, quorumque ſingula latera & perpendiculares ſint inter ſe ut numerus ad numerum.

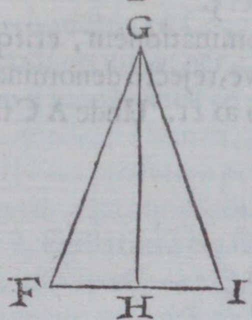
Sequitur ſolutio.

Primò quia latera debent exprimi numeris abſolutis, pro latere AB pono $aa + bb$, & $2ab$ pro A D. Unde D B erit $aa - bb$, & ambitus $2aa + {}^{2}bb + {}^{4}ab$.

In ſecundo autem triangulo, ſi ponatur eodem modo $FG \infty kk + dd$, $FB \infty 2kd$, & $HG \infty kk - dd$: erit ambitus trianguli $FGI \infty 2kk + {}^{2}dd + {}^{4}kd$.

Unde





Unde patet $k+d$ & $a+b$ radices quantitatum $kk+dd+2kd$ & $aa+bb+{}^{2}ab$ eſſe æquales.

Ac proinde in ſecundo triangulo, quia k ignoratur, ut & d, ponatur $a+x$ pro k, & $b-x$ pro d: eritque FH $\propto 2ab-2ax+{}^{2}bx-{}^{2}xx$, & HG $\propto aa-bb+{}^{2}ax+{}^{2}bx$. quæ in ſe invicem ducta producunt aream trianguli FGI $\propto 2a^3b-{}^{2}a^3x+{}^{6}aabx-6aaxx-{}^{2}ab^3+{}^{6}abbx-{}^{2}b^3x+6bbxx-4ax^3-{}^{4}bx^3$. Quæ ſumma æquatur areæ prioris trianguli, quæ eſt $2a^3b-{}^{2}ab^3$.

Itaque demptis utrinque æqualibus $+2a^3b$, & additis $-{}^{2}ab^3$, & ponendo ſingula ſub contrario ſigno: erit $4ax^3+{}^{4}bx^3+{}^{6}aaxx-6bbxx+{}^{2}a^3x+{}^{2}b^3x-{}^{6}aabx-6abbx \propto 0$.

Quod totum dividi poteſt per $4ax+4bx$.

Eritque $xx+\frac{3a}{2}x-\frac{3b}{2}x+\frac{1}{2}aa-{}^{2}ab+\frac{1}{2}bb \propto 0$.

Sive $xx \propto -\frac{3a}{2}x+\frac{3b}{2}x-\frac{1}{2}aa+{}^{2}ab-\frac{1}{2}bb$.

Unde $x \propto \frac{-3a+3b}{4}+\sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$.

Quia verò x numerus rationalis eſſe debet, neceſſum eſt, ut $aa+14ab+bb$, rejecto denominatore, ſit numerus quadratus. Igitur ponimus radicem ejus eſſe $a+b+c$. ubi c & b cognitæ præſupponuntur, a verò ignoratur.

Proinde $aa+{}^{2}ab+{}^{2}ac+bb+{}^{2}bc+cc \propto aa+14ab+bb$.

Et ſit $a \propto \frac{2bc+cc}{12b-{}^{2}c}$.

Quilibet ergo numerus pro b & c ſumi poteſt, modò a exurgat major quàm b: quia ſuperiùs erat $aa-bb$.

Ut ſi faciam $b \propto 1$, & $c \propto 3$: habebo $a \propto \frac{5}{2}$.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ut verò eliciatur x, reſpiciendum eſt ad æquationem : $x \propto -\frac{3a+3b}{4} + \sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$

Eritque $x \propto \frac{1}{2}$

$a \propto \frac{5}{2}$. ergo $aa \propto \frac{25}{4}$

$b \propto 1$ ergo $bb \propto 1$

& $ab \propto \frac{5}{2}$. unde $2ab \propto \frac{10}{2}$, vel 5.

Reducantur fractiones ad eandem denominationem, eritque in priori triangulo AB $\propto aa + bb \propto \frac{25}{4} + \frac{4}{4}$, ſive, rejecto denominatore, $\propto 29$; & AD $\propto 2ab \propto 20$; & DB $\propto aa - bb \propto 21$. Unde AC fit 40, & ambitus 98, & area 420.

In poſteriori verò triangulo

$k \propto a + x \propto 3$

$d \propto b - x \propto \frac{1}{2}$

$kk \propto 9$

$dd \propto \frac{1}{4}$. Unde $kk + dd \propto \frac{37}{4}$

$kk - dd \propto \frac{35}{4}$

& $2kd \propto \frac{12}{4}$.

Et rejectis denominatoribus :

Erit FG $\propto kk + dd \propto 37$

HG $\propto kk - dd \propto 35$

& FH $\propto 2kd \propto 12$. Unde FI erit $\propto 24$.

Ambitus ergo erit 98, & area 420. ut ante.

SECTIO XIII.

Quæſtio XIX, *libri* V *Arithmeticorum Diophanti.*

Invenire tres numeros, ut cubus ſummæ eorum, quovis ipſorum detracto, faciat cubum.

QUæſtionis hujus ſolutio à Diophanto perplexè tradita, cum ab acutiſſimo Arithmetico, Ludolpho à Collen, Matheſeos olim in alma hac Univerſitate Profeſſore ac prædeceſſore meo, aliter inventa fuerit : haud ingratum autè re fore judicavi, ſi eam qualem ex ipſius literis,

literis, benevolentiâ ſæpius laudati Viri, D. Nicolaï Huberti à Perſijn, addiſcere mihi licuit, (cui cum illo magna interceſſit familiaritas) paucis hîc exponerem.

Pono pro numerorum ſumma 4 N, eritque cubus ſummæ 64 C. Dehinc ponendo pro primo numero 56 C, pro ſecundo 37 C, & pro tertio 63 C: fiet, ſingulis hiſce ex 64 C ſublatis, pro 1mo reliquo 8 C, pro 2do reliquo 27 C, & pro 3^tio^ reliquo 1 C. Qui omnes cubi ſunt.

Porrò additis 56 C, 37 C, & 63 C, erit ſumma 156 C æqualis 4 N. Dividatur utrinque per 4 N, & fit 39 Q æquale 1.

Jam ſi hic numerus 39 quadratus fuiſſet, ſoluta eſſet quæſtio. Cum autem quadratus non ſit, pro lateribus cuborum, qui relinqui debent, pono 1N—1 pro latere primi, 4—1N pro latere ſecundi, & 2 pro latere tertii. Quorum cubi, 1 C—3 Q+3 N—1, 64—48 N+12 Q—1C, & 8, ſigillatim à 64 ſubducti, relinquunt numeros 65+3 Q—1C—3N, 48N+1C—12Q, & 56.

Quoniam verò trium horum numerorum ſumma eſt 121+45 N—9 Q: erit 121+45 N—9 Q æquale 4. & fit $\frac{121+45\,N-9\,Q}{4}$ æquale 1. Reſtat itaque ut $\frac{121+45N\ 9Q}{4}$ ſit quadratus. Pono pro ejus latere $\frac{11+1N.}{2}$ Eritque $\frac{121+22N+1Q}{4} \infty \frac{121+45N-9Q.}{4}$

Et fit 1N. $\frac{23}{10}$. Poſueram autem 1N—1 pro latere 1^mi^ cubi, 4—1N pro latere 2^di^, & 2 pro latere 3^tii^. Erunt igitur ipſa latera $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, & 2. Horum cubi ſunt $\frac{2197}{1000}$, $\frac{4913}{1000}$, & 8. Qui ſinguli ex 64 ſubducti, relinquunt numeros $\frac{61803}{1000}$, $\frac{59087}{1000}$, & 56.

Inventi itaque ſunt tres numeri, qui ſinguli ex 64 detracti relinquunt cubos, & in unam ſummam collecti faciunt quadratum.

Hinc ſuppoſitâ, ut ſupra, pro ſumma quæſitorum numerorum 4N, & pro ejus cubo 64 C, pono jam pro 1mo numero $\frac{61803}{1000}$ C, $\frac{59087}{1000}$ C pro 2do, & 56C pro 3^tio^, fit eorum ſumma $\frac{176890}{1000}$ C æqualis 4N. Hoc eſt, $\frac{17683}{400}$ æquale 1. Unde 1N fit $\frac{20}{133}$, ac proinde 1C $\frac{8000}{2352637}$. Id quod ductum in $\frac{61803}{1000}$, dat $\frac{494424}{2352637}$ pro 1mo numero, & ductum in $\frac{59087}{1000}$, dat $\frac{472696}{2352637}$ pro 2do numero, ac denique ductum in 56, dat $\frac{448000}{2352637}$ pro 3^tio^ numero. Et manifeſtum eſt, his additis, ſummam fore $\frac{1415120}{2352637}$ ſeu $\frac{80}{133}$, æqualem 4 N. A cujus cubo $\frac{512000}{2352637}$ ſi auferas $\frac{494424}{2352637}$, $\frac{472696}{2352637}$, & $\frac{448000}{2352637}$, relinquentur cubi $\frac{17576}{2325637}$, $\frac{39304}{2352637}$, & $\frac{64000}{2352637}$. Quorum latera ſunt $\frac{26}{133}$, $\frac{34}{133}$, & $\frac{240}{133}$. Con-

ſtat ergo, numeros ritè eſſe inventos. Cujus rei ſoli Deo debetur gloria.

Cæterùm ſciendum, quæſtionem hanc convenire cum quæſtione 68, quæ una ex centum illis exiſtit, quas ſupra dictus Arithmeticus Ludolphus à Collen ad ſolvendum propoſuit in libro ſuo de Circulo, Belgicè edito, quarum ſequens 69 ejuſdem eſt argumenti, nempe:

Invenire quatuor numeros, ita ut, ſi à cubo eorum ſummæ ipſi ſigillatim auferantur, reliqui ſint cubi.

Cujus enodatio cum eâdem arte atque præcedentis obtineri queat, ſatis duxi numeros duntaxat, quales à Nicolao Huberti inventi ſunt, hîc aſcribere.

Sunt autem tales: $\frac{867160}{4657463}$, $\frac{787400}{4657463}$, $\frac{13527640}{125751501}$, & $\frac{14087528}{125751501}$; aut $\frac{12172736}{64481201}$, $\frac{11296152}{64481201}$, $\frac{9112168}{64481201}$, & $\frac{4724776}{64481201}$. Alios verò tres, quos preter tres Ludolphi numeros invenit, ſunt $\frac{15817815000}{86526834967}$, $\frac{9568152000}{86526834967}$, & $\frac{8925120000}{86526834967}$. Qui quoque quæſtione de duobus tantùm numeris propoſitâ, hoſce adinvenit numeros $\frac{37}{125}$, & $\frac{63}{125}$; aut $\frac{175608}{493039}$, & $\frac{173888}{493039}$; aut etiã $\frac{103045092893}{692214679736}$, & $\frac{148548397475}{692214679736}$. Et ſic de aliis.

SECTIO XIV.

De Progreſſionibus Arithmeticis.

Quoniam in his Progreſſionibus termini eodem continuè exceſſu ſe mutuò excipiunt, fit, ut in iis quinq; præcipuè ſpectanda veniant: nimirum, vel minor terminus, vel major, vel exceſſus Progreſſionis, vel multitudo terminorum, vel eorundem denique aggregatum. Quocirca, ut earum doctrina ritè pertractetur, viſum fuit earundem conſtitutionem ex origine ſua deducere, atque rem omnem paucis ob oculos ponere.

Hunc in finem inſpiciatur ſequens Progreſſio $\overset{1}{a}.\ \overset{2}{a+b}.\ \overset{3}{a+2b}.\ \overset{4}{a+3b}.\ \overset{5}{a+4b}$, in qua quinque ſunt termini, quorum minor deſignatur per a, major per $a+4b$, & in qua b Progreſſionis exceſſus exiſtit.

Quibus poſitis, patet majorem terminum $a+4b$ componi ex minori a, & ex $4b$, Progreſſionis exceſſu toties ſumpto, quot ſunt termini

mini minus 1. Quod idem de quotcunque terminis intelligendum eſt.

Hinc, datis minore extremo, Progreſſionis exceſſu, & multitudine terminorum, invenietur major extremus, ſi multitudo terminorum multata unitate ducatur in Progreſſionis exceſſum, & productum addatur minori.

Datis autem majori extremo, Progreſſionis exceſſu, & multitudine terminorum, invenietur minor extremus, auferendo idem productum à majori.

Deinde datis extremis, & multitudine terminorum, invenietur Progreſſionis exceſſus, ſi extremorum differentia per multitudinem terminorum minus 1 dividatur.

Datis verò extremis, & Progreſſionis exceſſu, invenietur multitudo terminorum, ſi diviſâ hâc extremorum differentiâ per Progreſſionis exceſſum, ei quod oritur addatur unitas. Quæ quidem omnia ex diligenti Progreſſionis inſpectione manifeſta fiunt.

Poſtea, quoniam in omnibus terminis ejuſdem Progreſſionis reperitur a, & b in ſingulis poſt primum deinceps ſemel ampliùs conſpicitur quàm in proximè antecedentibus, fit ut, ſi extremi a & $a+4b$ ſimul addantur, tantundem fiat atque ſi addantur $a+b$ & $a+3b$, ab extremis æquè remoti; aut etiam atque medius $a+2b$ bis ſumptus, ſi multitudo terminorum (ut hîc) impar fuerit. Id quod ſimiliter de quotcunque aliis terminis eſt accipiendum. Unde conſtat, ſi extremis datis, & multitudine terminorum, horum omnium aggregatum ſit inveniendum: opus tantùm eſſe extremorum ſummam multiplicare per ſemiſſem multitudinis terminorum.

Hinc ſi extremi fuerint a & e, & multitudo terminorum i, quæraturque eorundem aggregatum y: erit $y \propto \frac{ai+ei}{2}$.

Datis autem extremis a, e, & aggregato terminorum y, ad inveniendam multitudinem terminorum i, quoniam y æquatur $\frac{ai+ei,}{2}$ hoc eſt, multiplicando utrinque per 2, $2y$ æquatur $ai+ei$, hinc ſi utrobique dividatur per $a+e$, fiet $i \propto \frac{2y}{a+e}$.

At verò datis uno extremorum a, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniatur alter extremorum

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

e, quoniam $2y$ æquatur $ai + ei$, transferendo ai in alteram partem, fiet $2y - ai \propto ei$. Unde, dividendo utrinque per i, invenietur $e \propto \frac{2y}{i} - a$. Haud ſecus, datis e, i, & y: erit $a \propto \frac{2y}{i} - e$.

Iiſdem poſitis, ſi exceſſus Progreſſionis ſit u, & ex eo & binis extremis a, e, quorum a minor & e major intelligatur, quærendum ſit terminorum adgregatum y: oportet, invento $y \propto \frac{ai+ei}{2}$, in locum i ex ſuperioribus ſubſtituere $\frac{e-a}{u} + 1$, fietque $y \propto \frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$.

Eodem modo, datis uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & multitudine terminorum i, ad inveniendum eorundem aggregatum y, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, oportet tantùm in locum e ſubſtituere valorem inventum $\frac{2y}{i} - a$, & in locum ee ejuſdem quadratum $\frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + aa$, fietque $y \propto \frac{2yy}{uii} - \frac{{}^2ay}{ui} + \frac{y}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $y \propto \frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui$. Haud ſecus datis e, u, & i, erit $y \propto -\frac{1}{2}uii + ei + \frac{1}{2}ui$.

Rurſus datis extremis a, e, & aggregato terminorum y, ut inveniatur Progreſſionis exceſſus u, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2}$, hoc eſt, multiplicando ubique per $2u$, $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, tranſferendo au & eu in alteram partem, fiet $2uy - au - eu \propto ee - aa$. Unde dividendo utrinque per $2y - a - e$ invenietur $u \propto \frac{ee-aa}{2y-a-e}$.

Similiter dato uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & adgregato terminorum y, ad inveniendum alterum extremum e, quoniam $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, transferendo $-aa + au + eu$ in alteram partem, fiet $ee \propto -ue + {}^2uy + aa - au$: eritque extractâ radice $e \propto -\frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}uu + {}^2uy + aa - au}$. Datis autem e, u, & y, ſi quæratur a: erit $a \propto + \frac{1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1}{4}uu - {}^2uy + ee + eu}$.

Haud ſecus datis exceſſu Progreſſionis u, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniantur extremi a & e, quoniam rurſus $2uy$ æquatur $ee - aa + au + eu$, oportet tantùm in locum e & a ſub-

ſubſtituere valores inventos $\frac{2y}{i} - a$, & $\frac{2y}{i} - e$, & in locum *ee* & *aa* horum valorum quadrata, habebiturque $2uy \propto \frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + \frac{2uy}{i}$, & $2uy \propto -\frac{4yy}{ii} + \frac{4ey}{i} + \frac{2uy}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenietur $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui$.

Denique dato uno extremo *a*, Progreſſionis exceſſu *u*, & aggregato terminorum *y*, ad inveniendam eorum multitudinem *i*, quoniam *a* æquatur $\frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, multiplicando ubique per $2i$, fiet $2ai \propto 2y + ui - uii$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $ii \propto \frac{+ui + 2y - 2ai}{u}$. Et fit, extractâ radice, $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$. Pari ratione datis *e*, *u*, & *y*, invenietur $i \propto \frac{1}{2} + \frac{e}{u} \pm \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy}$.

In quorum, ſi lubet, illuſtrationem ac uſum addantur ſequentes quæſtiones.

1. Aliquis ſolvere debet primâ ſeptimana 1 fl. ſecundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. & ſic deinceps uſque ad 28 ſeptimanas, ſolvendo nempe ſingulis ſeptimanis ſequẽtibus ſemper 3 fl. plus quàm in proximè antecedentibus. Quæritur quantum ad finem hujus temporis perſolvere teneatur? *Facit 82 florenos.*

Ad quæſtionis hujus enodationem concipiatur Progreſſio Arithmetica 28 terminorum, in qua primus terminus eſt 1, & exceſſus Progreſſionis 3, cujuſque ultimus terminus eſt inveniendus. Is autem hoc modo invenitur. Ex 28 terminorum multitudine ſublatâ unitate, ducatur reliquum 27 in Progreſſionis exceſſum 3, & ad productum 81 addatur primus terminus 1, fietque ultimus 82, deſignans florenos, quos ad finem 28 ſeptimanæ perſolvere tenetur.

2. Si quis finitis 28 ſeptimanis 82 fl. perſolvere tenetur, & ſingulis ſeptimanis retrò numerandis 3 fl. minus ſolvere debeat quàm in proximè ſequentibus: Quæritur quantum ad finem primæ ſeptimanæ ſolvendum habeat?

Ex

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ex 82 fl. ſubductis 81 fl. reſtabit 1 fl. Quantum ſcilicet ad finem $1^{\text{mæ}}$ *ſeptimanæ ſolvendum reſtat.*

3. Si quis per 28 ſeptimanas ad ſingularum finem inæqualem pecuniæ ſummam erogare debeat, eodem ſemper excreſcentem pretio, & ad primæ quidem finem ſolvere teneatur 1 fl.; at ad ultimæ finem 82. fl. Quæritur in quantum pretium continuè augendum ſit?

Sublato 1 fl. de 82 fl. ſi reliquum 81 fl. dividatur per 27, orietur 3, pretium florenorum, quibus ſequens pecuniæ ſumma deinceps proximè antecedentem excedere debet.

4. Aliquis debet primâ ſeptimanâ 1 fl. ſecundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. atque ita deinceps, ſequenti ſeptimanâ 3 fl. amplius quàm in proximè præcedenti. Quæritur, ſi ultima ſolutio fuerit 82 florenorum, per quot ſeptimanas dictam ſolutionem præſtare teneatur.

Sublato 1 fl. de 82 fl., reliquum 81 fl. dividatur per 3 fl., orieturque 27. Cui additâ unitate habebitur 28, numerus ſeptimanarum quæſitus.

5. Eſt Progreſſio Arithmetica 28 terminorum, cujus primus terminus eſt 1, & ultimus 82. Quæritur ſumma omnium? *Facit* 1162.

a eſt 1, e eſt 82, & i eſt 28. Quæritur y. Hinc cum y ſit $\propto \frac{ai+ei}{2}$, *erit* $y \propto 1162$.

6. Aliquis debet 1162 florenos, quos perſolvere tenetur diverſis temporibus, erogando ſingulis ſeptimanis certam pecuniæ ſummam. Quæritur, ſi primâ ſeptimanâ ſolvat 1 fl. & reliquis ſeptimanis continuè pretium æqualiter augeat, ſic ut in ultima ipſi numerandi ſint 82 floreni, quot ſeptimanis dicta ſumma perſolvetur? *Facit* $i \propto \frac{2y}{a+e} \propto 28$ *ſeptimanis.*

7. Si 1162 fl. ſolvendi ſint intra 28 ſeptimanas, & in prima quidem dari debeat 1 fl.; at in ſingulis ſequentibus pretium continuè uſque ad ultimam ſeptimanam æqualiter augendum ſit: Quæritur quantum in ultima ſolvere oporteat? *Facit* $e \propto \frac{2y}{i} - a \propto 82$ *fl.* Eodem modo, ſi 1162 fl. ſolvi debeant ſpacio 28 ſeptimanarum, dando in fine hujus temporis 82. fl., & ſingulis ſeptimanis pretium retrò æqualiter ſit diminuendum, invenietur ad finem primæ ſeptimanæ ſolvendum eſſe $a \propto \frac{2y}{i} - e \propto 1$ fl.

8. Progreſſionis Arithmeticæ primus terminus eſt 1, & ultimus 82. Quæri

82. Quæritur aggregatum terminorum, ſi exceſſus Progreſſionis u ſit $\propto 3$. *Facit* $y \propto \frac{ee - aa}{2u} + \frac{a + e}{2} \propto 1162$.

9. Si quis primâ ſeptimanâ ſolvere debeat 1 fl. & ſingulis ſequentibus ſeptimanis deinceps 3 fl. amplius quàm in proximè antecedentibus, idque per 28 ſeptimanas continuare teneatur: Quæritur quid in toto ſolvere oporteat? *Facit* $y \propto \frac{1}{2}\, uii + ai - \frac{1}{2} ui \propto 1162$ fl. Eodem modo, ſi finitis 28 ſeptimanis ſolvendi ſint 82 fl, & ſingulis præcedentibus 3 floreni minus ſolvi debeant quàm in proximè ſequentibus, donec ad primæ finem perventum fuerit, invenietur ſimiliter pecuniam omnem erogatam fore $y \propto - \frac{1}{2} uii + ei + \frac{1}{2} ui \propto 1162$ fl.

10. Si quis ſolvere debeat 1162 fl. per ſeptimanas, ita ut in prima numerare teneatur 1 fl. & in ultima 82 fl. augendo perpetuò pretium à prima uſque ad ultimam æqualiter: Quæritur quantum ſingulis ſequentibus ſeptimanis plus ſolvere teneatur quàm in proximè præcedentibus? *Facit* $u \propto \frac{ee - aa}{2y - a - e} \propto 3$.

11. Aliquis ſolvere debet 1162 fl. hâc conditione, ut ad finem 1[mæ] ſeptimanæ eorum 1 fl. ſolvat, & ad finem ſingularum ſequentium continuè 3 plus quàm ad proximè præcedentium, donec omnes 1162 fl. ſoluti fuerint. Quæritur quanta ultima ſolutio futura ſit? *Facit* $e \propto - \frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{4}uu + 2uy + aa - au} \propto 82$ fl. Eodem modo, ſi 1162 fl. ſolvi debeant, ita ut ultima ſolutio ſit 82 florenorum, eademque continuè 3 florenis ſit diminuenda, donec tota ſumma 1162 ſoluta fuerit, invenietur primam ſolutionem a eſſe $\propto + \frac{1}{2}u - \sqrt{\frac{1}{4}uu - 2uy + ee + eu} \propto 1$ fl.

12. Si 1162 floreni ſolvendi ſint intra 28 ſeptimanas, ita ut ſingulis ſequentibus ſemper 3 fl. ampliùs numerandi ſint quàm in proximè antecentibus: Quæritur quot floreni in prima & quot in ultima erogari debeant? *Facit* $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui \propto 1$ fl. *in prima ſeptimana*, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui \propto 82$ fl. *in ultima*.

13. Progreſſionis Arithmeticæ primus terminus eſt 1, exceſſus Progreſſionis 3, & aggregatum terminorum 1162. Quæritur multitudo terminorum. *Facit* $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy} \propto 28$. Haud

Kkk ſecus,

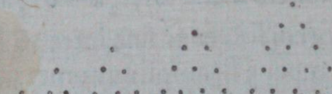
ſecus, datis ultimo termino 82, exceſſu Progreſſionis 3, & aggregato terminorum 1162, erit $i \infty \frac{1}{2} + \frac{e}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - {}^{2}uy} \infty 28$.

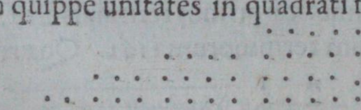
SECTIO XV.

De numeris Multangulis ſeu Polygonalibus.

NUmeris Arithmeticè proportionalibus proximè ſuccedunt illi, qui vulgò Multanguli ſeu Polygonales appellantur, & ex iiſdem originem ſuam ducunt.

Sunt autem ipſi omnes ſummæ numerorum Progreſſionis Arithmeticæ ab unitate, quorum numerus angulorum binario ſemper excedit Progreſſionis exceſſum, & latus multitudinem terminorum deſignat.

Ut ſi Progreſſio fuerit numerorum ab unitate in ſerie naturali, id eſt, per 1 excreſcentium, utputa 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. cujus termini ab initio continuè addantur, fient inde trianguli 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. utpote qui ſecundùm ſuas unitates in trianguli formam diſponi poſſunt, hoc modo:  &c.

Sic & ſi Progreſſio fuerit numerorum ab unitate deinceps per 2 progredientium, id eſt, ſub qua omnes impares numeri comprehendantur, nimirum: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, &c. & termini hujus ab initio continuè addantur, fient inde quadrati numeri 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64, &c. quorum quippe unitates in quadrati formam collocari queunt, hoc pacto: , &c. Unde inferre licet, quadratum quemlibet duplicem originem ſortiri, hoc eſt, vel numeri ali-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

alicujus in ſe ipſum ductu procreari, vel etiam ex tot imparium ab unitate in unam ſummam collectione, quot unitates continet ejus latus, conſtare.

Haud ſecus ſi numeri ab unitate deinceps per 3 aſcendant, id eſt, Progreſſio illa fuerit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22, &c. atque termini hujus ab initio continuè accumulentur, fient inde pentagoni 1. 5. 12. 22. 35. 51. 70. 92, &c.

Pari ratione Progreſſione ab unitate deinceps per 4 excreſcente, utputa 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29, &c. dabunt hujus termini ab initio in unam ſummam continuè collecti hexagonos 1. 6. 15. 28. 45. 66. 91. 120, &c. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc dato angulorum numero, ſi ab eo binarius auferatur, reliquum erit exceſſus Progreſſionis, è qua Polygonus componitur.

Porrò, quoniam, quæ ad horum numerorum tractationem ſpectant, ad duo præcipua capita revocari queunt, quę ſunt, ut è dato latere inveniatur polygonus, & contra ut è dato polygono eruatur latus, locus exigit, ut de his in genere ſcripturi, quò ad omnes ſimul polygonos referri poſſint, funditùs ipſa repetamus atque ex origine ſua derivemus.

Quocirca ut ex dato latere inveſtigetur polygonus, ſuppoſito latere $\propto i$, & polygono $\propto y$, concipiatur Progreſſio Arithmetica, in qua primus terminus eſt 1, exceſſus Progreſsionis u, & multitudo terminorum i, quorumque aggregatum y eſt inveniendum.

Hunc in finem, cum, primo termino exiſtente a, per antecedentem Sectionem, y æquetur $\frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui$, erit, ſubſtituto 1 in locum a, $y \propto \frac{1}{2}uii + i - \frac{1}{2}ui$. Deſignans in genere, quo pacto ex dato latere quilibet inveniatur polygonus. Ubi advertendum, quantitatem u datam intelligi, quippe illa (uti dictum) binarii ſublatione à polygoni angulorum numero, qui ex cognomine ejus ſemper notus eſt, innoteſcit.

Quòd ſi verò ad Progreſsionis hunc exceſſum u reſpicere non lubeat, ſed ex ſolo latere i, & angulorum numero, quem n vocamus, ipſe polygonus y inveniendus ſit: oportet tantùm in locum u ſubrogare $n-2$, fietque $y \propto \frac{1}{2}nii - \frac{1}{2}ni - ii + 2i$ ſeu $\overline{\frac{1}{2}ni - \frac{1}{2}n - i + 2}$ in i.

His igitur ita ſe habentibus, ut pateat, quâ ratione inde ſpeciales regulæ deducendæ ſint, quibus ex quovis latere multangulus certi angulorum numeri obtineatur: opùs tantùm erit in locum u vel n in triangulis ſubrogare 1 vel 3, in quadratis 2 vel 4, in pentagonis 3 vel 5,

in hexagonis 4 vel 6, in heptagonis 5 vel 7, &c. relinquendo *i* indeminatam. Unde ſequentes regulæ reſultant:

$$y \propto \frac{1ii + 1i}{2}, \text{ pro triangulis}$$

$$y \propto \frac{2ii \pm 0i}{2}, \text{ pro quadratis}$$

$$y \propto \frac{3ii - 1i}{2}, \text{ pro pentagonis}$$

$$y \propto \frac{4ii - 2i}{2}, \text{ pro hexagonis}$$

$$y \propto \frac{5ii - 3i}{2}, \text{ pro heptagonis. Atque ſic ulteriùs in infinitum.}$$

Quibus reſpondent ea, quæ Bacchetus affert in Commentariis ſuis ſuper Diophantum, ubi in eundem finem has depromit regulas ſeu canones.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, reſidui ſemiſsis erit quæſitus polygonus.

vel,

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

vel etiam,

Ducito datum latus unitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. Vel alios denique canones, quos recenſere omnes nimis longum foret.

Hinc ſi *i* ſeu latus datum ſit 12, & quæratur ejuſdem triangulus, erit $y \propto \frac{1ii + 1i}{2} \propto 78$. Ac proinde cum numerus punctorum, in quibus plures rectæ indefinitæ, quarum nullæ parallelæ ſunt, ſe invicem ſecant, ſemper triangulus exiſtat: liquet 13 lineas in 78 punctis nec pluribus ſe mutuò interſecare.

Non ſecus latere exiſtente 12 quinquangulus erit 210, hexangulus 276, heptangulus 342, atque ita de aliis.

De-

Denique dato polygono ut inveniatur latus, oportet, inventâ $y \propto \frac{1}{2} uii + i - \frac{1}{2} ui$, æqualitatem ſecundùm artem de i ordinare, ſumendo i eſſe quantitatem incognitam, at verò u & y eſſe cognitas. Fietque $ii \propto \frac{+ui + 2y \atop -2}{u}$. Unde extractâ radice invenitur

$$i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \sqrt{\frac{uu - 4u + 4 + 8uy}{4uu}}, \text{ vel } i \propto \frac{u - 2 + \sqrt{uu - 4u + 4 + 8uy}}{2u}.$$

Deſignans in genere quâ ratione ex dato quolibet polygono latus inveſtigari poſſit.

Idem obtinere licet, ſi, ut in præcedenti Sectione Progreſſionis Arithmeticæ, cujus primus terminus eſt a, exceſſus Progreſſionis u, & aggregatum terminorum y, quæratur multitudo terminorum i. Hæc enim cum ſit $\propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$, ſubrogato 1 in locum a, erit $i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - u + 1 + 2uy}$ ſeu $\frac{u - 2 + \sqrt{uu - 4u + 4 + 8uy}}{2u}$, ut ante. Aut etiam ſubſtituendo $n - 2$ pro u, erit $i \propto \frac{n-4}{2n-4} + \frac{1}{2n-4}\sqrt{nn - 8n + 16 + 8ny - 16y}$ ſeu $\frac{n - 4 + \sqrt{nn - 8n + 16 + 8ny - 16y}}{2n-4}$.

Ex quibus jam facile eſt ſpeciales regulas pro ſingulis polygonis conficere.

Etenim, ſi, ut ſupra, quum y relinquitur indeterminata, pro u vel n in triangulis ſubrogemus 1 vel 3, in quadrangulis 2 vel 4, in quinquangulis 3 vel 5, atque ita porrò, emergent inde regulæ ſequentes, nimirum: $i \propto \frac{-1 + \sqrt{1 + 8y}}{2}$, pro triangulis

$i \propto \frac{8\ 0 + \sqrt{0 + 16y}}{4}$, pro quadrangulis

$i \propto \frac{+1 + \sqrt{1 + 24y}}{6}$, pro quinquangulis

$i \propto \frac{+2 + \sqrt{4 + 32y}}{8}$, pro ſexangulis

$i \propto \frac{+3+\sqrt{9+40y}}{10}$, pro ſeptangulis. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Quibus ſimilia ſunt ea, quæ à Bacheto afferunrur in inventionem lateris, quando polygonus eſt datus, ubi ſic ſcribit:

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, ſummæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, ſummam divide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæſitum latus.

Hinc ſi datus multangulus y ſit triangulus 21, & quæratur ejus latus i, ponendum tantummodò erit $\frac{1ii+1i}{2} \propto 21$, hoc eſt, $ii \propto -1i+42$. Et fit, extractâ radice, $i \propto 6$. Vel etiam, quia i æquatur $\frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2}$, & y valet 21, erit $i \propto 6$. ut ante.

Haud ſecus, ſi 21 fuerit octangulus, invenietur latus ejus fore 3. At verò 21 exiſtente numero 21 angulorum, latus ipſius erit 2.

Pari ratione, dato numero 1225, eoque exiſtente triangulo, quadrangulo, ſexangulo, ac 1225gulo, latera erunt 49, 35, 25, & 2. Atque ita de aliis.

Cæterùm antequam horum numerorum tractationi finem imponamus, breviter nobis adhuc dicendum ſit, quot modis datus numerus polygonus dici queat. Ut ſi datus numerus ſit 36.

Primò itaque, quia numerus quilibet à ternario multangulus eſt, habens tot angulos quot ipſe continet unitates, cujus latus eſt 2, numerus ab unitate proximus, conſtat 36 eſſe polygonum 36 angulorum. quo igitur nomine triginta-ſexangulus dici poterit.

Deinde, quia ex 36 elici poteſt radix quadrata, quæ eſt 6, evidens eſt 36 eſſe quoque quadratum.

Denique quia 36 octies ſumptus ac unitate inde auctus facit quadratum 289, cujus latus 17 unitate multatum ac deinde per 2 diviſum dat 8, integrum numerum: patet 36 eſſe pariter triangulum, cujus latus eſt 8. Quoniam verò multiplicato 36 per 24 ac producto addito 1, aut per 32 ac producto addito 4, aut per 40 ac producto addito 9, & ſic deinceps, nunquam fit quadratus: convincitur 36 tribus duntaxat prædictis modis eſſe multangulus. Atque ita de aliis.

SE-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIO XVI.

De Progreſſionibus Geometricis.

PRogreſsionum harum naturam cum definiat terminorum ſecundùm eandem rationem continuatio, ſuffecerit, ſi, innixi huic fundamento, ea, ex quibus reliqua, doctrinam ipſarum concernentia, facili negotio deducuntur, levi penicillo adumbremus.

Hinc ſi Progreſſio fuerit trium terminorum, utputa a, b, & c, quoniam propter eandem rationem primi termini ad ſecundum atque ſecundi ac tertium, $\frac{a}{b}$ eſt $\propto \frac{b}{c}$, vel etiam $\frac{b}{a} \propto \frac{c}{b}$, fiet, multiplicando per crucem, $ac \propto bb$. Id quod oſtendit, ſi tres quantitates ſint proportionales, productum extremarum a & c eſſe æquale ei, quod fit ex media b in ſe ducta. Ac proinde datis duobus primis terminis a & b, ut ex iis inveniatur tertius c, opùs tantùm eſſe dividere productum utrumque per a, fietque tertius $c \propto \frac{bb}{a}$.

Similiter primo termino exiſtente a, & ſecundo b, ſi progreſſio ulteriùs in quatuor terminis continuari debeat, quoniam tertius terminus eſt $\frac{bb}{a}$, atque hujus rurſus quadratum æquetur ei quod fit ex ſecundo in quartum, fiet, ſtatuendo quartum terminum eſſe d, $\frac{b4}{aa} \propto bd$. Unde diviſo utrinque per b, fit $d \propto \frac{b3}{aa}$. adeò ut a, b, $\frac{bb}{a}$, & $\frac{b3}{aa}$ quatuor continuè proportionales exiſtant.

Haud ſecus, ſi in eadem ratione quinque continuè proportionales inveniendi ſint, & quintus terminus vocetur e, erit $\frac{bbe}{a} \propto \frac{b^6}{a^4}$. Unde multiplicando utrinque per a & dividendo per bb, invenitur $e \propto \frac{b4}{a^3}$. Eruntque a, b, $\frac{bb}{a}$, $\frac{b3}{aa}$, & $\frac{b4}{a3}$ quinque continuè proportionales in ratione a ad b. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Quoniam autem ſic datis duobus primis terminis a & b reliqui omnes ſequentes ſunt fractiones, hinc ut integri evadant ac ſimul ad

tot

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tot, quot quis voluerit, continuè proportionales in data ratione inveniendos inſerviant, oportet tantùm eos omnes per denominatorem ultimi termini multiplicare.

Ut, quia $a, b,$ & $\frac{bb}{a}$ tres proportionales referunt, quorum duo primi termini dantur a & b, hinc multiplicando omnes tres per a, inveniemus illorum loco $aa, ab,$ & bb, qui in eadem ratione tres quæſitos proportionales in integris deſignant.

Sic ſi quatuor in ratione a ad b continui requirantur, quoniam pro illis invenimus $a, b, \frac{bb}{ae}$ & $\frac{b3}{aa}$, ideo multiplicando eos omnes per aa, erunt ipſi in integris $a^3, aab, abb,$ & b^3.

Pari ratione $a^4, a^3b, aabb, ab^3,$ & b^4 in integris quinque deſignabunt continuè proportionales in ratione a ad b; & $a^5, a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4,$ & b^5 ſex; & $a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, aab^4, ab^5,$ & b^6 ſeptem. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc ſi a ſit ∞ 3, & b ∞ 2, ſex proportionales continuè in ratione 3 ad 2 erunt 243, 162, 108, 72, 48, & 32. At verò a exiſtente 2, & b ∞ 3 ſeptem continuè proportionales in ratione 2 ad 3 in integris erunt 64, 96, 144, 216, 324, 486, & 729. Et ſic de aliis.

Ubi advertendum, quòd, ſicut in Arithmeticè proportionalibus extremi termini ſimul additi tantundem faciunt atque ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius bis ſumptus, ſi multitudo terminorum impar fuerit, ita in hiſce Geometricè proportionalibus extremi a & $\frac{b4}{a3}$ in ſe invicem ducti tantundem producant, atque b & $\frac{b3}{aa}$ ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius $\frac{bb}{a}$ in ſe ductus. Fit enim ubique $\frac{b4}{aa}$. Quod idem de quotcunque terminis eſt intelligendum.

Deinde apparet, primo termino a exiſtente 1, progreſſionem fore 1. b. bb. b^3. b^4, &c. adeò ut ad quemlibet ſequentium terminorum inveniendum opùs tantùm ſit ſecundum terminum b toties ponere & multiplicare, quotus quiſque ex illis eſt poſt primum.

Ut ad inveniendum centeſimum terminum, poſito b nonagies & novies & multiplicato, centeſimus erit b^{99}. Quòd ſi autem primus ter-

terminus ſit a, centeſimus erit $\frac{b^{99}}{a^{98}}$, dividendo nempe b^{99}, productum antecedens ſecundi termini, per a^{98}, productum primi a, ſemel minùs poſiti & multiplicati. Atque ita de aliis.

Porrò Progreſſione exiſtente $1, b, bb, b^3, b^4$, &c. quoniam terminorum ultimum antecedentium aggregatum eſt $1 + b + bb + b^3$, at verò primum ſequentium aggregatum ſit $b + bb + b^3 + b^4$, quorum unius ad alterum ratio eadem eſt, quæ primi termini 1 ad ſecundum b, atque idem etiam in proportionalibus $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b3}{aa}, \frac{b4}{a3}$, &c. vel in proportionalibus $a^4, a^3b, aabb, ab^3, b^4$, &c. locum habeat, nec referat ad quotcunque proportionales hoc reſtringatur: liquet Progreſſionis cujuſlibet Geometricæ primum terminum ad ſecundum eſſe, ſicut aggregatum terminorum excepto ultimo ad aggregatum terminorum excepto primo.

Hinc datis primo, ſecundo, & ultimo termino, facile eſt invenire aggregatum terminorum.

Etenim ſi primus terminus ſtatuatur $\propto a$, ſecundus $\propto b$, & ultimus $\propto c$, & quæratur aggregatum terminorum $\propto z$: erit ut a ad b, ſic $z - c$ ad $z - a$. Unde multiplicando tum extremos in ſe invicem, tum medios, fiet $az - aa \propto bz - bc$. Hoc eſt, ordinatâ æqualitate, erit

$$z \propto \frac{aa \text{⸗} bc}{a \text{⸗} b}.$$

Signum ⸗ ſignificat differentiam inter duas pluresvè quantitates, cùm non exprimitur aut cognoſcitur, penes quas ſit exceſſus.

Hinc ſi a ſit $\propto 243$, $b \propto 162$, & $c \propto 32$, erit $z \propto \frac{aa - bc}{a - b} \propto 665$. At a exiſtente $\propto 64$, $b \propto 96$, & $c \propto 729$, erit $z \propto \frac{bc - aa}{b - a} \propto 2059$.

Denique a exiſtente majore quàm b, ſi proportionales in infinitum decreſcant, fiet $c \propto 0$. Ideoque deſtruendo bc, erit $z \propto \frac{aa}{a - b}$.

Hinc ſi a ſit 1, & $b \propto \frac{1}{2}$, atque cæteræ omnes ſequentes proportionales deinceps in infinitum in dupla hac ratione deſcendant, erit z, aggregatum omnium terminorum hujus Progreſſionis infinitæ, $\propto \frac{aa}{a - b} \propto 2$, hoc eſt, duplum maximi termini a.

Eodem modo, ſi maximus terminus a ſit 2, & reliqui omnes ter-

mini ab hoc maximo a in tripla ratione continuè uſque ad nihilum decreſcant, erit z, ſumma omnium terminorum hujus infinitæ ſeriei, ꝏ $\frac{aa}{a-b}$ ꝏ 3, hoc eſt, erit ipſa maximi termini a ſeſquialtera.

Similiter a exiſtente 3, ſi reliquorum ſequentium terminorum unus alterius ſubquadruplus ſumatur, idq́ue ſemper fiat: erit z, ſumma omnium, ꝏ $\frac{aa}{a-b}$ ꝏ 4, hoc eſt, maximi termini a ſeſquitertia. Atque ita de aliis.

Cætera huc ſpectantia, ex his perinde ut in Arithmeticis Progreſſionibus factum eſt collige.

SECTIO XVII.

Quadratura Parabolæ.

Ad indagandam Parabolæ quadraturam inveſtigetur ratio linearum NO, NQ, & NP, ductâ ſcilicet inter AC, MD rectâ NO alterutri ex ipſis parallelâ. Ponendo ad id latus rectum ꝏ r

AC vel NO ꝏ x

NQ ꝏ y

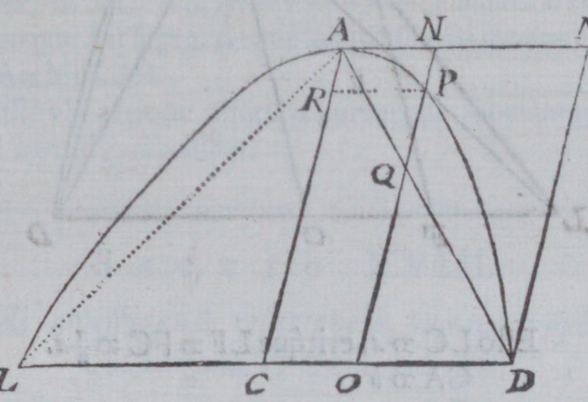
& AR vel NP ꝏ z.

Unde cum ex proprietate Parabolæ ▭lum ſub latere recto r, & ſegmento diametri AC, per 11 Prop. 1mi libri Conic. Apollonii, ſit æquale □to ordinatim adplicatæ CD: erit □ CD vel AM ꝏ rx, adeoq́ue AM ꝏ $\sqrt{rx}$. Eâdem ratione RP vel AN erit ꝏ $\sqrt{rz}$. Hinc cum propter ſimilitudinem triangulorum AMD, ANQ, AM ꝏ $\sqrt{rx}$ ſit ad MD vel AC ꝏ x, ut AN ꝏ $\sqrt{rz}$ ad NQ ꝏ y: erit $y\sqrt{rx}$, rectangulum ſub extremis, per 16. 6, æquale $x\sqrt{rz}$, rectangulo ſub mediis. Hoc eſt, quadratis ſingulis partibus, erit yy, rx ꝏ xx, rz. Et dividendo utrinque per rx, fit yy ꝏ xz. Hoc eſt, quadratum rectæ NQ æquale eſt rectangulo ſub NO & NP, ſeu quod idem eſt, ON eſt ad NQ, ſicut QN ad NP. Idem intelligendum eſt de recta quavis NO, ductâ inter AC, MD, ubi libuerit, alterutri ex ipſis parallelâ.

Hinc concipiendo conum & cylindrum ejuſdem baſis & altitudinis, quorum ſcilicet utriuſque baſis ſit circulus ſemidiametri MD, & axis com-

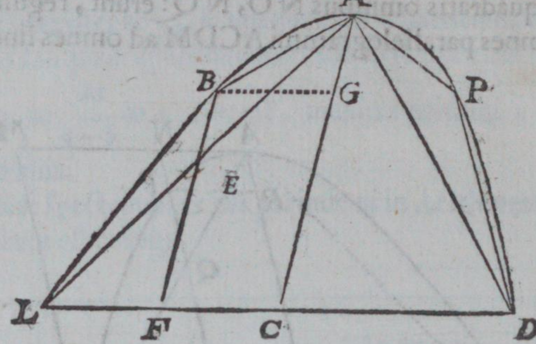
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

1 2 3
communis recta AM, cum propter proportionales NO, NQ, & NP, 1ma NO ſit ad 3tiam NP, ſicut quadratum 1mæ NO ad quadratum 2dæ NQ, atque hoc in infinitum intelligendum ſit de rectis omnibus NO, NP & quadratis omnibus NO, NQ: erunt, regulâ exiſtente DM, lineæ omnes parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei



APDM, ſicut omnia quadrata cylindri ad omnia quadrata coni, ſeu quod idem eſt, per 2.12, ſicut omnes circuli cylindri ad omnes circulos coni. Sed ut ſe habent omnes lineæ parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei APDM, ita per Methodum Indiviſibilium Cavallerii ſe habet parallelogrammum ad trilineum. Similiterque ſicut omnia quadrata cylindri ſe habent ad omnia quadrata coni, ita quoque ſe habet cylindrus ad conum. Quare parallelogrammum ACDM ad trilineum APDM erit, ut cylindrus ad conum. Unde cum, per 10.12, cylindrus ipſius coni ſit triplus: erit itidem parallelogrammum ACDM trilinei APDM triplum. Adeoque qualium partium parallelogrammum ACDM ſive triangulum LAD eſt 3, talium trilineum APDM erit 1, & ſemi-parabola CAPD 2, ac proinde tota LAPD 4. Conſtat idcirco Parabolam LAPD trianguli LAD in ea deſcripti maximi eſſe ſeſquitertiam. Quod erat propoſitum.

ALITER, *inveſtigando rationem linearum* **A C, BE.**



Eſto LC ∞ a, eritque LF ∞ FC ∞ $\frac{1}{2}a$.
CA ∞ b
& EB ∞ z.

Quibus poſitis, quoniam FB exiſtente parallelâ diametro CA, & ipſa diameter eſt, ac, propter ſimilitudinem triangulorum LCA, LFE, LC eſt ad CA, hoc eſt, a ad b, ſicut LF, hoc eſt, $\frac{1}{2}a$, ad FE: erit FE ∞ $\frac{1}{2}b$. Cui additâ EB ∞ z, ſi tota FB ſeu CG ∞ $\frac{1}{2}b + z$ ex CA ∞ b auferatur, relinquetur GA ∞ $\frac{1}{2}b - z$.

Deinde, quia, ex natura Parabolæ, CA eſt ad GA, hoc eſt, b ad $\frac{1}{2}b - z$, ſicut □ LC ad □ BG ſeu FC, hoc eſt, aa ad $\frac{1}{4}aa$, vel 4 ad 1: erit b ∞ $2b - 4z$. Unde reſolutâ æquatione fit z ∞ $\frac{1}{4}b$. Quod ipſum docet, rectam CA ipſius EB quadruplam eſſe.

E quibus porrò facile eſt invenire rationem trianguli EBA ad triangulum LAC. Cum enim propter parallelas EB, AC angulos ad E & A æquales habeant, ac proinde ipſa inter ſe ſint ſicut ▭ BEA ad ▭ LAC: erit, aſſumptâ LE vel EA ∞ c, unum ad alterum, ſicut $\frac{1}{4}bc$ ad $2bc$, hoc eſt, ut 1 ad 8; ideoque △ LBA ad △ LAC, ut 1 ad 4.

Eodem modo, triangulo APD trianguli CAD ſubquadruplo exiſtente, erunt & bina △^{la} LBA & APD ſimul ſumpta binorum triangulorum LAC & CAD ſimul ſumptorum, hoc eſt, totius LAD, ſubquadrupla. Id quod eâdem ratione de cæteris triangulis, quæ dein-

deinceps in reliquis ſequentibus portionibus in infinitum deſcribuntur, eſt intelligendum.

Quocirca cum pateat triangulum Parabolæ inſcriptum maximum ad triangula in reliquis portionibus maxima eſſe ut 4 ad 1; & hæc rurſus ad illa in reliquis inde ſequentibus maxima ut 4 ad 1, atque hoc ita in infinitum contingere: manifeſtum eſt, ſi illorum maximum LAD ſtatuatur eſſe 3, ſummam omnium, hoc eſt, ipſam Parabolam LBAPD, per 16. Sect. fore 4: adeoque hanc eandem trianguli LAD eſſe ſeſquitertiam. Ut ſupra. Atque hic ipſiſſimus modus eſt, quo eam quadravit Archimedes.

Haud diſſimili ratione aliarum curvarum ſuperiorum generum quadraturæ inveſtigari poſſunt.

SECTIO XVIII.

De modo inveſtigandi relationem, quæ inter Sphæram, Cylindrum, & Conum exiſtit.

QUam inter ſe rationem Sphæra, Cylindrus, atque Conus habeant, demonſtravit Archimedes Propoſitione 32 primi libri de Sphæra & Cylindro; verùm quo pacto illam inveſtigare liceat, præſenti Sectione exponere viſum fuit.

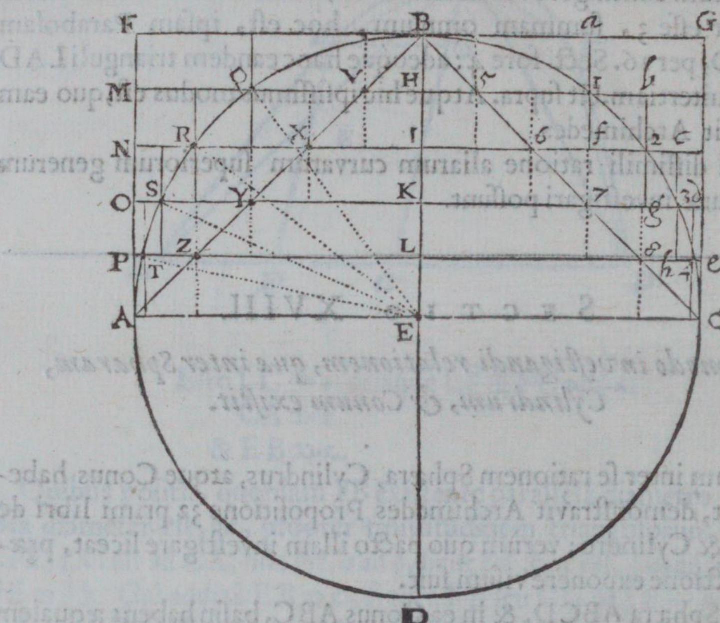
Eſto Sphæra ABCD, & in ea Conus ABC, baſin habens æqualem circulo in Sphæra maximo, altitudinem verò BE æqualem ſemidiametro Sphæræ. Dein circa hemiſphærium ABC intelligatur Cylindrus AFGC, cujus ſimiliter baſis circulo in Sphæra maximo ſit æqualis, & altitudo BE æqualis ſemidiametro Sphæræ.

Quibus poſitis, oporteat inveſtigare quam inter ſe habeant rationem, ſphæra, cylindrus, atque conus.

Ad hoc autem dividatur BE in partes quotcunque æquales, & per diviſionum puncta H, I, K, L ducantur plana baſi coni vel cylindri parallela.

Quoniam igitur, per 35 Tertii Elementorum, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB quadratis QH, RI, SK, TL, AE ſunt æqualia, atque hæc quidem quadrata, per 2 Duodecimi Elementorum, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE ſint ſicut circuli ab his ſemidiametris deſcripti, ſive etiam ut cylindri æquè alti ſuper hiſce

circulis conſtituti: patet, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB ſeu quadrata QH, RI, SK, TL, AE ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE eſſe, ut figura hemiſphærio ABC circumſcripta ad cylindrum AFGC.



Quod ut magis fiat perſpicuum, ſupponatur partium quælibet, in quas EB diſſecta eſt, eſſe 1, eritque diviſâ EB in 5 æquales partes, ratio quam figura hemiſphærio ABC circumſcripta habet ad cylindrum AFGC,

DH 9 — HB 1	▭	DHB ſeu □ QH 9	MH 5 — MH 5	□ MH 25
DI 8 — IB 2	▭	DIB ſeu □ RI 16	NI 5 — NI 5	□ NI 25
DK 7 — KB 3	▭	DKB ſeu □ SK 21	OK 5 — OK 5	□ OK 25
DL 6 — LB 4	▭	DLB ſeu □ TL 24	PL 5 — PL 5	□ PL 25
DE 5 — EB 5	▭	DEB ſeu □ AE 25	AE 5 — AE 5	□ AE 25
		ut 95	ad	125

Cum autem loco quadratorum QH, RI, SK, TL, AE, per 47 Primi Elementorum, ſubſtituere liceat exceſſus, quibus quadrata

EQ,

EQ, ER, ES, ET, EA ſuperant quadrata ex EH, EI, EK, EL, & o: erit ratio figuræ hemiſphærio ABC circumſcriptæ ad cylindrum AFGC,

□EQ 25 — □EH 16		□MH 25
□ER 25 — □EI 9		□NI 25
□ES 25 — □EK 4		□OK 25
□ET 25 — □EL 1		□PL 25
□EA 25 — 0		□AE 25
ut 125 —— 30	... ad	125.

Hoc eſt, figura hemiſphærio ABC circumſcripta, conſtans ex cylindris æque-altis inæqualibus erit ad cylindrum AFGC, ex totidem cylindris ejuſdem altitudinis, maximoque præcedentium æqualibus, compoſita; ut quadratum ſemidiametri ſphæræ AE toties ſumptum quot ſunt cylindri lineævé EB partes minus totidem quadratis rectarum à puncto vel o inchoatarum, ac juxta numeros 0.1.2.3. &c. in ſerie naturali uſque ad radium continuè creſcentium, ad totidem radii quadrata.

Quod ut generaliter percipiatur, rectâ EB in quotcunque partes æquales diviſâ, ſupponamus cum Clariſſimo ac undequaque Doctiſſimo Viro D^no^ Johanne Walliſio * numerum terminorum ſeu multitudinem partium, in quas EB diſſecta fuerit, eſſe a: eritque, quærendo ſummam quadratorum hujuſce Progreſsionis juxta Bacheti aliorumvé regulas, ratio, quam figura hemiſphærio ABC circumſcripta habet ad Cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 + 3aa - a}{6}$ ad a^3, ſeu $4a^3 + 3aa - a$ ad $6a^3$, hoc eſt, dividendo ubique per a, ut $4aa + 3a - 1$ ad $6aa$. Et manifeſtum eſt, ſi ratio inventa fuiſſet ut $4aa$ ad $6aa$, quòd tunc quidem figura hemiſphærio ABC circumſcripta ipſius cylindri AFGC fuiſſet ſubſeſquialtera. Quoniam verò ipſi $4aa$ jam accedit $3a - 1$, in quo $3a$ ſemper majus eſt quàm 1, liquet, rationem, quam figura hemiſphærio ABC circumſcripta habet ad cylindrum AFGC, eſſe majorem quàm ſubſeſquialteram.

* *Vide ejus Arithmeticam Infinitorum ſive novam Methodum Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaqúe difficiliora Matheſeos Problemata.*

Hinc, ſi EB in 2 æquales partes diviſa fuerit, ratio erit, ut 21 ad 24 ſeu $\frac{21}{24}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{5}{24}$; ſi in 3, ut 44 ad 54 ſeu $\frac{44}{54}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{8}{54}$; ſi in 4, ut 75 ad 96 ſeu $\frac{75}{96}$ hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{11}{96}$; ſi in 5, ut 114 ad 150 ſeu $\frac{114}{150}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{14}{150}$; ſi in 6, ut 161 ad 216 ſeu $\frac{161}{216}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{17}{216}$. Et ſic deinceps. Hoc eſt, ratio proveniens ubique major eſt quàm $\frac{2}{3}$, exceſſuſque perpetuò decreſcit, ut patet per $\frac{5}{24}$, $\frac{8}{54}$, $\frac{11}{96}$, $\frac{14}{150}$, $\frac{161}{216}$ &c.

prout

prout nimirum EB continuè in plures partes dividi ſupponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa + 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} + \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Atque hæc quidem de figuræ hemiſphærio A B C circumſcriptæ cum cylindro AFGC comparatione. Sequitur comparatio figuræ eidem hemiſphærio ABC inſcriptæ cum cylindro AFGC.

Ad hanc autem inveniendam, opùs tantùm eſt inveſtigare rationem, quam habent rectangula DHB, DIB, DKB, DLB ſeu quadrata QH, RI, SK, T L ſive etiam exceſſus, quibus □ta E Q, ER, E S, E T ſuperant □ta ex EH, E I, EK, E L, ad quadrata MH, NI, OK, P L, A E.

		□MH 25
□EQ 25 — □EH 16		□N I 25
□ER 25 — □E I 9		□OK 25
□E S 25 — □EK 4		□P L 25
□ET 25 — □ E L 1		□A E 25

Et invenietur rationem quęſitam fore, ut 100 — — 30 ... ad ... 125.

Quod ut in genere de quavis figura hemiſphærio ABC inſcriptâ intelligatur, lineâ E B in quotlibet æquales partes ſectâ, ſuppono partium harum numerum eſſe a: eritque ratio figuræ hemiſphærio ABC inſcriptæ ad cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 - 3aa - a}{6}$ ad a^3, ſeu $4aa - 3a - 1$ ad $6aa$. Et manifeſtum eſt, ſi ratio hæc fuiſſet ut $4aa$ ad $6aa$, quòd figura hemiſphærio ABC inſcripta ipſius cylindri AFGC tunc fuiſſet ſubſeſquialtera. Quia autem ipſi $4aa$ jam decedit $3a+1$, conſtat, rationem figuræ hemiſphærio A B C inſcriptæ ad cylindrum A F G C eſſe minorem quàm ſubſeſquialteram.

Hinc, ſi E B in 2 æquales partes ſit diviſa, erit ratio ut 9 ad 24 ſeu $\frac{9}{24}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{7}{24}$; ſi in 3, ut 26 ad 54 ſeu $\frac{26}{54}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{10}{54}$; ſi in 4, ut 51 ad 96 ſeu $\frac{51}{96}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{13}{96}$; ſi in 5, ut 84 ad 150 ſeu $\frac{84}{150}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{16}{150}$; ſi in 6, ut 125 ad 216 ſeu $\frac{125}{216}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{19}{216}$. Et ſic deinceps. Hoc eſt, ratio proveniens ubique minor eſt quàm $\frac{2}{3}$, defectuſque perpetuò decreſcit, ut liquet per $\frac{7}{24}, \frac{10}{54}, \frac{13}{96}, \frac{16}{150}, \frac{19}{216}$, &c. prout nimirum E B continuè in plures partes dividi ſupponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa - 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} - \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Porrò, quoniam cylindro AFGC exiſtente ∞ $6aa$, figura circumſcripta

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſcripta eſt ∞ $4aa + 3a - 1$, & inſcripta ∞ $4aa - 3a - 1$, atque harum duarum differentia ∞ $6a$: erit ratio hujus differentiæ ad cylindrum AFGC, ut $6a$ ad $6aa$ ſeu ut 1 ad a, hoc eſt, ut unitas ad multitudinem partium ipſius EB. Ut autem unitas ad multitudinem partium ipſius EB, ita quoque eſt cylindrus APeC ad cylindrum AFGC. Quocirca ſuperabit circumſcripta figura ipſam inſcriptam differentiâ APeC. Id quod etiam patet, conſiderando ſuper unoquoque circulorum Q1, R2, S3, T4 duos cylindros eſſe conſtitutos, quorum alter quidem versùs B, alter autem versùs E reſpiciat, quorumque illi omnes, qui versùs E conſtituti ſunt, ſimul æquales ſint illis omnibus ſimul, qui versùs B reperiuntur; adeò ut, ſi omnibus illis qui versùs B habentur cylindrus Ae addatur, tota figura circa hemiſphærium ABC deſcripta ſuperet figuram eidem ABC inſcriptam cylindro Ae.

Ubi demum liquet, cum EB in continuum in æquales partes dividi poſſit, ita ut hinc tandem cylindrus Ae dato quolibet ſolido minor evadat, ſic etiam hemiſphærio ABC poſſe hâc ratione figuram circumſcribi alteramque eidem inſcribi, utramque ex cylindris æquè-altis conſtantem; ut deſcriptarum differentia ſit quocunque dato ſolido minor. Ac proinde, ſi partium numerus ipſius EB ſtatuatur eſſe infinitè magnus, hoc eſt, ut hemiſphærium ABC & cylindrus AFGC ex æquè multis ac infinitis quaſi circulis conflari intelligatur aut etiam ex cylindris altitudinis infinitè exiguæ: erit differentia inter circumſcriptam & inſcriptam figuram ∞ 0, adeoque ratio cylindri AFGC ad hemiſphærium ABC, ut 3 ad 2, hoc eſt, ſeſquialtera. Hinc cum idem eodem modo de eorum duplis ſit intelligendum, concluditur, cylindrum, habentem baſin æqualem circulo in ſphæra maximo & altitudinem diametro ſphæræ æqualem, ipſius ſphæræ ſeſquialterum haberi. Quod erat propoſitum.

Eodem modo, quærendo rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL, AE & quadrata MH, NI, OK, PL, AE exiſtit, quantitate a multitudinem partium ipſius EB deſignante, invenietur figura cono ABC circumſcripta eſſe ad cylindrum AFGC, ut $2aa + 3a + 1$ ad $6aa$, hoc eſt, rationem illam eſſe $\frac{1}{3} + \frac{3a + 1}{6aa}$. Inveſtigando autem rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL & quadrata MH, NI, OK, PL, AE reperitur, invenietur figura cono ABC inſcripta eſſe ad cylindrum AFGC, ut $2aa - 3a + 1$ ad $6aa$, hoc eſt, rationem

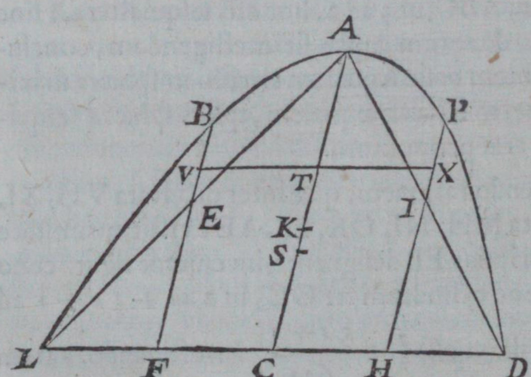
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

illam eſſe $\frac{1}{3} - \frac{3a+1}{6aa}$. Quocirca cum duarum harum figurarum illa, quæ cono ABC circumſcribitur, ubique triente cylindri AFGC major ſit; at verò hæc, quæ eidem cono ABC inſcribitur, ubique triente cylindri AFGC minor exiſtat, & quidem tam illius exceſſus $\frac{3a+1}{6aa}$, quàm hujus defectus $\frac{-3a+1}{6aa}$, dividendo continuè EB in plures atque plures partes, tandem uſque ad nihilum decreſcat: ſequitur, conum ABC ipſius cylindri AFGC ſubtriplum eſſe habendum. Quod erat propoſitum.

Hinc, qualium partium conus ABC ſtatuitur eſſe 1, talium cylindrus AFGC erit 3, & totus cylindrus, qui nempe integræ ſphæræ ABCD circumſcribitur, 6. Quo quidem ipſius ſphæræ ABCD ſeſquialtero oſtenſo, hoc eſt, ut, cylindro hoc exiſtente 6, ſphæra ABCD ſit 4: perſpicuum fit, ſphæram ABCD dicti coni ABC, huic ſphæræ inſcripti, eſſe quadruplam. Quod erat propoſitum.

SECTIO XIX.

Ratio inveſtigandi centrum gravitatis Parabolæ.



Explicaturus quâ ratione centrũ gravitatis figuræ inveſtigari poſſit, ſupponemus illud cum Archimede aliiſq; authoribus in unaquaque figura eſſe tantũ unicum punctum, quod in reſpectu ad illam eundem ſemper ſitum obſervat; ſicut etiam duo aut plura gravia juxta lineas parallelas, per centra hæc tendentes, deorſum ferri.

Quo-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Quocirca ſtatuendo K eſſe centrum gravitatis Parabolæ LBAPD, & S centrum gravitatis trianguli L A D, puncta verò V & X centra duarum portionum LBA & APD: erit, ductâ V X, punctum T centrum gravitatis, magnitudinis ex utriſque compoſitæ.

Hinc ſi ponatur C A ∞ a, erit E B vel I P, per antec. Sect., $\infty \frac{1}{4}a$, & AS $\infty \frac{2}{3}a$. Dein poſitâ AK ∞ z, erit CK ∞ $a-z$. Quibus ita conſtitutis, cum C A ſit ad A K, hoc eſt, a ad z, ſicut E B vel IP, hoc eſt, $\frac{1}{4}a$ ad B V vel PX: erit B V vel P X $\infty \frac{1}{4}z$. Quâ ſubductâ ex E B vel IP, relinquitur EV vel IX $\infty \frac{a-z}{4}$. Huic autem additâ F E vel H I $\infty \frac{1}{2}a$, fit F V vel H X, ſeu C T $\infty \frac{3a-z}{4}$.

Porrò quoniam ablatâ CK ∞ $a-z$ ex CT $\infty \frac{3a-z}{4}$, remanet KT $\infty \frac{3z-a}{4}$, at AK ∞ z ablatâ ex AS $\infty \frac{2}{3}a$, relinquitur KS $\infty \frac{2}{3}a-z$; & quidem K T ad K S ſit, ſicut triangulum L A D ad duas ſimul portiones LBA & APD, quorum unius ad alterum ratio, per præc. Sect., eſt, ut 3 ad 1: erit ut $\frac{3z-a}{4}$ ad $\frac{2}{3}a-z$, ſic 3 ad 1. Fietque, multiplicando tum extremos in ſe invicem tum medios, $\frac{3z-a}{4} \infty 2a-3z$. Unde reſolutâ æquatione invenitur $z \infty \frac{3}{5}a$. Quod ipſum docet, ad obtinendum quæſitum centrum K, dividendam eſſe AC in 5 æquales partes, atque earundem pro AK ſumendas eſſe tres; conveniens cum eo, quod ab Archimede oſtenſum eſt Prop^ne 8. lib. 2. de Æquiponderantibus: nimirum, diametrum C A à gravitatis centro K ſemper ſic dividi, ut pars KA, quæ ad verticem eſt, ſit ad partem KC, quæ terminatur ad baſin, in ratione ſeſquialtera, ſeu ut 3 ad 2.

Eodem modo aliarum figurarum, quæ à curvis ſuperiorum generum comprehenduntur, centra gravitatum inveſtigari poſſunt.

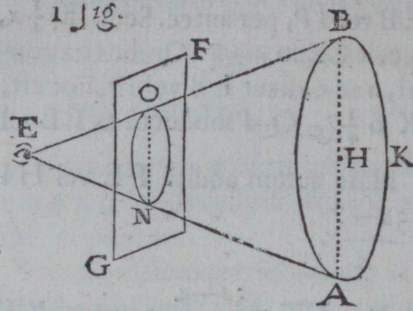
SECTIO XX.

De circuli projectione in planum, quæ item circulus exiſtat.

QUo pacto, datis poſitione circulo & plano tabulæ, locus inveniri poſſit, ad quem oculo adhibito circulus in circulum projiciatur,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ciatur, oſtendit mihi per literas paucis abhinc annis ingenioſiſſimus atque exercitatiſſimus D. Claudius Mylon, J.C, qui ſuper hanc rem ſequentia excogitavit.



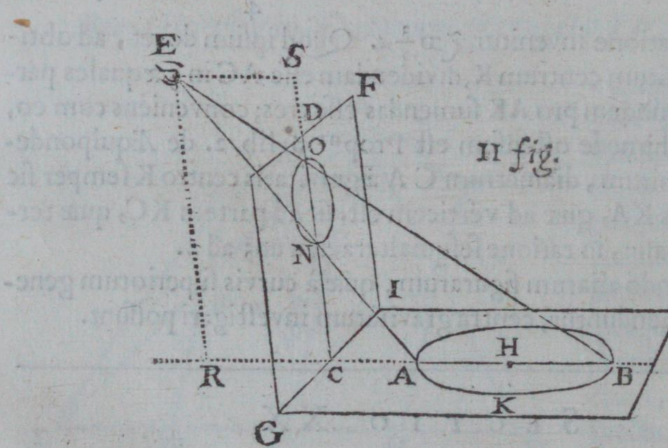
a p 4 Prop. Primi Conicorum Apollonii.

Eſto planum tabulæ G F, circulus autem datus A K B, oporteatque punctum invenire E, ita ut N O, projectio ipſius A K B in dato plano G F, ſit etiam circulus.

Primò, ſi planum tabulæ G F & circuli AKB ſunt parallela, manifeſtum eſt [a], quòd, ubicunque oculus E in ſpacio ſolido indefinito extra planum tabulæ conſtitutus fuerit, projectio NO ipſius A K B in plano G F ſemper item circulus ſit futura.

Secundò verò, ſi planum tabulæ GF & circuli AKB non ſint parallela, dico punctum oculi E ubique ſumi poſſe in Hyperbolâ, poſitione datâ.

Etenim G I exiſtente utriuſque plani communi ſectione, & rectâ CAHB, ſuper ipſam perpendiculari, in plano circuli AKB tranſeunte

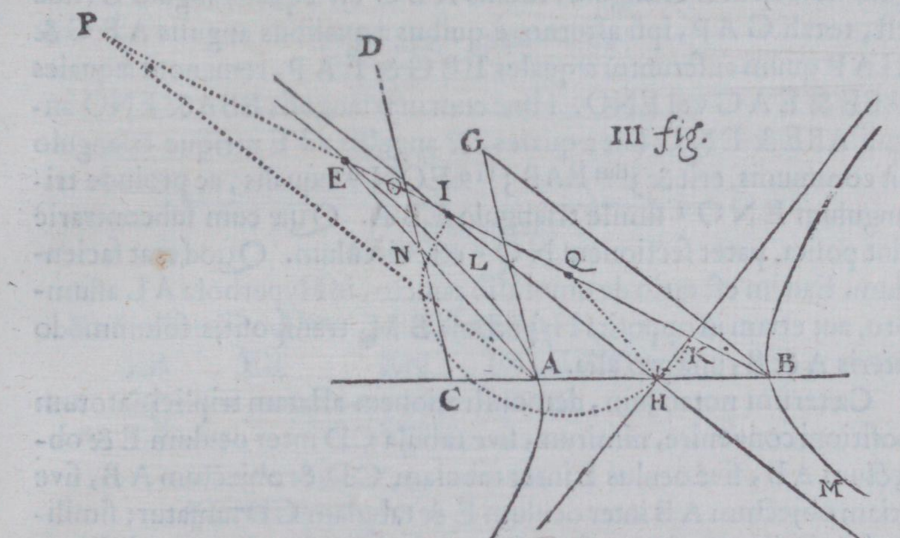


per ejus centrum H, ſi ex C ſuper G I in plano tabulæ G F excitetur perpendicularis C D: erit angulus B C D aut ejus complementum

[b] in-

[b] inclinatio horum duorum planorum, & planum, quod per duas haſce lineas CB, CD tranſit, ad utrumque ex illis [c] perpendiculare. b p 6 def. Vndecimi Elementorum. c p 18 Prop. Vndecimi Elem.

Dein, puncto E exiſtente in plano BCD, quò NO, ſectio coni ſcaleni EAKB per planum tabulæ GF, circulus exiſtat, requiritur ut triangulum ENO, ad verticem E abſciſſum, ſit ipſi EBA, triangulo per axem [d], ſimile ac ſubcontrariè poſitum, hoc eſt, ut EO ſit ad EN, ſicut EA ad EB. d p 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.



Hinc in 3tia figura rectis CB, CD, unà cum punctis A, H, B, & E iiſdem exiſtentibus, quæ in 2da figura, ſi, ductâ AG æquali AB ac parallelâ CD, jungatur BG, & ex H huic agatur parallela HI, cui perpendicularis ſit HK, atque Aſymptotis HI, HK per puncta A & B deſcribantur [e] Hyperbolæ oppoſitæ AL, BM: dico punctum oculi E ubilibet ſumi poſſe in Hyperbola AL vel BM, hoc eſt, ſi ex quocunque in ea puncto E agantur EA, EB ſecantes CD in N & O, quòd triangula ENO & EBA futura ſint ſimilia ac ſubcontrariè poſita. e p 4 Prop. Secundi Conic. Apollonii.

Ad quod demonſtrandum ducatur AP parallela HI. Hinc cum BE occurrat ipſi BG, occurret etiam BE ipſis HI, AP, quæ cum BG ſunt parallelæ. Eſto ipſarum BE, AP concurſus P. Et quoniam BE ſecat Hyperbolas oppoſitas AL, BM, ſecabit & ipſa earundem Aſymptotos HI, HK. quod ſit in I & K. Porrò diviſâ IK bifariam in Q, de-

ſcribatur ex Q intervallo IQ vel QK ſemicirculus IHK, qui tranſibit per H, propter angulum rectum IHK, jungaturque QH.

His igitur ſic poſitis, quoniam IQ eſt æqualis QK, atque etiam IE [f] æqualis KB, erit & tota EQ toti QB æqualis. Atqui æqualis quoque eſt AH ipſi HB. Parallela igitur eſt [g] AE ipſi HQ. Eſt autem per conſtr. etiam AP ipſi HI parallela. Quocirca triangulum AEP ſimile exiſtens triangulo iſoſceli HQI, & ipſum iſoſceles eſt, ejuſque angulus ad A æqualis angulo ad P ſeu huic alterno EBG. Sed in triangulo iſoſceli ABG angulus totalis ABG eſt æqualis angulo G, hoc eſt, totali GAP, ipſi alterno: è quibus æqualibus angulis ABG & GAP quum auferuntur æquales EBG & EAP, remanent æquales ABE & EAG vel ENO. Hinc cum in triangulis EBA & ENO anguli ABE & ENO ſint æquales, & angulus ad E utrique triangulo ſit communis, erit & 3^{tius} EAB 3^{tio} EON [h] æqualis, ac proinde triangulum ENO [i] ſimile triangulo EBA. Quæ cum ſubcontrariè ſint poſita, patet ſectionem NO [k] eſſe circulum. Quod erat faciendum. Eadem eſt ratio de omni alio puncto, in Hyperbola AL aſſumpto, aut etiam in oppoſita Hyperbola BM, tranſpoſitis ſolummodo literis A & B, unâ pro alia.

f p 8 Prop. Secundi Conic. Apollonii.
g p 2 Prop. Sexti Elem.
h p 32 Primi Elem.
i p 4 Prop. & 1 Def. Sexti Elem.
k p 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.

Cæterùm notandum, demonſtrationem allatam triplici datorum poſitioni convenire, nimirum, ſive tabula CD inter oculum E & objectum AB, ſive oculus E inter tabulam CD & objectum AB, ſive etiam objectum AB inter oculum E & tabulam CD ſumatur; ſimiliterque facile eſſe demonſtrare per abſurdum, punctum oculi E non poſſe ſumi extra Hyperbolas AL, BM; ac idcirco id ipſum non cadere in Hyperbolas conjugatas.

Verùm enimverò quoniam his intellectis perſpicere jucundum eſt, quonam pacto in haſce cogitationes aliquis incidere queat, ut punctum oculi E ubicunque in alterutra Hyperbolarum AL vel BM pro lubitu ſumi poſſe autumet: non è re me facturum judicavi, ſi calculum analyticum, è quo totum hoc innoteſcit, paucis hîc ſubjecero. Ponatur itaque factum, quod quæritur, ſitque

CA $\propto a$
AB $\propto b$
AN $\propto c$
AR $\propto x$
RE $\propto y$
EB $\propto z$.

Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ RBE & CBO

RB BE CB

$x+b$ — z — $a+b$ | ad BO. $\frac{az+bz}{x+b}$. Quę ſubducta ex BE $\propto z$, relinquit $\frac{xz-az}{x+b}$, pro EO.

Ex

Ex ſimilitudine △rum CAN & RAE

CA	AN	RA	
a —	c —	x |	ad AE. $\frac{cx}{a}$

Ex ſuppoſitione quæſiti, tanquam facti

EO		EN.		EA	EB
$\frac{xz-az}{x+b}$ —		subtr. AN. c	$\frac{cx-ca}{a}$ —	$\frac{cx}{a}$ |	z

$$\frac{xzz-azz}{x+b} \propto \frac{ccxx-ccax}{aa}$$

$$\frac{zz}{x+b} \propto \frac{ccx}{aa}$$

$$zz \propto \frac{ccxx+ccbx}{aa}.$$

Ex ſimilitudine △lorum REB & SEN

EB	ER	EN	ES vel RC
z —	y —	$\frac{cx-ca}{a}$ |	$x-a$

$$xz-az \propto \frac{cxy-cay}{a}$$

$$z \propto \frac{cy}{a}$$

$$\& \; zz \propto \frac{ccyy}{aa} \propto \frac{ccxx+ccbx}{aa} \propto zz$$

fit $yy \propto bx+xx$

& $y \propto \sqrt{bx+xx}$.

Ubi patet, cum in æquatione inventa $yy \propto bx + xx$ alterutra ex incognitis quantitatibus x vel y ad duas dimenſiones aſcendat, & quidem xx ſigno + adficiatur, punctumquæſitum E cadere in Hyperbolam.

Ad cujus latus rectum & tranſverſum inveniendum, quoniam, quantitate mm nullâ exiſtente, per ea quæ pag. 31 Geometriæ docentur,

Vide figuram II.

tur, latus rectum eſt $\frac{oz}{a}$, & quidem quantitas ox hîc pro eadem haberi debeat quâ bx, hoc eſt, o pro eadem quâ b, atque hîc non habeantur z & a: erit latus rectum $\infty\ b$.

Vide novam Geometriæ editionem.

Deinde, quoniam ratio lateris recti ad tranſverſum latus eſt ut pzz ad aam, & quidem p ipſi m ſit æqualis, propterea quòd nulla ipſi xx fractio adhæreat, atque z & a, (ſicut dictum) in inventa æquatione non reperiantur vel ſibi invicem ſint æquales: erit ſimiliter latus tranſverſum AB $\infty\ b$.

Porrò ut inveniatur centrum, quoniam terminus illud indicans eſt $\frac{aom}{2pz}$, oportet facere AH $\infty\ \frac{o}{2}$ ſeu $\frac{1}{2}b$: eritque H, medium ipſius AB, centrum Sectionum.

Denique ER $\infty\ y \infty \sqrt{bx+xx}$ erit ordinatim adplicata ad diametrum AR. Quæ quidem, ſi RC vocetur x, erit $\infty \sqrt{aa+ab+2ax+bx+xx}$. Unde cætera huc ſpectantia facilia ſunt.

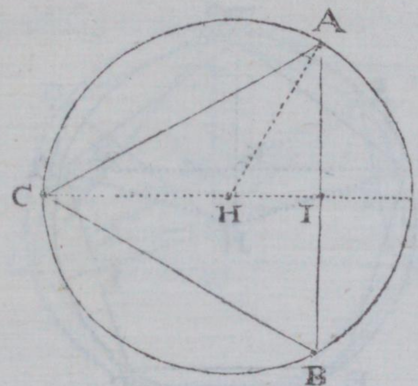
SECTIO XXI.

De figuris ordinatis, circulo inſcriptis; ac angulorum vel arcuum in partes æquales ſectione.

QUoniam figurarum regularium in circulo deſcriptio non indifferenter uno eodemque modo procedit, ſed pro angulorum numero una longè aliter atque alia ei inſcribatur, illiuſque deſcriptionis diverſitas à diverſa ſuorum laterum ad radium relatione dependeat: haud inutile fuerit, ſi, pro radio aſſumptâ unitate, paucis hîc oſtendam, quâ ratione in ſimpliciſſimis terminis æquationes inveniri poſſint, quarum radices dictam hanc laterum ad radium relationem exhibeant, ipſorumque quantitatem exactè determinent. Id quod uno aut altero exemplo oſtendiſſe ſuffecerit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

In triangulo.



Eſto CH vel HA $\propto 1$

& AB $\propto x$, eritque AI vel IB $\propto \frac{1}{2}x$.

E $\square^{to}$ HA. 1

ſubtr. $\square$ AI. $\frac{1}{4}xx$.

* $\square$ HI. $1-\frac{1}{4}xx$

HI. $\sqrt{1-\frac{1}{4}xx}$

add. CH. 1

CI. $1+\sqrt{1-\frac{1}{4}xx}$

add. $\left\{\begin{array}{l}\square\text{ CI. } 2-\frac{1}{4}xx+\sqrt{4-xx} \\ \square\text{ AI. } \frac{1}{4}xx\end{array}\right.$ $\square$ CA vel AB.

† ſit $\square$ CA. $2+\sqrt{4-xx} \propto xx$

$\sqrt{4-xx} \propto xx-2$

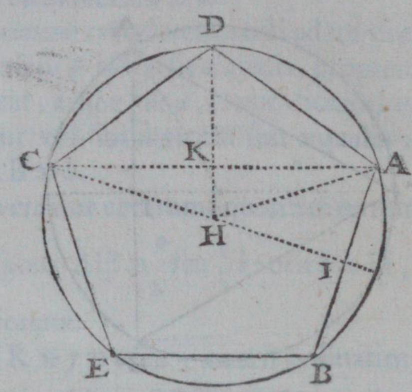
$4-xx \propto x^4-4xx+4$

$3xx \propto x^4$

$3 \propto xx$, vel $xx-3 \propto 0$. Æquatio trianguli.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

In pentagono.



Ex ſimilitudine △[rum] HAI & CDK

□HA * □HI □CD □CK

$1 \text{ --- } 1 - \frac{1}{4}xx \text{ --- } xx \mid \text{ad } xx - \frac{1}{4}x^4$

per $\underline{4}$ † □CA

† fit □CA. $4xx - x^4 \infty 2 \dagger \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 4xx - x^4 \infty \sqrt{4 - xx}$

$4 - 16xx + 20x^4 - 8x^6 + x^8 \infty 4 - xx$

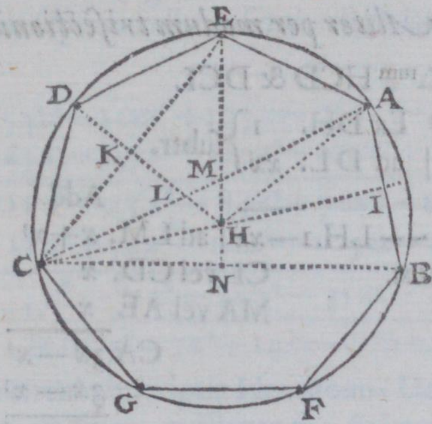
$x^6 - 8x^4 + 20xx - 15 \infty 0$

div. per $xx - 3 \infty 0$ $\overline{x^4 - 5xx + 5 \infty 0.}$

Æquatio pentagoni.

In

In heptagono.



Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ HAI & CDK

$$\begin{array}{llll} HA & AI & CD & DH.\ 1 \\ 1-\frac{1}{2}x & -x & \text{ad } DK. & \frac{1}{2}xx \end{array} \Big\} \text{ſubtr.}$$

Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ CKH & ENC

$$\square CH \quad KH.\ 1-\frac{1}{2}xx \qquad + \square CE \qquad \square CN$$

$$1 - \square KH.\ 1-xx+\frac{1}{4}x^4 - 4xx-x^4 \mid \text{ad } 4xx-5x^4+2x^6-\frac{1}{4}x^8$$

$$+ \square CA \qquad \frac{\square CB \text{ vel } CA}{4}$$

$$\text{fit } 2+\sqrt{4-xx} \propto 16xx-20x^4+8x^6-x^8$$

$$\sqrt{4-xx} \propto -2+16xx-20x^4+8x^6-x^8$$

$$4-xx \propto 4-64xx+336x^4-672x^6+660x^8-352x^{10}+104x^{12}-16x^{14}+x^{16}$$

$x^{14}-16x^{12}+104x^{10}-352x^8+660x^6-672x^4+336xx-63 \propto 0$. Æquatio hæc dividi poteſt per $xx-3 \propto 0$.

Et fit

$$x^{12}-13x^{10}+65x^8-157x^6+189x^4-105xx+21 \propto 0.$$

Hæc verò æquatio ulteriùs dividi nequit per binomium, quod conſtat ex quantitate incognita xx, + vel — aliquo numero, ultimum terminum 21 abſque fractione dividente; ſed per aliam ſummam, ut poſt patebit.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Notandum autem, tam æquationem inventam Pentagoni, quàm hanc priorem Heptagoni per idem binomium, utpote $xx - 3 \propto 0$, quæ eſt æquatio Trianguli, & non per aliud quodvis binomium eſſe diviſibilem.

Aliter per modum triſectionis.

Ex ſimilitudine $\triangle^{rum}$ HCD & DCL

HC CD CD Ex DH. 1 } ſubtr.
$1 - x - x$ | ad DL. xx }

HD DE Add.

Ex ſimilitudine triangulorum HDE & HLM. $1 - x -$ LH. $\overline{1 - xx}$ | ad LM. $x + x^3$

CL vel CD. x

MA vel AE. x

CA. $3x - x^3$

$3x - x^3$

$-3x^4 + x^6$

$9xx - 3x^4$ † □ CA

fit □ CA. $9xx - 6x^4 + x^6 \propto 2 + \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 9xx - 6x^4 + x^6 \propto \sqrt{4 - xx}$

$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 4 \propto 4 - xx$

$x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0.$

Hæc æquatio per binomium eſt indiviſibilis. Quòd ſi verò ipſa dividatur per æquationem inventam Pentagoni $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, prodibit $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquatio Heptagoni, in ſimpliciſſimis terminis. Quæ etiam obtinebitur dividendo æquationem ante inventam $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ per hanc ſummam $x^6 - 6x^4 + 9xx - 3 \propto 0$. Oritur enim rurſus $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Quæ & hoc inſuper modo inveniri poteſt: nimirum, comparando quadratum ex CA, biſectionis modo quæſitum, cum eodem quadrato CA, per triſectionis modum inveſtigato, omittendo ejuſdem quadrati valorem $\propto$ † $2 + \sqrt{4 - xx}$.

Hoc eſt, ponendo $16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8 \propto 9xx - 6x^4 + x^6$

& fit $x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 7xx \propto 0$

vel $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Æquatio heptagoni, ut ante.

His

His adde reductionis modum à D^no^ Huddenio inventum, quo ex binis inventis æquationibus $x^{12} + 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ & $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$ æquationem ſimpliciſſimam ſic inveſtigat. attollendo ſcilicet inferiorem, ut ad æque-multas cum ſuperiore dimenſiones aſcendat, ac deinde operando, ut ſequitur.

$$\begin{array}{r} x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 35xx \quad \propto 0 \\ x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0 \\ \hline x^{10} - 11x^8 + 45x^6 - 84x^4 + 70xx - 21 \propto 0 \\ x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0 \\ \hline \text{div.per } xx - 2, \; x^8 - 9x^6 + 28x^4 - 35xx + 14 \propto 0 \end{array}$$

& fit $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Ut ſupra.

Porrò quoniam circulo inſcriptis Hexagono, Decagono, & Tetradecagono, radio, ut ſupra, exiſtente $\propto 1$, & latere Polygoni $\propto x$, æquationes inveniuntur $x - 1 \propto 0$, $xx + x - 1 \propto 0$, & $x^3 - xx - {}^2x + 1 \propto 0$, quæ præcedentibus Trianguli, Pentagoni, & Heptagoni ſunt ſimpliciores (id quod ſimiliter de ſequentibus Polygonis, dupli angulorum numeri, intelligendum eſt): conſultiùs fuerit ut in eorum deſcriptionem æquationes, quæ Polygonis hiſce dupli angulorum numeri reſpondeant, inveſtigemus.

Quoniam autem ad æquationes haſce, ſicut & ad ſuperiores, compendioſè inveniendas plurimùm deſerviunt æquationes, quibus datum angulum ſeu arcum in partes aliquot æquales dividere licet, ſubjungam eas, quæ ab eodem Huddenio hunc in finem ſunt inventæ, qui ipſas tantâ cum facilitate unam ex alia elicere novit, ut unius circiter horæ quadrantis ſpacio ſequentes mihi ſuppeditaverit,

Æquationes, ad dividendum angulum ſeu arcum in partes æquales, numero impares.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 3x \mp q \propto 0 \ldots \\ x^5 - 5x^3 \mp 5x - q \propto 0 \ldots \\ x^7 - 7x^5 \mp 14x^3 - 7x \mp q \propto 0 \ldots \\ x^9 - 9x^7 \mp 27x^5 - 30x^3 \mp 9x - q \propto 0 \ldots \\ x^{11} - 11x^9 \mp 44x^7 - 77x^5 \mp 55x^3 - 11x \mp q \propto 0 \ldots \\ x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x - q \propto 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{æquatio, ad} \\ \text{dividendum} \\ \text{angulum ſeu} \\ \text{arcum in} \end{array} \left\{\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \end{array}\right\} \text{æquales partes.}$$

 Ratio

Ratio autem, quâ eas invenit, eſt talis:

Suppoſito radio circuli $\propto 1$, & ſubtenſa arcus dati $\propto q$, ponatur ſubtenſa quæſitæ partis $\propto x$. Dein operatio ad triſectionem ita inſtituatur

tuatur	x	. I
Mult. per	x	. 2
ſubtr.	xx	. 3
ex unitate ſeu 1		. 4
	$1 - xx$	. V
Mult. per	x	. 2
	$x - x3$	. 6
add.	x	. I
	$^2x - x3$	. VII
add.	x	. I
Eritque	$q \propto 3x - x3$	. 8. Æquatio triſectionis.

Ad quinque ſectionem, ſicut & ad omnes ulteriores ſectiones impares, idem fermè eſt proceſſus, modò pro primo termino nunc ſumatur ille, qui ante notabatur VII, & tertii termini ſubtractio non ampliùs jam ex unitate ſed ex eo, qui per V in immediatè antecedenti operatione denotabatur, deinceps in aliis omnibus fiat.

Quemadmodum hîc videre licet.

(VII)	$2x - x^3$	. I
Mult. per	x	. 2
ſubtr.	$2xx - x^4$	. 3
ex (V)	$1 - xx$	. 4
	$1 - 3xx + x^4$	. V
Mult. per	x	. 2
	$x - 3x^3 + x^5$	. 6
add.	$2x - x^3$	. I
	$3x - 4x^3 + x^5$	. VII
add.	$2x - x^3$	. I
& fit	$q \propto 5x - 5x^3 + x^5$	. 8. Æquatio quinque ſectionis.

Ope-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Operatio autem ſeptuſectionis eſt hujuſmodi;

$$
\begin{array}{lll}
\text{(VII)} & 3x - 4x^3 + x^5 & .\ 1 \\
\text{Mult. per} & x & .\ 2 \\
\hline
\text{ſubtr.} & 3xx - 4x^4 + x^6 & .\ 3 \\
\text{ex (V)} & 1 - 3xx + x^4 & .\ 4 \\
\hline
 & 1 - 6xx + 5x^4 - x^6 & .\ \text{V} \\
\text{Mult. per} & x & .\ 2 \\
\hline
 & x - 6x^3 + 5x^5 - x^7 & .\ 6 \\
\text{add.} & 3x - 4x^3 + x^5 & .\ 1 \\
\hline
 & 4x - 10x^3 + 6x^5 - x^7 & .\ \text{VII} \\
\text{add.} & 3x - 4x^3 + x^5 & .\ 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Et habebitur $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$. 8. Æquatio ſeptuſectionis.

Et ſic de aliis in infinitum.

Deinde ut pateat, quo pacto æquationes, quibus datus angulus ſeu arcus in partes numero pares dividi poteſt, inveniendæ ſint, oportet tantùm in æquatione, quâ datus angulus ſeu arcus in æquales partes dividitur, loco quantitatis incognitæ x, ubique $\sqrt{4xx - x^4}$ ſubſtituere, & loco xx hujus quadratum, hoc eſt, $4xx - x^4$, atque ita porrò: habebiturque alia æquatio, per quam idem angulus ſeu arcus in duplo plures partes ſecabitur.

Sic, cum, exempli gratiâ, æquatio, quâ angulus in 2 æquales partes dividitur, ſit $x^4 - 4xx + qq \propto 0$, aſſumpto $4xx - x^4$ locum xx

$$
\begin{array}{lll}
\text{ſcribo} & 16x^4 - 8x^6 + x^8 & \text{pro } x^4 \\
\& & -16xx + 4x^4 & \text{pro} - 4xx \\
\text{nec non} & + qq & \text{pro} + qq, \\
\hline
\end{array}
$$

& invenietur $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + qq \propto 0$. Æquatio ſectionis anguli ſeu arcus in 4 æquales partes.

Sic &, æquatione, quâ angulus in 3 æquales partes dividitur, exiſtente $x^3 - 3x + q \propto 0$

$$
\begin{array}{lll}
\text{ſcribo} & \overline{4xx - x^4}\sqrt{4xx - x^4} & \text{pro } x^3 \\
\& & -3\sqrt{4xx - x^4} & \text{pro} - 3x \\
\text{ut \&} & + q & \text{pro} + q \\
\hline
\end{array}
$$

& habebo $q + 4xx - x^4 - 3\sqrt{4xx - x^4} \propto 0$

hoc eſt, $-4xx + x^4 + 3\sqrt{4xx - x^4} \propto q$

& fit,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

& ſit, ductâ utrâque parte in ſe quadratè, ordinataque æqualitate, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^{8} - 112x^{6} + 105x^{4} - 36xx + qq \propto 0$. Æquatio dividendi angulum ſeu arcum in 6 æquales partes.

Similiterque, cum $x^{8} - 8x^{6} + 20x^{4} - 16xx + qq \propto 0$ ſit æquatio, quâ angulus in 4 æquales partes ſecatur, invenietur, operando ut ante, $x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^{8} - 672x^{6} + 336x^{4} - 64xx + qq \propto 0$. Quæ eſt æquatio dividendi angulum ſeu arcum in 8 æquales partes. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, æquationes haſce inventas, quibus angulus ſeu arcus in æquales partes ſive pares ſive impares dividitur, non ſemper eſſe ſimpliciſſimas, niſi tantùm cùm partium illorum numerus eſt primus. At verò reliquas quod attinet, quamvis ad præcedentes referri poſſint, ipſas tamen nihilominus ſic ad Polygonorum æquationes, quales illas invenire intendimus, optimè omnium inſervire. Id quod oſtendere nunc noſtrum eſt inſtitutum.

In hunc finem inveniantur duæ æquationes diverſæ, unam eandemque habentes quantitatem incognitam. Ad quas obtinendas, aſſumpto radio $\propto 1$, & latere Polygoni, cujus numerus angulorum ſit dati duplus, $\propto x$, accipio duas æquationes ex jam inventis, quarum una inſerviat diviſioni anguli ſeu arcus in tot partes æquales, quot indicat minor ſemiſſis dati numeri angulorum; & altera eidem dividendo in tot partes, quot indicat ejuſdem numeri major ſemiſſis. Quæ binæ ſi deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, & in priori pro qq ſubſtituatur $2 - x$ & in poſteriori pro qq ſubſtituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes diverſæ, unam eandemque quantitatem incognitam habentes, quæ ſuperiori modo reductæ dabunt æquationem ſimpliciſſimam quæſitam, in quâ incognita quantitas latus Polygoni deſignat, dupli angulorum numeri.

Ut ad deſcribendum Pentagonum in circulo, quoniam, aſſumpto radio $\propto 1$, & latere Decagoni $\propto x$, minor ſemiſſis numeri angulorum 5, eſt 2, & major ſemiſſis 3, hinc duas accipio æquationes, ex ſupra inventis, nimirum: $qq \propto 4xx - x^{4}$ & $q \propto 3x - x^{3}$, quarum una inſerviat dividendo angulo ſeu arcui in 2, & altera eidem dividendo in 3 æquales partes. Quæ binæ ſi ad eandem quantitatem qq revocentur, atque in æquationibus inde ortis $qq \propto 4xx - x^{4}$ & $qq \propto 9xx - 6x^{4} + x^{6}$ pro qq in priori ſubſtituatur $2 - x$ & pro qq in poſteriori ſubſtituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes differentes ejuſdem radicis, nempe $x^{4} - 4xx - x + 2 \propto 0$ & $x^{6} - 6x^{4} + 9xx - x - 2 \propto 0$,

quæ,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quæ, modo ſupra explicato, reductæ dabunt $xx + x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Decagoni.

Sic & ad deſcribendum Heptagonum in circulo, quoniam ipſius 7, numeri angulorum, minor ſemiſſis eſt 3, & major ſemiſſis 4, ideo aſſumptis binis æquationibus $q \propto 3x - x^3$ & $qq \propto -x^8 + 8x^6 - 20x^4 + 16xx$, quarum prior angulo ſeu arcui in 3, & poſterior eidem in 4 æquales partes dividendo inſervit: fit, ut ſi ipſæ deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, ac in priori harum pro qq ſubſtituatur $2 - x$, & in poſteriori pro qq ſubſtituatur $2 + x$, duæ ejuſdem radicis æquationes, ſed tamen differentes, utputa $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \propto 0$ & $-x^8 + {}^8x^6 - 20x^4 + 16xx - x - 2 \propto 0$, remaneant. Quæ ſi porrò, ut ſupra, reducantur, dabunt $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Tetradecagoni.

Haud ſecus ad deſcribendum Endecagonum in circulo, ex binis æquationibus ſuperioribus $q \propto 5x - 5x^3 + x^5$ & $qq \propto -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ (quarum una ad angulum ſeu arcum in 5, & altera ad eundem in 6 æquales partes dividendum inſervit) duæ ejuſdem radicis æquationes differentes invenientur $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \propto 0$ & $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx - x - 2 \propto 0$. Quæ, ut ante, reductæ dabunt $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 22^{goni}.

Pari modo, ſi in circulo 13^{gonum} ſit deſcribendum, ope æquationum $qq \propto -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ & $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$, quibus datus angulus ſeu arcus in 6 & 7 æquales partes dividitur, invenientur binæ ejuſdem radicis æquationes differentes $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx + x - 2 \propto 0$ & $x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^4 - 196x^4 + 49xx - x - 2 \propto 0$. Ex quibus deinde, reductione ante oſtensâ, invenitur $x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6xx + 3x - 1 \propto 0$, æquatio ſimpliciſſima 26^{goni}. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, præter æquationes inventas & alias inveniri poſſe, quarum reductione, ut ſupra, faciliùs ad æquationes Polygonorum ſimpliciſſimas pervenitur: nimirum, aſſumendo æquationem ſectionis anguli ſeu arcus in tot partes æquales, quot Polygonum habet angulos, & in locum q ſubſtituendo deinde binarium: habebiturque æquatio, cujus incognita quantitas deſignat latus polygoni dupli angulorum numeri. Quæ æquatio ſi porrò cum altera ex binis ſuperioribus, quæ non per multiplicationem ad qq eſt reducta, compare-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tur: reductione harum duarum quæſita ſimpliciſſima, breviùs quàm ſupra, obtinebitur.

Ut quoniam ad deſcribendum in circulo Pentagonum æquatio ſectionis anguli ſeu arcus in 5 æquales partes eſt $x^5 - 5x^3 + 5x - q \propto 0$, mutatâ q in 2, habebitur $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$. Quæ eſt æquatio Decagoni. Hæc autem ſi cum $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, quæ altera eſt ſupra inventarum, multiplicatione ad qq non reducta, comparetur, præcedenti reductione ſimpliciſſimam Decagoni æquationem breviùs quàm ſupra manifeſtabit. Et ſic de aliis in infinitum.

Ad hæc notandum, cum & aliæ æquationes exiſtant, eidem Polygono in circulum deſcribendo inſervientes, quarum reductione, ſive illæ inter ſe, ſive cum aliis præcedentibus comparentur, æquatio ſimpliciſſima Polygoni inveniri queat: ſuffecerit id uno aut altero exemplo oſtendiſſe. Quippe in Decagono præter tres ſuperiores inventas, utputa $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 \propto 0$, & $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$, reperiuntur etiam $x^6 - 4x^4 + 4xx - 1 \propto 0$ & $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$.

Sic etiam in 14^{gono} præter tres $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \propto 0$, $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + x + 2 \propto 0$, & $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 2 \propto 0$ inveniuntur etiam $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, & $x^6 - 5x^4 + 6xx - 1 \propto 0$.

Haud ſecus in 22^{gono} præter tres $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \propto 0$, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + x + 2 \propto 0$, & $x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + 2 \propto 0$ invenitur etiam $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$.

Præterea animadverſione dignum, quòd, quemadmodum ſupra æquatio $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$, una ex binis pro Heptagono inventis, diviſa per $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, æquationem Pentagoni, dat $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Heptagoni; ita etiam hîc æquatio $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 14^{gono} inventis, diviſa per $xx + x - 1 \propto 0$, æquationem Decagoni, exhibeat $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 14^{goni}.

Sic etiam, quòd $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 22^{gono} inventis, diviſa per $x^3 - 3x + 1 \propto 0$, æquationem 18^{goni}, exhibeat æquationem $x^6 - 5x^4 - x^3 + 6xx + 2x - 1 \propto 0$. quæ, prout per $x + 1 \propto 0$ diviſa fuerit, oſtendat $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 22^{goni}.

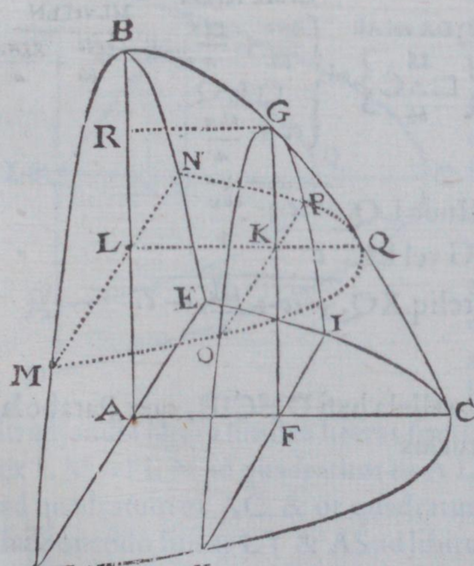
Oſtendimus itaque regulas generales, quibus æquationes omnium ſim-

ſimpliciſſimæ, tum ad angulum ſeu arcum in partes quotcunque æquales dividendum, tum ad deſcribenda in circulo quælibet Polygona regularia, inveniri queant. Ubi tandem advertendum, methodum hanc, quâ duæ aut plures æquationes differentes, unam tantùm eandemque quantitatem incognitam habentes, mutuâ reductione ſimpliciſſimam æquationum ſubminiſtrant, ad aliorum quoque difficiliorum Problematum æquationes ſimpliciſſimas inveſtigandas, inſervire poſſe.

SECTIO XXII.

De lineis curvis ſuperiorum generum, ex ſolidi ſectione ortis.

CUm curvarum linearum contemplatio per ſe jucunda pariter atque utilis exiſtat, ac illæ, quæ ſuperioris ſunt generis vel ultra Sectiones Conicas compoſitæ, à nullo (quod ſciam) hactenus ex ſolidi alicujus ſectione generari oſtenſæ ſint: viſum fuit, quæ circa hanc rem tribus abhinc annis ab ingenioſiſſimo ac amiciſſimo noſtro Huddenio excogitata & inventa ſunt, atque illarum cognitionem mirificè promovere valent, lubenti animo hîc impertiri.



Eſto DHCIE Parabola primi generis, (hoc eſt, qualis oritur ex ſectione Coni, uni laterum trianguli per axem parallelâ) cujus axis ſit AC, & ordinatim ad eum adplicata DAE. Erectâ autem ex A ſuper plano hujus Parabolæ perpendiculari AB, intelligantur ex B per ſingula puncta Parabolæ DHCIE deſcriptæ eſſe aliæ Parabolæ, habentes communem axem AB, ita ut DMBNE tota Parabola, & ABGQC ſemi-Parabola exiſtat. Quibus ita poſitis cum hoc pacto ſoli-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

dum concipi poſſit, in quo ſectio quævis per AB incedens, ut & quæ baſi DHCIE ſit parallela, Parabolæ exiſtunt; atque in eo deinde ſectio inſtitui queat, ut HOGPI, quæ Parabolæ DMBNE ſit parallela: dico ſectionem hanc HOGPI curvam fore, quæ 2di eſt generis.

Ad quod demonſtrandum ſupponatur planum baſi DHCIE æquidiſtans, ſecans quidem planum curvæ HOGPI ſecundùm rectam lineam OKP, & planum Parabolæ DMBNE ſecundum rectam MLN, at planum ſemi-Parabolæ ABGQC ſecundùm rectam LKQ, quodque ſecans ſolidum in ſectione faciat curvam MOQPN.

His igitur ſic præſuppoſitis, cum GF axis curvæ HOGPI ſit ipſi BA axi Parabolæ DMBNE parallelus, nec non rectæ MLN & OKP ipſis ordinatis DAE, HFI parallelæ: erunt & ipſæ MLN & OKP inter ſe parallelæ, & ad axes BA, GF ordinatæ. Deinde, ex G ductâ GR ipſi QKL vel CFA parallelâ, donec ſecet ARB in R, factâque GK ∞ x, OK vel KP ∞ y, AB ∞ a, AC ∞ b, DA vel AE ∞ g, & GR vel KL ∞ c, procedo, ut ſequitur.

Ex natura Parabolæ

□AC □RG AB

$bb \ldots\ldots cc \ldots\ldots a \mid$ ad RB. $\frac{acc}{bb}$

Ex natura Parabolæ: AB a —— adde LR vel KG. x —— LB. $\frac{acc}{bb} + x$

□DA vel AE $\left\{ \frac{gg}{bb} \text{ □AC} \right\}$ ad $\left\{ \frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a} \right.$ (□ML vel LN), unde ML vel LN $\sqrt{\frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a}}$.

□LQ $cc + \frac{bbx}{a}$

$$\text{Unde LQ.}\ \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}$$

$$\text{ſubtr. RG vel LK.}\ c$$

$$\text{reliq. KQ.}\ \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - c.$$

Jam quia ſectio MOQPN, parallela baſi DHCIE, quæ Parabola eſt, etiam Parabola exiſtit: erit rurſus

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Ex natura Parabolæ

$$\begin{array}{cccc} LQ & KQ & \Box ML \text{ vel } LN & \Box OK \text{ vel } Kp \\ \sqrt{cc+\frac{bbx}{a}} \ldots & \sqrt{cc+\frac{bbx}{a}},-c \ldots & \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a} \mid \text{ad} & \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\frac{\frac{ggc^3}{bb}+\frac{cggx}{a}}{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}} \propto yy. \end{array}$$

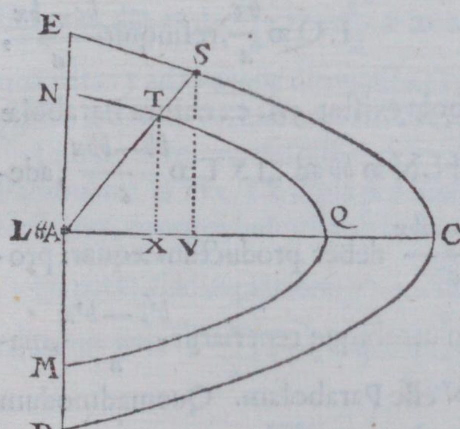
Hoc eſt, $yy \propto \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\sqrt{\frac{ac4g4+g4ccbbx}{ab4}}$, vel $\sqrt{\frac{ac4g4+g4ccbbx}{ab4}} \propto \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-yy.$

Unde, quadratis ſingulis partibus, demptiſque æqualibus, invenitur

$$\frac{g^4ccx}{abb}+\frac{g^4xx}{aa}-\frac{{}^2ggcc}{bb}yy-\frac{{}^2ggx}{a}yy+y^4 \propto 0$$

$$\text{Seu } y^4 \propto \frac{{}^2ggx}{a}yy+\frac{{}^2ggcc}{bb}yy-\frac{g^4}{aa}xx-\frac{g^4cc}{abb}x.$$

Cum igitur in hac æquatione quantitas incognita y ad quatuor dimenſiones aſcendat, nec ipſa æquatio ad aliam reduci poſſit, in qua y pauciores habeat dimenſiones, & in qua nullum ſimul ſignum radicale uni vel pluribus terminis præfigatur, in quibus reperitur x: ſequitur ſectionem HOGPI eſſe lineam curvam ſecundi generis.



Ut verò conſtet curvam MOQPN eſſe Parabolam, quemadmodum hactenus fuit ſuppoſitum, conſiderandum eſt, quadratum lineæ cujuſque ex L ductæ ad aliquod in ea punctum, facientis cũ L M vel L N quemcunque angulum, eandem habere rationem ad quadratum lineæ ex A ad Parabolam DHCIE ductæ, eundem cum AD vel AE angulum facientis, quam BL habet ad BA. Proinde ſumendo in adjuncta figura ſimiles literas ſimiles referre lineas, erit quadratũ ex L M vel L N ad quadratum ex A D vel A E, ut quadratum ex LQ ad quadratum ex AC, & ut quadratum ex L T ad quadratum ex A S; ſupponendo lineas LT & AS ad libitum eſſe ductas, ſicut dictum eſt.

Porrò ad veri inquiſitionem, demiſſis ex T & S ſuper L Q & A C

perpendicularibus TX & SV, voco AD vel AE *a*, LM vel LN *b*, AC *c*, & AV *x*, ac poſtea ita pergo.

□AD vel AE □LM vel LN □AC
aa — — — bb — — — cc | ad □LQ. $\frac{bbcc}{aa}$, unde LQ fit $\frac{bc}{a}$.

Ex natura Parabolæ

AC VC □AD vel AE
$c \ldots c-x \ldots aa$ | ad □VS. $\frac{aac-aax}{c}$

adde □AV. xx

□AD vel AE □LM vel LN
$aa \ldots bb \ldots$ □AS. $\frac{aac-aax}{c}+xx$ | ad □LT. $\frac{bbc-bbx}{c}+\frac{bb}{aa}xx$ } ſubtr.
□AS □VS □LT
$\frac{aac-aax}{a}+xx \ldots \frac{aac-aax}{c} \ldots \frac{bbc-bbx}{c}+\frac{bb}{aa}xx$ | ad □XT. $\frac{bbc-bbx}{c}$

reliq. □LX. $\frac{bb}{aa}xx$

Ergo LX. $\frac{bx}{a}$, quæ ſubducta ex LQ $\propto \frac{bc}{a}$, relinquit $\frac{bc-bx}{a}$, pro XQ.

Jam ſi curva MOQPN Parabola exiſtat, erit ex natura Parabolæ LQ $\propto \frac{bc}{a}$ ad XQ $\propto \frac{bc-bx}{a}$, ut □LN $\propto bb$ ad □XT $\propto \frac{bb-bbx}{c}$; adeoque ſi $\frac{bc}{a}$ multiplicetur per $\frac{bbc-bbx}{c}$ debet productum æquari producto ex $\frac{bc-bx}{a}$ in bb. Unde cum utrobique reperiatur $\frac{b^3c-b^3x}{a}$, manifeſtum eſt, curvam MOQPN eſſe Parabolam. Quemadmodum erat propoſitum.

Denique ſi hæc ſectio HOGPI incedat perpendicularis per hujuſmodi inventas curvas 2^{di} generis perinde atque ipſa jam per Parabolas 1^{mi} generis tranſire ſuppoſita fuit, exſurget inde alia rurſus altioris generis curva linea. Per quas ſi denuo ſimili modo ſectio tranſire fingatur, alia iterum ſuperioris generis curva obtinebitur. Atque ita deinceps in infinitum, ſicut ſuperiori modo fit manifeſtum.

Cæ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Cæterùm ut pateat, & aliâ ratione hujuſmodi curvas per ſolidi ſectionem generari poſſe, revocetur huc prima figura, in qua, ut ante, curvâ DHCIE exiſtente Parabolâ, cujus axis A C, & ordinatim adplicatâ DAE, recta AB ſit ad planum hujus Parabolæ D H CIE perpendicularis, & curva ABGQC ſemi-Parabola, cujus axis ſit B A, & ordinatim adplicatæ A C, LQ, RG. Deinde concipiatur Parabolam hanc DHCIE ſurſum moveri, ita ut, dum ejus planum continuè plano baſis eſt æquidiſtans, vertex ipſius C ſemper reperiatur in curva CQGB, & axis ejus A C in recta ALRB. Quibus ita poſitis, deſcribetur hâc ratione figura ſemi-Conoïdis D M B N E C, cui ſi altera ſimilis & æqualis figura adponatur, hæ binæ ſpeciem Conoïdis referent, cujus ideo ſemiſſis eſt DMBNEC. In qua Conoïde ſi porrò, ut ſupra, ſectio inſtituatur, qualis eſt H O G P I, exhibebit ipſa curvam lineam 2[di] generis.

Etenim factâ eâdem, quâ prius, præparatione, erit K Q, ut ante, $\propto \sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - c$; adeoque □ O K vel K P (propter Parabolam DHCIE) $\propto \frac{gg}{b}\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - \frac{ggc}{b} \propto yy$. Quæ æquatio, à ſigno radicali liberata, dat $y^4 + \frac{{}^{2}ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$. In hac verò cum incognita quantitas y ad quatuor dimenſiones aſcendat, nec ipſa, ut ante, reduci poſſit: ſequitur lineam curvam HOGPI eſſe 2[di] generis.

Jam ſi, in locum deſcribendi ſemi-Conoïdem D M B N E C per Parabolam D H C I E, ipſa per hanc inventam curvam HOGPI deſcribatur, exurget inde alia altioris generis curva linea.

Ut patet, ſi in æquatione $y^4 + \frac{{}^{2}ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$ in locum x ſubſtituatur $\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}, - c$, atque ipſa deinde à ſigno radicali liberetur: habebitur enim

$$y^8 + \frac{{}^{4}ggc}{b}y^6 \begin{matrix} + \frac{{}^{2}g^4c}{a} \\ + \frac{{}^{4}g^4cc}{bb} \end{matrix} y^4 + \frac{{}^{4}g^6cc}{ab}yy - \frac{g^8bbx}{a^3} \propto 0.$$

In quâ cum incognita quantitas y ad 8 dimenſiones aſſurgat, nec ipſa, ut ſupra, reduci poſſit: ſequitur, curvam hanc HOGPI fore quarti generis.

Eodem modo, ſi, ad deſcribendam hanc ſemi-Conoïdem DMBNEC,

DMBNEC, in locum præcedentis curvæ adhibeatur jam poſterior hæc inventa curva, exhibebit ſectio HOGPI aliam iterum altioris generis curvam, quæ octavi erit generis; atque hæc aliam rurſus altiorem 16ti generis. Et ſic ulteriùs in Geometrica Progreſſione in infinitum.

Porrò ſi in locum deſcribendi hanc ſemi-Conoïdem per Parabolam ipſa deſcribatur per motum ſemi-Circuli, aut ſemi-Ellipſis, aut etiam Hyperbolæ, cujus axis ſit A C, & ordinatim adplicata D A E: erit ſimiliter ſectio HOGPI linea curva ſecundi generis. Quæ ſingulæ rurſus in locum ſemi-Circuli, ſemi-Ellipſis, aut Hyperbolæ adhibitæ alias ſimiliter curvas quarti generis producent; & hæ denuò alias 8vi generis, atque ita deinceps in infinitum, ut ſupra.

Similiterque ſi loco ſemi-Parabolæ ABGQC ſumatur ſemi-Hyperbola, vel Ellipſis aut Circuli quadrans, ſectio HOGPI pariter curvam lineam altioris generis exhibebit, & hæc rurſus aliam altiorem, atque ita porrò in infinitum.

SECTIO XXIII.

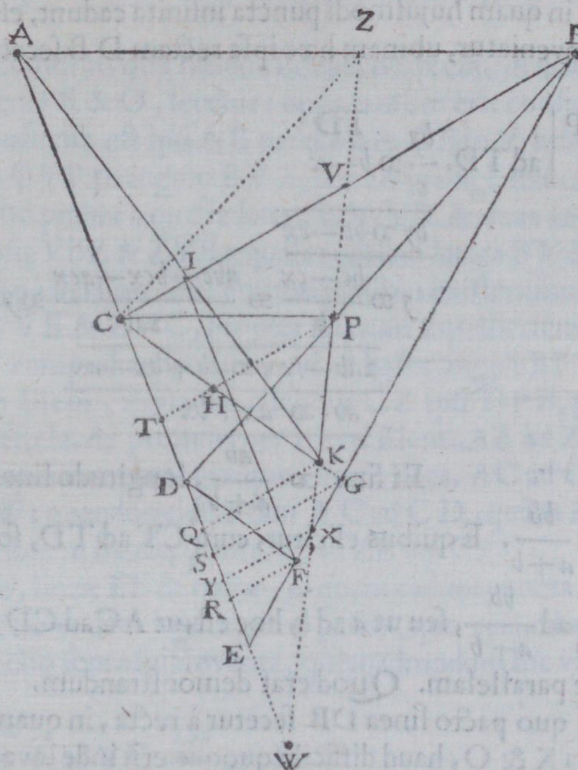
Demonſtratio primi modi conſtructionis Problematis 7mi, Appendicis, Problematum Simplicium.

QUoniam conſtructionis hujus veritas in profundo magis latère videatur, quàm ut ipſa à quovis, ut quidem aliarum conſtructionum, in eadem Appendice traditarum, demonſtrationes inveniri poſſit, quæque idcirco à nobis, ne aliis exercendi materiam præriperemus, conſultò ſunt omiſſæ: non è re fuerit in ejuſdem conſtructionis demonſtrationem ſequentia in medium afferre.

Eſto AC $\propto a$
CD vel DE $\propto b$, eritque CE $\propto 2b$
CB $\propto c$
CQ $\propto x$, eritque AQ $\propto a+x$
& QK $\propto y$.

AQ — QK — AC
$a+x$ — y — a | ad CI ſeu RF $\frac{yy}{a+x}$. Unde SG erit $\frac{2ay}{a+x}$.

CB



$$\begin{array}{l} CB\ CE\ SG \\ c-2b-\frac{2ay}{a+x} \end{array}\Bigg|\ \text{ad } \begin{array}{l} CE.\ 2b \\ SE.\ \frac{4aby}{ca+cx} \end{array}\Bigg\}\text{ſubtr.}$$

$$\begin{array}{l} QK\ CQ\ SG \\ y-x-\frac{2ay}{a+x} \end{array}\Bigg|\ \text{ad } CS.\ \frac{2ax}{a+x} \propto CS.\ \frac{{}^{2}abc+{}^{2}bcx-{}^{4}aby}{ca+cx}.$$

$$acx \propto abc+bcx-{}^{2}aby$$

$${}^{2}aby \propto abc+bcx-acx$$

fit $y \propto \frac{abc+bcx-acx}{{}^{2}ab}$. Jam cum hæc æquatio id omne, quod puncti K vel O determinationem concernit, cujuſmodi illud hîc eſt inventum, includat, atque ipſa pari modo ad infinita alia determinanda (propter *x* vel *y* pro lubitu ſumendam) ſe

 exten-

extendat, nec illa etiam ad xy aut xx vel yy ſeu altiùs aſſurgat: ſequitur, lineam, in quam hujuſmodi puncta infinita cadunt, eſſe rectam.

Hinc ut inveniatur, ubinam hæc ipſa rectam D B ſecet, ita procedatur:

CB CD TP | TD
$c - b - y$ | ad TD. $\frac{by}{c} \infty b - x$

$$by \infty bc - cx$$

$$y \infty \frac{bc - cx}{b} \infty \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \infty y$$

$$2ab - 2ax \infty ab + bx - ax$$

$$ab \infty ax + bx$$

Et fit $x \infty \frac{ab}{a+b}$, longitudo lineæ CT. unde TD erit $\infty \frac{bb}{a+b}$. E quibus elicitur, cum CT ad TD, ſeu BP ad PD ſit, ut $\frac{ab}{a+b}$ ad $\frac{bb}{a+b}$, ſeu ut a ad b, hoc eſt, ut AC ad CD, rectam CP ipſi AB eſſe parallelam. Quod erat demonſtrandum.

Oſtenſis quo pacto linea DB ſecetur à recta, in quam cadunt inventa puncta K & O, haud difficile quoque erit inde invenire, quâ ratione lineæ CB, AB, EB, ut & AE, ſeu prout producta eſt, ab hac eadem recta ſecentur; id quod corollarii loco ſubjungere hîc viſum fuit.

Quocirca ut innoteſcat, quo in loco linea CB ab hac recta interſecetur, fiat $x \infty 0$: eritque $2aby \infty abc$

& fit $y \infty \frac{1}{2}c$. Id quod monſtrat, lineam C B à recta, in quam cadunt puncta K & O, bifariam dividi.

Deinde ad inveſtigandum, ubinam linea AE, ſeu, prout producta eſt, ab hac eadem recta ſecetur, ponatur $y \infty 0$

eritque $0 \infty abc + bcx - acx$

ſeu $acx - bcx \infty abc$

& fit CW $\infty x \infty \frac{ab}{a-b}$. Hoc eſt, erit ut $a - b$ ad a, ita b ad x. Ideoque aſſumptâ CY æquali CA, ſi ipſis D Y, Y C, & D C quæratur

ratur 4ta proportionalis C W: erit W punctum interſectionis quæſitum.

Porrò ut conſtet, quâ ratione linea AB à recta, in qua reperiuntur puncta inventa K & O, ſecetur: opùs tantùm erit conſiderare, poſtquam C P oſtenſa eſt ipſi A B parallela & C B in V bifariam diviſa, triangulum C V P triangulo B V Z, per 26 primi Elem., eſſe æquale. hoc eſt, quòd præter æqualia latera C V, VB, & duos angulos V C P & PVC, ipſis VBZ & ZVB æquales, etiam latera P V & V Z, ut & CP & ZB æqualia ſint. His enim æqualibus exiſtentibus, erunt & in triangulis P V B & Z V C, propter laterum æqualitatem, angulos ad verticem V comprehendentium, qui ad baſes anguli B P V & V Z C, per 4 Primi Elem., æquales; adeóque C Z ipſi D P B, per 27 Primi Elem., parallela. Ac proinde, per 2 ſexti Elem., AZ ad ZB, ſicut AC ad CD. E quibus exinde quoque inferre licet, AC ad CD eſſe, ſicut A W ad C W: quandoquidem tam A C ad C D, quàm A W ad C W eandem rationem habet, quam AZ ad ZB vel CP.

Denique, lineæ EB & rectæ, in quam cadunt puncta inventa K & O, interſectio eodem inveſtigatur pacto, quo rectæ hujus & lineæ DB interſectio ſupra fuit inventa, quemadmodum hîc videre licet.

CB CE YX
$c - 2b - y$ | ad YE. $\frac{2by}{c} \propto 2b - x$

$$2by \propto {}^2bc - cx$$

$$y \propto \frac{{}^2bc - cx}{{}^2b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y$$

$$2ab - ax \propto ab + bx - ax$$

$$ab \propto bx$$

ſit CY $\propto x \propto a$. Id quod oſtendit, ſumptâ CY, ut ante, æquali C A, ſi ex Y agatur YX ipſi C B parallela, hoc eſt, ut E B ſecetur in X, ita ut EX ad XB ſit, ſicut E Y ad Y C, punctum inventum X fore quæſitum.

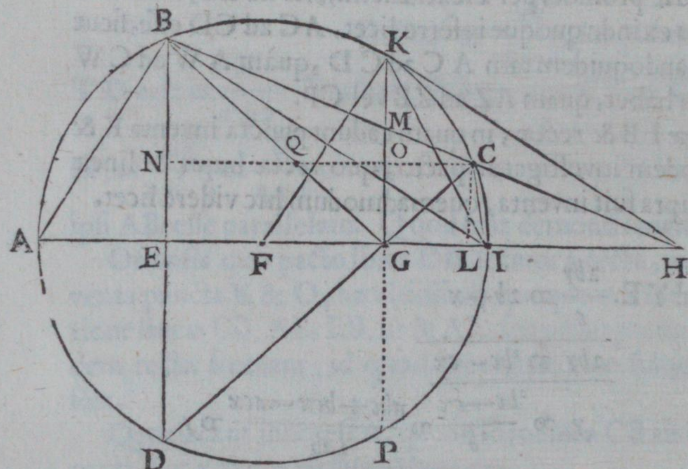
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIO XXIV.

Ratio diſquirendi proprietates circa objecta Mathematica.

CUm ad contemplationem naturæ eorum, quæ in his ſcientiis proponi queunt, non modò jucundum ſed etiam utile ſit intelligere, quâ ratione plures proprietates detegantur: viſum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de aliis objectis judicium fiat) indagavimus atque invenimus, ſicut videre eſt in ſequenti Poriſmate.

PORISMA.



Sit AE ∝ *a*
EG ∝ *b*
GI ∝ *c*
DE ∝ EB ∝ *d*
DG ∝ GB ∝ *e*
GC ∝ *f*
BM ∝ *g*
MC ∝ *h*
BH ∝ *i*
CH ∝ *k*
AH ∝ *l*
IH ∝ *m*
FG ∝ *n*
GM ∝ *p*
PG ∝ GK ∝ *q*
KH ∝ *r*

ABKCIPD *eſt circulus*
AH *eſt recta linea, ducta per centrum* F
BD *eſt perpendicularis ad* AH
DC *eſt linea ad libitum ducta, ſecans diametrum* AI *in* G
BCH *eſt recta linea, ducta ex* B *per* C, *donec occurrat ipſi* AH *in* H
GK *eſt linea ducta ex* G *ad angulos rectos ſuper* AH
AB, BG, BI, IC, IK, *&* KH *ſunt rectæ lineæ*

Inveſtigare quænam circa hæc contingant.

Mult.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Mult. AE. a Mult. DE. d
per EI. $b+c$ per EB. d

$$\square \text{AEI}.\ ab+ac \propto \square \text{DEB}.\ dd. \quad \text{per 35. 3 Elem.}$$

$$ac \propto dd - ab$$

Mult. AG. $a+b$ Mult. DG. e
per GI. c per GC. f

$$\square \text{AGI}.\ ac+bc \propto \square \text{DGC}.\ ef, \ \&\text{ fit } \frac{ac+bc}{f} \propto e, \text{ ac } \frac{ackk+bckk}{f} \propto ekk.$$

p 35. 3 Elem.

$$ac \propto ef - bc \propto dd - ab \propto ac$$

$$ef + ab \propto dd + bc$$

Hoc eſt,

$$\square \text{DGC} + \square \text{AEG eſt} \propto \square \text{DEB} + \square \text{EGI}.$$

Corollarium.

Hinc ſi ſupponatur AE ꝏ GI, hoc eſt, $a \propto c$, erit $ef+bc \propto dd+bc$; adeoque $ef \propto dd$. Hoc eſt, $\square$DGC ꝏ $\square$DEB.

Fiat propter ſimilia $\triangle^{la}$ EBH, LCH
ut BH ad BE, ita CH ad CL

$$i \text{ --- } d \text{ ----- } k \ \Big|\ \frac{dk}{i}$$

Rurſus, quia $\triangle$ DEG, vel ipſi æquale
BEG, eſt ſimile $\triangle^{lo}$ CLG: erit
ut DG vel GB ad DE vel EB, ita GC ad CL

$$e \text{ -------- } d \text{ ------ } f \ \Big|\ \frac{dk}{i}$$

Et fit $\frac{ek}{i} \propto f$. Hoc eſt, erit $\overset{\text{BH}}{i}$ ad $\overset{\text{HC}}{k}$, ſicut $\overset{\text{DG vel GB}}{e}$ ad $\overset{\text{GC}}{f}$.

vel $\frac{if}{e} \propto k$. Hoc eſt, erit $\overset{\text{CB}}{e}$ ad $\overset{\text{BH}}{i}$, ſicut $\overset{\text{GC}}{f}$ ad $\overset{\text{CH}}{k}$.

Hinc reſultat, cum BG ad GC etiam ſit, ut EG ad GL, id eſt, ut NO ad OC, aut ut BM ad MC: eſſe quoque BH ad HC, ſicut BM ad MC; vel etiam MB ad BH, ſicut MC ad CH. Unde ſimul emanat Prop. 3^{tia} libr. 6 Elem. videlicet, BG eſſe ad GC, ſicut BM ad MC, quando angulus BGC per rectam GK bifariam dividitur: quemadmodum hic patet, auferendo à rectis angulis AGK & IGK æquales angulos EGB & LGC.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

à BH. i ad B M. g
ſubtr. CH. $\overline{k}$ add. $\overline{\text{MC.} \; h}$

BC. $\overline{i-k} \propto$ BC. $\overline{g+h}$

dele k

$$i - \frac{if}{e} \propto g + h$$

GB BH BG-GC BC

$ei - if \propto eg + eh$. Hoc eſt, erit e ad i, ſicut $e-f$ ad $g+h$.

$$i \propto \frac{eg+eh}{e-f}$$

GC CH BG-GC BC

Vel etiam, quia e eſt ad i, ſicut f ad k: erit item f ad k, ſicut e-f ad $g+h$.
Similiter quia ex ſimilitudine △rum GOC, DNC eſt
ut GC ad GO vel CL, ita DC ad DN

$$f \text{———} \frac{dk}{i} \text{———} e+f \mid d+\frac{dk}{i}$$

Erit item GC ad CH, ſicut BG+GC ad BH+HC

$$f \text{———} k \text{———} e+f \mid i+k,$$

Hinc patet rationes GB ad BH, GC ad CH, BG-GC ad BC, & BG+GC ad BH+HC omnes inter ſe eaſdem eſſe.

Mult. BI. i Mult. AH. l
per HC. $\overline{k}$ per H I. $\overline{m}$

▭BHC. $\overline{ik} \propto$ ▭ AHI. $\overline{lm}$. p 36. 3 Elem.

$$i \propto \frac{lm}{k}$$

$f \quad f$

$$fi \propto \frac{flm}{k} \propto ek \propto fi$$

$$ekk \propto \frac{ackk+bckk}{f} \propto flm \propto ekk.$$

□GC □CH ▭AGI ▭AHI ▭BHC

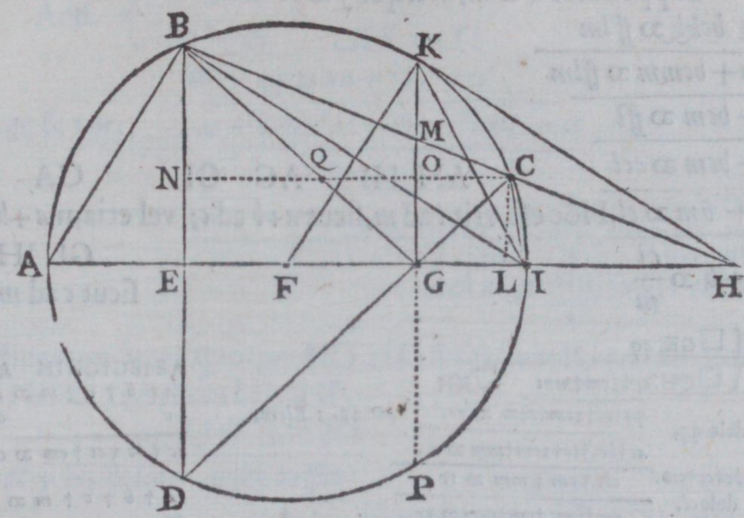
$ackk + bckk \propto fflm$. Hoc eſt, erit ff ad kk, ſicut $ac+bc$ ad lm vel ik.

□GC ▭AGI vel □GK CH HB

vel ff ad $ac+bc$ vel qq, ſicut k ad i.

Hinc liquet, cum ſupra quoque inventum ſit GB eſſe ad B H, ſicut GC ad CH: fore ſimiliter □GB ad □BH, ſicut ▭AGI ad ▭AHI.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16



$$\frac{ac+bc \;\infty\; ef}{\frac{ac+bc}{e} \;\infty\; f}$$
$$\frac{i \qquad i}{fi \;\infty\; ek \;\infty\; \frac{aci+bci}{e} \;\infty\; fi}$$

▭AGI vel □GK □GB CH HB

$eek \;\infty\; aci+bci$. Hoc eſt, erit $ac+bc$ vel qq ad ee, ſicut k ad i.

Hinc patet, cum □GC ad □GK ſit, ut CH ad HB; itemque □GK ad □GB, ut CH ad HB: quòd tria quadrata ex GC, GK, & GB proportionalia ſint; adeoque tres rectæ GC, GK, & GB.

▭BGC □GK ▭AGI AG GB

Unde fit ut ef ſit $\infty\; qq$, aut etiam $ac+bc$, hoc eſt, ut $a+b$ ſit ad e, ſi-
GC GI
cut f ad e.

E quibus inde per 6. 6 Elem. ſequitur: △ ABG ſimile eſſe △¹º GCI.

Similiter liquet, cum BM ad MC inventa ſit, ut BH ad HC, eſſe quoque BM ad MC, ſicut □BG ad □GK, vel □GK ad □GC.

Mult PM. $q+p$ Mult. BM. g
per MK. $q-p$ per MC. h

▭PMK. $qq-pp \;\infty\;$ ▭BMC. gh. *per* 35.3 *Elem.*

dele qq $qq \;\infty\; pp+gh$. Hoc eſt, □GK eſt ∞ □GM + ▭BMC.
$ef \;\infty\; pp+gh$. Hoc eſt, ▭BGC eſt ∞ □GM + ▭BMC.

Sup-

Supponatur $k \propto m$, eritque $f \propto c$.

$ackk + bckk \propto fflm$

$acmm + bcmm \propto fflm$

$acm + bcm \propto ffl$

$acm + bcm \propto ccl$

AH HI AG GI GA AH

$am + bm \propto cl$. Hoc eſt, erit l ad m, ſicut $a+b$ ad c; vel etiam $a+b$ ad l,

GI IH

$$a+b \propto \frac{cl}{m}$$

ſicut c ad m.

Add. { □GK. qq
□CH. $cc+2cm+mm$ □KH

$qq+cc+2cm+mm \propto rr$. *per 47. 1 Elem.

dele qq. $ac+bc, +cc+2cm+mm \propto rr$.

dele $ac+bc+cc+cm$. $cl, +cm+mm \propto rr$

dele cl. $am+bm, +cm+mm \propto rr$

vel $ml \propto rr$

AE+EG+GI+IH AH
$a+b+c+m \propto l$
c c

$ac+bc+cc+cm \propto cl$

$a+b+c+m \propto l$
m m

$am+bm+cm+mm \propto ml$

Hoc eſt,

▭ AHI eſt $\propto$ □ KH. Unde ſequitur lineam KH, per 37. 3 Elem., tangere circulum in K; hoc eſt, angulum FKH eſſe rectum.

Ubi notandum, quòd, ſicut ▭la AGI & BGC æqualia ſunt ac ſingula æqualia ex GK, in quo deſinunt, perinde etiam ▭la AHI & BHC æqualia ſint ac ſingula æqualia quadrato ex KH, in quo ſimiliter hæc ipſa deſinant.

FG GK GH

℘ Cor. 8. 6. Elem. n — q — $c+m$, ſunt 3 proportionales

Et fit $nc+nm \propto qq$. ℘ 16. 6 Elem.

HG GA IG GF

dele qq. $nc+nm \propto ac+bc$. Hoc eſt, erit $c+m$ ad $a+b$, ſicut c ad n.

$nc \propto ac+bc-nm$.

$2nc \propto 2ac+2bc-2nm$

$$i \propto \frac{lm}{k} \propto \frac{eg+eh}{e-f} \propto i$$

Hoc eſt,

GB·GC ſeu QB CH ▭GBC ▭AHI ▭BAC □KH

erit $e-f$ ... ad ...... k, ſicut $eg+eh$ ad lm vel ik vel rr.

Add.

Add. $\left\{\begin{array}{l}\square FG.\ nn\\ \square GK.\ qq\end{array}\right.$ $\square$FK vel FI

$nn + qq \infty nn + 2nc + cc$

dele qq & $2nc$. $ac + bc \infty {}^2ac + {}^2bc - {}^2nm, + cc$

$ac + bc \infty {}^2mn - cc$

GI IH GF FI

$\frac{ac + bc + cc}{2} \infty mn$. Hoc eſt, erit c ad m, ſicut n ad $\frac{a+b+c}{2}$.

HI IF IG GF

vel m ad $\frac{a+b+c}{2}$, ſicut c ad n.

Hinc cum ſupra quoque HG ad GA ſit, ſicut IG ad GF: erit ſimiliter HG ad GA, ſicut HI ad IF.

$ackk + bckk \infty fflm$

GK KH GC CH

dele $ac + bc$, & lm. $qqkk \infty ffrr$

$qk \infty fr$. Hoc eſt, erit q ad r, ſicut f ad k.

Quocirca, cum ſupra etiam ſit G B ad B H, ſicut G C ad C H, erit pariter GB ad BH, ſicut GK ad K H.

$qqkk \infty ffrr$

BG GC $\square$KH $\square$CH.

dele qq. $efkk \infty ffrr$

$ekk \infty frr$. Hoc eſt, erit e ad f, ſicut rr ad kk. Quoniam autem B G ad G C ſupra quoque fuit inventa ut B M ad MC, vel etiam ut BH ad CH: erit pariter BM ad MC, vel BH ad HC, ſicut $\square$KH ad $\square$CH.

$ackk + bckk \infty fflm$

dele $a + b$. $\frac{cl, ckk}{m} \infty fflm$

GI IH GF CH

$cckk \infty ffmm$

$ck \infty fm$. Hoc eſt, erit c ad m, ſicut f ad k.

Hinc cum ſupra quoque ſit GB ad BH, ut & GK ad KH, ſicut GC ad CH; & GC ad CH, nec non GF ad FI, ſicut GI ad IH: erunt rationes GF ad FI, GC ad CH, GB ad BH, GK ad KH, & GI ad IH omnes inter ſe eædem. Ex quibus porrò, per 3. 6 Elem., ſequitur, rectas IB, IK, & IC ſecare angulos GBH, GKH, & GCH bifariam.

Atque ita porrò, comparando inter ſe quantitates, ſic ut aliæ atque aliæ ſemper obtineantur æquationes, licebit circa ea, quæ propoſita ſunt, invenire proprietates innumeras.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIO XXV.

Specimina de Algebræ præſtantia.

CUm in Algebra ad modum ſolutionis indagandum alicujus Problematis, imponendo nomina quantitatibus tum datis, tum quæſitis, difficultas tota eò ſit reducenda, ut inveniatur Æquatio, atque illud ipſum ad hoc tanquam jam factum ſupponatur: facilè conſtat, quòd, dum illa omnes determinationes ſive conditiones includit, quæcunque circa Æquationis conſtructionem aut ſolutionem conſideranda veniunt, etiam ad modum, quo Problema reſolvendum ſit, pertineant. Quocirca, cum infinita Problemata ſint, quæ licèt toto genere diverſa videantur, ad eandem tamen Æquationem recurrant, hacque ratione pro eodem Problemate haberi poſſint: ita quoque contingit, ut unus idemque conſtructionis aut ſolutionis modus omnibus illis ſimul conveniat. Id quod ſequentibus Problematibus ceu exemplis patefacere non injucundum duximus.

Probl. 1. Trianguli rectanguli datâ baſe $\propto a$, & aggregato hypotenuſæ & perpendicularis $\propto b$: invenire hypotenuſam $\propto x$.

Probl. 2. Trianguli rectanguli datâ baſe $\propto a$, & differentiâ inter hypotenuſam & perpendicularem $\propto b$: invenire hypotenuſam $\propto x$.

Probl. 3. E termino datæ rectæ $\propto a$ erectâ ſuper ipſam perpendiculari indefinitâ, invenire longitudinem lineæ rectæ x, ex altero termino ad hanc ducendæ, quæ ſit æqualis perpendiculari abſciſſæ unà cum ipſius datæ a ſegmento præfinito contermino b.

Probl. 4. Datam rectam lineam $\propto b$ producere, ita ut quadratum productæ x unà cum quadrato datæ rectæ a ſit æquale quadrato totius lineæ $b+x$.

Probl. 5. Datam rectam lineam $\propto b$ ſecare in duo ſegmenta, ita ut quadratum minoris ſegmenti x unà cum quadrato datæ rectæ a ſit æquale quadrato majoris ſegmenti $b-x$.

Probl. 6. Datam rectam lineam $\propto b$ ſecare in duo ſegmenta x & $b-x$, ita ut differentia quadratorum ex ipſis ſit æqualis dato ſpacio aa. Quæritur majus ſegmentum $\propto x$.

Probl. 7. Invenire numerum x, à cujus quadrato xx ſi auferatur datus quadratus aa, relinquatur quadratus $xx - 2bx + bb$. Fit $x \propto \frac{bb + aa}{2b}$.

Igi-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Igitur aſſumendo ad arbitrium alium atque alium numerum pro b, inveniri hinc poterunt infinita triangula rectangula, eandem, datamque altitudinem habentia, quorum latera exprimantur per numeros rationales. Etenim ſi altitudo illa, ſive perpendicularis data, fuerit a, hypotenuſa erit $\frac{bb+aa}{2b}$. *Vnde baſis fiet* $\frac{bb-aa}{2b}$.

Vbi porrò liquet, ſi quis tot triangula rectangula invenire velit quot libuerit, quorum ſingula latera exprimantur per numeros rationales integros, multiplicandum eſſe tantùm ubique per denominatorem communem $2b$, *& fiet* $2ab$ *pro perpendiculari,* $bb+aa$ *pro hypotenuſa, &* $bb-aa$ *pro baſi.*

Hinc ſi a ſit 1, & b ſit 2, perpendicularis erit 4, hypotenuſa 5, & baſis 3. At ſi a ſumatur ∞ 3, & b ∞ 2, perpendicularis erit 12, hypotenuſa 13, & baſis 5. Et ſic de aliis in infinitum.

Idem quoque obtinere licet beneficio 1^{mi}, 2^{di}, 3^{tii}, 4^{ti}, *aut* 5^{ti} *Problematis, atque etiam beneficio* 6^{ti}, *ſi datum ſpacium fuerit quadratum.*

Datis duobus numeris *b* & *a*, invenire tertium *x*, minorem majore *b*, majorem autem minori *a*; ita ut, ſi ipſi minor addatur atque etiam ab eo auferatur, ſumma per reliquum multiplicata tantundem producat ac ſi exceſſus, quo major quæſitum ſuperat, in ſe multiplicetur. *Probl. 8.*

In ſympoſio fuerunt *x* pueri, *b* ∞ 8 mulieres, & *a* ∞ 12 viri. Quorum quilibet virorum tot expendit ſtufros, quot ipſi ſunt; ſimiliterque quævis mulier tot ſtufros, quos ſunt mulieres. Comperitur autem, ſi pueri ſinguli tot ſtufros ſolviſſent, quot exiſtunt mulieres, quòd numerus ſtufrorum, quos ſoluturi fuiſſent, tantum exceſſiſſet mulierum ſtufros, quantum idem numerus minor eſt numero ſtufrorum, à viris expenſorum. Quæritur quot pueri adfuerint? *Probl. 9.*

Datæ rectæ lineæ $b+a$, ſectæ in duo inæqualia ſegmenta *a* & *b*, majus ſegmentum *b* rurſus ſecare in duo alia ſegmenta *x* & $b-x$; ita ut rectangulum contentum ſub $x+a$, aggregato minoris ſegmenti *a* & intermedii *x*, & $x-a$, exceſſu quo idem medium ſegmentum *x* ſuſuperat minus *a*, ſit æquale quadrato reliqui ſegmenti $b-x$. *Probl. 10.*

Datam rectam lineam $a+b$, ſectam in 2 partes *a* & *b*, producere ad alterutram partem rectâ *x*; ita ut quadrata trium partium totius ſimul ſumpta æquentur rectangulo contento ſub productâ *x*, & compoſitâ ex productâ & duplo conterminæ partis. *Probl. 11.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Probl. 12. Datam rectam lineam ∞ b ſectam in 3 partes proportionales, ita ut aggregatum quadratorum ex illis ſit æquale dato ſpacio aa: invenire ſummam extremarum partium ∞ x.

Probl. 13. Rectanguli datâ differentia laterum ∞ b, & differentiâ quadratorum ex ipſis ∞ aa: invenire latus majus ∞ x.

Probl. 14. In triangulo æquicruri obtuſangulo, cujus utrumque crus datur ∞ b, & latus 3^{tium} ∞ a, demiſsâ ex vertice ſuper alterutro crure producto perpendiculari: quæritur x, aggregatum majoris ſegmenti & ſemiſſis baſis?

Probl. 15. Similiter: In triangulo æquicrure acutangulo, cujus utrumque crus datur ∞ b, & 3^{tium} latus ∞ a, demiſsâ ex vertice ſuper crus alterutrum perpendiculari: quæritur x, aggregatum minoris ſegmenti ex ſemiſſis baſis?

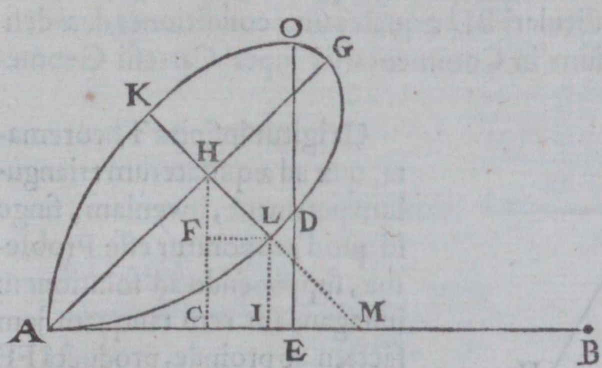
In his omnibus Problematîs cum x fiat ∞ $\frac{bb+aa}{2b}$, idemque ſimiliter in infinitis aliis contingat: manifeſtum eſt ad illa ſimul omnia ſolvenda, & quantitatem x inveniendam, nil aliud faciendum eſſe quàm addere quadrata datarum quantitatum b & a, & earum ſummam dividere per duplum ipſius b. Adeò ut hinc conſtet Algebram, cum æquationis beneficio infinita Problemata pro uno habeat eaque ſimul reſolvat, & ex datis notiſvé quantitatibus quæſitas ignotaſvé cujuſlibet generis doceat invenire, haud immeritò veram Logicam ac inveniendi artem, quâ mens in cognitionem rerum Mathematicarum & inde dependentium perducatur, exiſtimandam eſſe: ac proinde eam non ſine ratione Artem Magnam & divinam Scientiam ab aliis fuiſſe appellatam.

Patet itaque ex allatis Algebræ præſtantia ac utilitas. Verùm ut utrumque cuivis magis adhuc obvium ſit, vellem Lector conſideret ea, quæ hoc tractatu à me expoſita ſunt, ut & Problemata tam diverſa, quæ ſparſim per totum librum ſoluta reperiuntur, quorumque ſolutiones, paucis exceptis, per Algebram ſunt inventæ; ſicut etiam illa, quæ à Vieta ac præſertim Carteſio in ſua Geometria, & aliis denique præcellentibus Mathematicis ejuſdem beneficio præſtita ſunt ac perfecta. Vix enim futurum confido, ut, qui eximiæ hujus ſcientiæ infallibili fretus certitudine ſedulus hæc mecum perpenderit, de veritate mearum concluſionum in hac Sectione ullatenus ſit dubitaturus. Verùm tamen ut rei colophonem addam, ſequens Problema in medium afferre lubet unà cum ejuſdem conſtructione, qualem

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

lem eam ſubtiliſſimus ac præclarè doctus vir Juvenis D. Johannes Huddenius, Amſt. Batavus, atque amicus meus integerimus, haud ita pridem adinvenit.

PROBLEMA.



Eſt curva linea, cujus hæc eſt proprietas, ut, aſſumpto ubicunque puncto E in recta AB, ſi ex E ad curvam ducatur perpendicularis EO vel ED, voceturque $AE \infty x$, & EO vel $ED \infty y$, & data ſit recta linea $AB \infty n$, habeatur $xxx + yyy \infty xyn$: Oportet autem ducere KL, quæ curvæ maximam latitudinem deſignet.

Conſtructio.

Duco A G, ita ut angulus G A B ſit ∞ 45 gr., tum aſſumptâ A H $\infty \sqrt{\frac{1}{6}nn}$: erit KHL, ſecans A G ad rectos angulos in H, maxima latitudo quæſita.

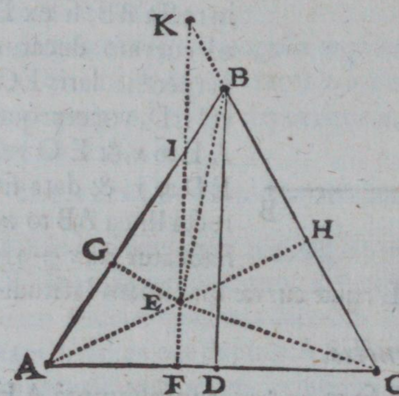
Quomodo autem Problematis hujus conſtructio præter Algebram inveniri poſſit, non video. Cum enim curva hæc ex nullo Theoremate prædemonſtrato, quod eam concernit, definiri aut deſcribi hîc intelligatur, quippe illa omnia huc ſpectantia adhuc ignorantur; ſed ex ſola æquatione $x^3 + y^3 \infty xyn$ determinetur & ab hac dependeat: manifeſtum eſt, ea, quæ circa hanc curvam conſtruenda aut cognoſcenda veniunt, ex hac ipſa æquatione eſſe deducenda, adeoque eam illorum omnium eſſe quaſi fontem ſeu pro primo Theoremate habendam.

Cæterùm ut pateat quo pacto ex præſuppoſito aliquo Theoremate aut etiam ex ſola ſubjecti definitione, infinita alia Theoremata per Algebram eliciantur: placet hîc ulteriùs ea, quæ circa hanc rem ingenioſiſſimus noſter Huddenius olim mihi communicavit, lubenti animo impertire.

Cum verò illa ad quaſvis quæſtiones, ſive determinatas,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ſive indeterminatas, ſe extendant; atque etiam in iiſdem perinde ſit ſive una, ſive duæ, ſive plures conditiones deſint: ſuffecerit, ut hæc ipſa per exemplum explicemus, utendo ad hoc triangulo æquilatero ABC, in quo ad determinationem puncti E, ad tres ex eo perpendiculares EF, EG, & EH ad oppoſita latera demittendas, quæ ſimul ipſi perpendiculari BD æquales ſint, conditiones duæ deficiunt. Quemadmodum in Commentariis ſuper Carteſii Geometriam ante explicui.



Ut igitur infinita Theoremata, quæ ad æquilaterum triangulum pertinent, inveniam, fingo id quod proponitur eſſe Problema, ſupponendo ad ſolutionem indagandam rem tanquam jam factam. ac proinde, productâ FE donec ſecet AB in I, & cum CB productâ conveniat in K, junctiſque AE, EB, & EC, facio AD vel DC ∞ a (eritque AB, BC, vel AC ∞ $2a$), DB ∞ b, AF ∞ x, (eritque FC ∞ $2a-x$) FE ∞ y, EG ∞ v, & EH ∞ z.

Quibus ita poſitis, fingendo, ad quæſiti inventionem, aliquam ex hiſce lineis eſſe inveſtigandam, ut, verbi gratiâ DB, quam vocavi b: quæro quot modis diverſis ipſa enunciari poſſit, hoc eſt, quot æquationes differentes, quæ ſingulæ valorem ejus exprimant, reperiri contingat, quippe quælibet ex illis peculiare Theorema exhibet.

Quocirca ad inveniendam 1mam æquationem, cum tria triangula AEC, AEB, & BEC ejuſdem baſis exiſtant, atque ſimul ſumpta toti triangulo ABC ſint æqualia: erit

$$ay+av+az \infty ab,$$

adeoque $y+v+z \infty b$. Quod eſt primum Theorema.

Reliqua ſequens calculus indicabit.

AD

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

AD DB AF

a — b — x | ad FI. $\frac{bx}{a}$

ſubtr. FE. y

AB AD EG EG

$2a$ — a — EI. $\frac{bx}{a} - y$ | ad $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y \infty v$

$$bx - ay \infty 2av$$

$$bx \infty ay + 2av$$

2^{dum} Theor. $b \infty \frac{ay + 2av}{x}$.

DC DB FC

a — b — $2a - x$ | ad FK. $\frac{2ab-bx}{a}$

ſubtr. FE. y

BC CD EH EH

$2a$ — a — EK. $\frac{2ab-bx}{a} - y$ | ad $\frac{2ab-bx}{2a} - \frac{1}{2}y \infty z$.

$$2ab - bx - ay \infty 2az.$$

$$2ab - bx \infty ay + {}^{2}az$$

3^{tium} Theor. $b \infty \frac{ay + {}^{2}az}{2a - x}$. Nota.

Ex FK. $\frac{2ab-bx}{a}$

ſubtr. FI. $\frac{bx}{a}$

rel. IK. $\frac{2ab - 2bx}{a}$

Ex EK. $2z$

ſubtr. EI. $2v$

∞ rel. IK. $2z$ $2v$

$$2ab - 2bx \infty 2az - 2av$$

$$ab - bx \infty az - av$$

4^{tum} Theor. $b \infty \frac{az - av}{a - x}$.

Hoc Theorema à 2do in eo tantùm differt, quòd quantitas b hîc inveniatur ex $a, x, y,$ & z, & in 2do ex $a, x, v,$ & y. Aliàs autem ratio quærendi b utrobique eadem eſt.

EI EG EK EH EH

$\frac{bx}{a} - y \ldots v \ldots \frac{2ab-bx}{a} - y$ | ad $\frac{2abv - bvx - avy}{bx - ay} \infty z$.

$$2abv - bvx - avy \infty bxz - ayz$$

$$2abv - bvx - bxz \infty avy - ayz$$

5^{tum} Theor. $b \infty \frac{avy - ayz}{2av - vx - xz}$.

1. Apparet itaque DB, quam vocavi b, quintupliciter poſſe enunciari. Nam præter terminorum inæqualitatem, eorumque diverſimodam

dam connexionem primus modus caret terminis a & x, 2^{dus} z, 3^{tius} v, 4^{tus} y, & 5^{tus} nullo caret. Atque ideo 5 habemus Theoremata diſtincta, quorum 2^{dum}, 3^{tium}, & 4^{tum} ejuſdem cum 1mo ſunt naturæ, hoc eſt, Loci ad Superficiem; at verò 5^{tum} Loci ad Solidum.

II. Inventis autem quinque hiſce Theorematîs, poterunt exinde diverſis modis infinita alia inveniri. 1mo. Per additionem & diviſionem, utpote dividendo ſummam 1^{mi} & 2^{di}, 1^{mi} & 3^{tii}, 1^{mi} & 4^{ti}, 1^{mi} & 5^{ti}, 2^{di} & 3^{tii}, 2^{di} & 4^{ti}, &c. per 2. erit enim quotiens $\infty\, b$. Similiter addendo tres, quatuor, aut quinque, &c., & ſummam dividendo per 3, 4, aut 5, &c. 2do. Sicut autem jam infinita ope additionis & diviſionis invenimus, ita & infinita beneficio multiplicationis & extractionis inveſtigare licet. Etenim ſi duæ, tres, aut quatuor, &c. diverſæ iſtarum ſummæ in ſe invicem ducantur, atque ex producto extrahatur $\surd$ Q. $\surd$ C, aut $\surd$ QQ, &c: erit ſimiliter radix inventa ipſi b æqualis. 3^{tio}. Per multiplicationem & diviſionem, quippe multiplicando duas, tres, aut quatuor, &c. diverſas, & productum dividendo per 1, 2, aut 3, &c. alias; ſive ad id una ſola ſumatur, eaque in ſe ducatur quadratè, aut cubicè, &c.; ſive ad hoc ipſum ſumantur 2, aut 3, &c. diverſæ, diviſioque per earum productum inſtituatur: quoniam ſemper quotiens ipſi b æqualis eſt. 4to. Per additionem & ſubtractionem, quemadmodum per ſe manifeſtum eſt. 5to. Ex quibus infinitis ſummis demum ope dictæ additionis, ſubtractionis, multiplicationis, diviſionis & extractionis rurſus infinitæ aliæ pro b inveniri poterunt.

III. Hinc ſicut infinitos modos exprimendi valorem lineæ DB ſeu b invenimus, ita & infinitos alios quærere licet linearum AD vel DC, AF, FE, EG, EH, quas vocavimus a, x, y, v, z: Sumendo nempe quamlibet ſummam pro b inventam, in quâ a, x, y, v, vel z, quarum valores inveſtigare volumus, reperitur; ac deinde ex illa quærendo valores ipſarum a, (x, y, v, & z). Quemadmodum hîc liquet.

1.

$$\frac{ay + 2av}{x} \infty\, b$$

$$ay + {}^2av \infty\, bx$$

Ergo $a \infty \dfrac{bx}{y + {}^2v}$

2.

$$b \infty \frac{ay + {}^2az}{{}^2a - x}$$

$${}^2ab - bx \infty\, ay + {}^2az$$

$${}^2ab - {}^2az - ay \infty\, bx$$

Ergo $a \infty \dfrac{bx}{{}^2b - {}^2z - y}$

3.

$$b \infty \frac{az - av}{a - x}$$

$$ab - bx \infty\, az - av$$

$$ab + av - az \infty\, bx$$

Ergo $a \infty \dfrac{bx}{b + v - z}$.

Atque ita de aliis.

IV.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

IV. Jam ſicut omnia hæc Theoremata invenimus, quatenus conſideravimus lineas in triangulo hîc ductas; ita quoque idem obtineri poteſt circa alias; adeò ut ſolummodò aliam atque aliam linearum poſitionem in eo excogitare opùs ſit, ad infinitis modis, ut ſupra, alia infinita Theoremata, quæ à ſe invicem diſtincta ſint, omniaque æquilaterum triangulum concernant, invenienda. Id quod de his ſimiliter circa alias figuras cum rectilineas tum curvilineas intelligi debet, & ſe ad Circuli, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſis, aliarumque ſuperiorum generum curvarum linearum ut & ſolidorum inde ortorum proprietates inveſtigandas extendit, neque ſolo æquilatero triangulo hoc limitatur.

Liquet itaque quâ ratione infinitis modis ex præſuppoſito aliquo Theoremate aut etiam ſolâ figuræ vel ſubjecti definitione, quâ ipſius natura omnino determinetur, infinita deduci poſſint Theoremata, quæ omnia primo intuitu aut ex definitione illa, aut unum ex alio, niſi paucis fortè exceptis, non eliciantur; tam parùm, quin imò minùs, quàm ex natura circuli Theoremata omnia, quæ in 3[tio] & 4[to] libro Elementorum continentur, deducta fuerint. Quod autem reverâ Theoremata exiſtant, de eo quidem dubitari nequit, cum Theorema nil niſi Propoſitio, quæ aliquam ſubjecti proprietatem continet ac declarat, cenſeri debeat.

Ad hæc ſi Geometriæ præſtantiam, in demonſtrandis multis pulcherrimis ac admirabilibus Theorematîs, (hoc eſt, quæ (meo quidem judicio) primâ fronte è ſubjecti natura haud ita facilè deducantur, ſed per complures conſequentias ſecundùm artis regulas ex eâ elici debeant), conſiſtere, à quovis fermè hactenus judicatum eſſe, perpendatur: ſatis obvia cuivis erit Algebræ præſtantia ac utilitas, quippe quæ levi negotio innumera nobis admirabiliorum Theorematum ſubminiſtrare poteſt volumina. Unde facilè judicare licet, quanta laus Illuſtri Viro Renato des Cartes meritò conferenda ſit, è cujus Methodo hæc quaſi ultrò emanant, & his longè majora maximeque utilia ad nos redundant.

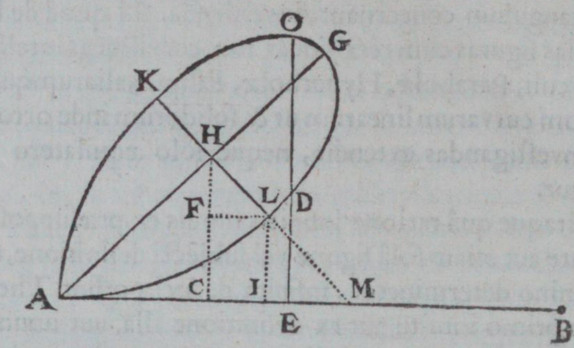
SECTIO XXVI.

Inveſtigatio Conſtructionis, præcedenti ſectione traditæ.

QUandoquidem cõſtructio Problematis, pręcedenti Sectione expoſita, una ex ſimpliciſſimis exiſtit, quę circa id inveniri queunt:

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

noningratum fore exiſtimavi, ſi modum eandem inveſtigandi, qualem eum acutiſſimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Gerh. Fil., omnium artificioſiſſimè excogitavit, ſequenti calculo exhiberem.



Angulum G A B eſſe 45 graduum, convincitur ex æquatione $y^3 - nyx + x^3 \propto 0$, in qua y & x eodem modo reperiuntur. Unde porrò concluditur, ſuppoſitis AI $\propto x$, IL $\propto y$, & AM $\propto z$, quòd IM ſit $\propto y$, & AM $\propto z \propto x + y$, id eſt, $z - x \propto y$, quæ 2da eſt æquatio; ac deinde, quòd AC vel CH ſit $\propto \frac{1}{2}z$, adeoque FH $\propto \frac{1}{2}z - y \propto ſ$, omnium intellige hujuſmodi linearum maximæ. Quæ 3tia eſt æquatio.

Quibus ita exiſtentibus, ſi in 1ma & 3tia, nimirum, $y^3 \propto nyx - x^3$ & $\frac{1}{2}z - y \propto ſ$, in locum y ſubſtituatur $z - x$, habebitur $z^3 - 3zzx + 3zxx - x^3 \propto nzx - nxx - x^3$ vel $z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$, & $x \propto ſ + \frac{1}{2}z$. Cætera calculus manifeſtabit.

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$$

dele x. $$\frac{1}{4}z^3 + 3zſſ \propto \frac{1}{4}nzz - nſſ$$

Mult. per $\quad 3 \qquad 1 \qquad 2$ — per Huddenii methodum de Maximis & Minimis.

$$\frac{3}{4}zz + 3ſſ \propto \frac{1}{2}nz$$

dele $ſ$. $$3zz + 12ſſ \propto 2nz$$

$$6zz + 12xx - 12zx \propto 2nz$$

$$12xx \propto 12zx + 2nz - 6zz$$

$$xx \propto zx + \frac{1}{6}nz - \frac{1}{2}zz$$

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$$

$$3zxx + nxx \propto nzx + 3zzx - z^3$$

$$xx \propto zx - \frac{z^3}{3z + n}$$

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

$$zx - \frac{z^3}{3z+n} = zx + \tfrac{1}{6}nz - \tfrac{1}{2}zz$$

$$\tfrac{1}{2}zz = \frac{z^3}{3z+n} + \tfrac{1}{6}nz$$

$$3zz = \frac{6z^3}{3z+n} + nz$$

$$9z^3 + 3nzz = 6z^3 + 3nzz + nnz$$

$$3zz = nn$$

$$\text{fit } z = \sqrt{\tfrac{1}{3}nn}$$

$$\text{Ergo AH} = \sqrt{\tfrac{1}{6}nn}.$$

SECTIO XXVII.

De inveſtigatione angulorum trianguli plani, cujus latera ſunt nota, abſque demiſſione perpendicularis.

QUò ad planorum triangulorum dimenſionem expeditiorem haud quidquam deficiat, lubet hoc loco in medium afferre quatuor Theoremata ſeu regulas, quibus ex cognitis lateribus trianguli cujuſcunque plani, abſque ejuſdem in rectangula triangula diviſione, quilibet angulus quadrupliciter inveſtigari poſſit: qualia illa ab eorum inventore D. Guilielmo Purſero, Mathematum peritiſſimo, Dublinii quondam addiſcere licuit. Sunt autem omnia Logarithmorum uſui accommodata, ut, vitato multiplicationis, diviſionis, atque extractionis tædio, operatio omnis per additionem, ſubtractionem, & bipartitionem procederet.

THEOREMA I.

Ut rectangulum ſub duobus lateribus, angulum quæſitum comprehendentibus, ad rectangulum ſub ſemiſſe omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera baſin ſuperant; ita quadratum radii, ad quadratum ſinus ſemiſſis anguli, quæſito adjacentis.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

THEOREMA II.

Ut rectangulum ſub duobus lateribus, angulum quæſitum comprehendentibus, ad rectangulum ſub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum baſi ſuperat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum baſi ſuperat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum ſinus ſemiſſis anguli quæſiti.

THEOREMA III.

Ut rectangulum ſub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum baſi ſuperat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum baſi ſuperat latus primum, ad rectangulum ſub ſemiſſe omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera baſin ſuperant; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis ſemiſſis anguli, quæſito adjacentis.

THEOREMA IV.

Ut rectangulum ſub ſemiſſe omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ duo latera baſin ſuperant, ad rectangulum ſub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum baſi ſuperat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum baſi ſuperat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis ſemiſſis anguli quæſiti.

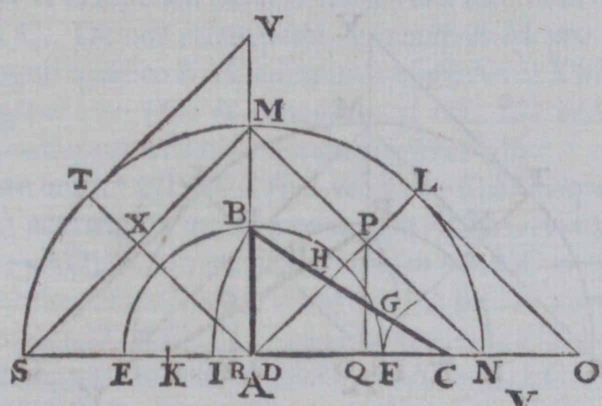
Voco angulum adjacentem alterius, eum, qui cum illo ſemicirculum complet vel illius ad 180 gr. eſt differentia; baſin verò latus illud, quod angulo quæſito opponitur. Denique triangulum hîc intelligitur rectangulum, acutangulum, vel obtuſangulum, prout quæſitus angulus eſt rectus, acutus, vel obtuſus.

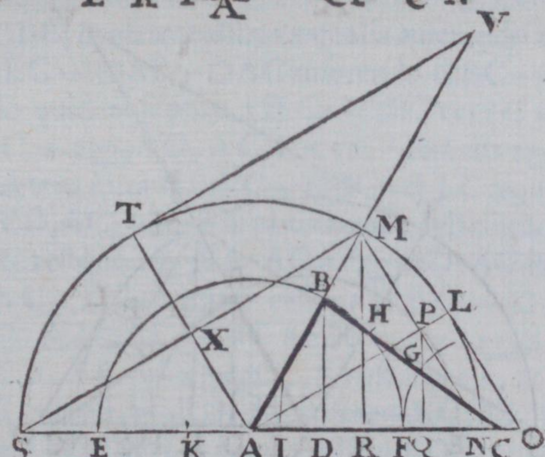
Sit triangulum ABC, in quo ex notis lateribus eliciendus ſit angulus A.

Deducatur ex B in AC, vel in ipſam, hinc inde productam, perpendicularis BD; atque radio AB deſcribatur ex A ſemicirculus EBF,

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

EBF, ſecans AC in E & F, tum ex C intervallo FC arcus FG, ſecans BC in G; ſeceturque BG bifariam in H. Rurſus centro C intervallo

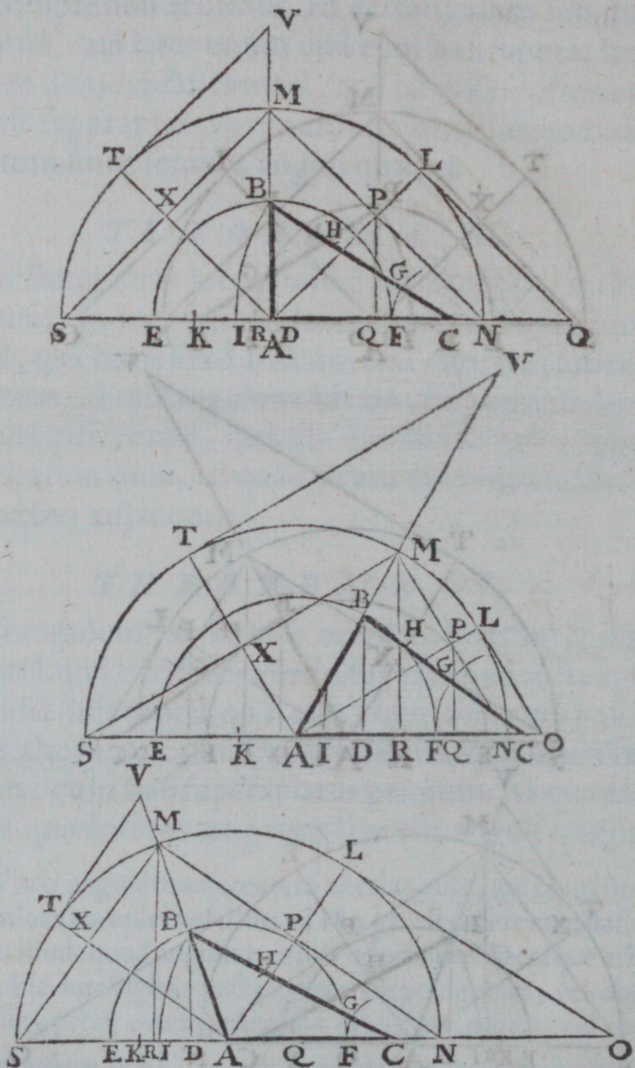






CB alius deſcribatur arcus BI, ſecans AC in I, & EI bifariam ſecetur in K. Porrò ex A deſcripto alio quovis ſemicirculo, ut SMLN, ſe-

cante AC in S & N, ipſam autem AB, vel eam productam in M, bifariam ſecentur arcus NM & MS in L & T, junganturque AL, AT,



& NM, MS, ſe mutuò ſecantes in P & X. Denique ductis LO, TV tangentibus ſemicirculum SMLN in L & T, ſecantibus verò AC,

A B inO & V, demittantur ex P & M in A C perpendiculares P Q, MR.

His ita poſitis, conſtat K I dimidiam eſſe differentiam, quâ bina latera A B, A C ſuperant baſin B C; at verò ſemiſſem omnium laterum eſſe K C. Deinde etiam patet, ſumendo A M pro radio, ſinum ſemiſſis anguli quæſito BAC adjacentis eſſe S X vel X M.

Dico igitur 1mo loco rectangulum B A C eſſe ad rectangulum CKI, ut quadratum AM ad quadratum SX vel XM.

Quoniam enim [a] □EC—□EA vel AB—□AC æquatur 2▭EA, AC; & in acutangulo quidem triangulo [b] □AC+□AB—□BC æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [c] □AC+□AB—□BC æquetur nihilo; at verò in obtuſangulo [d] □BC—□AB—□AC æquetur 2▭AD, AC: fiet, æqualibus æqualia addendo in acutangulo & rectangulo, hoc eſt, ad □EC—□AB—□AC addendo □AC +□AB—□BC; & ab æqualibus æqualia auferendo in obtuſangulo, hoc eſt, à □EC—□AB—□AC auferendo □BC—□AB—□AC, in acutangulo quidem ſumma □EC—□BC vel IC æqualis ſummæ 2▭EA, AC+2▭AD, AC, hoc eſt, [e] æqualis 2▭ED, AC; in rectangulo autem ſumma □EC—□BC vel IC æqualis 2▭EA, AC vel 2▭ED, AC; at verò in obtuſangulo reliquum □EC—□BC vel IC æquale reliquo 2▭EA, AC—2▭AD, AC, hoc eſt, [f] æquale 2▭ED, AC. Tribus igitur caſibus □EC—□IC æquale eſt 2▭ED, AC. Sed □EC—□IC [g] eſt æquale 4▭KC, KI. Quare etiam 2▭ED, AC ipſi 4▭KC, KI eſt æquale, ac proinde & ſemiſſis ſemiſſi, hoc eſt, ▭ED, AC ipſi 2▭KC, KI. Porrò cum AB ſit ad ED, ut AM ad SR; ut autem AB ad ED, ita [h], aſſumptâ communi altitudine AC, eſt ▭AB, AC ad ▭ED, AC ſeu 2▭KC, KI; at verò ut AM ad SR, ita, aſſumptâ communi altitudine AM, eſt □AM ad ▭AM, SR: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭KC, KI, ita □AM ad ▭AM, SR. Sumptiſque conſequentium ſemiſſibus, ut ▭AB, AC ad ▭KC, KI, ita □AM ad $\frac{1}{2}$▭AM, SR. Eſt autem $\frac{1}{2}$▭AM, SR, hoc eſt, $\frac{1}{2}$▭AS, SR æquale □SX vel XM: ſiquidem [i], propter ſimilitudinem triangulorum ASX, MSR, AS eſt ad SX, ut MS ad SR, aut ut $\frac{1}{2}$MS, hoc eſt, SX vel XM ad $\frac{1}{2}$SR. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭KC, KI, ita □AM ad □SX vel XM. Quod primò erat oſtendendum.

a ꝑ 4 Secundi Elem.
b ꝑ 13 Secundi Elem.
c ꝑ 47 Primi Elem.
d ꝑ 12 Secundi Elem.
e ꝑ 1 Secundi Elem.
f ꝑ 1 Secundi Elem.
g ꝑ 8 Secundi Elem.
h ꝑ 1 Sexti Elem.
i ꝑ 4 & 16 Sexti Elem.

Porrò conſtat, dimidiam differentiam, quâ latus unum A C unà cum baſe CB ſuperat latus alterum AB eſſe H C; & dimidiam diffe-

ren-

rentiam, quâ latus alterum AB unà cum baſe CB ſuperat latus primum AC eſſe BH. Deinde etiam patet, ſumendo AM pro radio, ſinum ſemiſſis anguli quæſiti BAC eſſe MP vel PN.

Dico igitur 2do loco rectangulum BAC eſſe ad rectangulum BHC, ut quadratum AM ad quadratum MP vel PN.

Quoniam enim [k] □AC+□AF vel AB −□FC æquatur 2▭AF, AC; & in acutangulo quidem triangulo [l] □AC+□AB−□BC æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [m] □AC+□AB−□BC æquetur nihilo; at verò in obtuſangulo [n] □BC−□AB−□AC æquetur 2▭AD, AC: fiet, ab æqualibus æqualia auferendo in acutangulo & rectangulo, hoc eſt, à □AC+□AB−□FC auferendo □AC+□AB−□BC, & æqualibus æqualia addendo in obtuſangulo, hoc eſt, ad □AC+□AB−□FC addendo □BC−□AB−□AC; in acutangulo quidem reliquum □BC−□FC vel CG æquale reliquo 2▭AF, AC−2▭AD, AC, hoc eſt, [o] æquale 2▭DF, AC; in rectangulo autem reliquum □BC−□FC vel CG æquale reliquo 2▭AF, AC vel 2▭DF, AC; at verò in obtuſangulo ſumma □BC−□FC vel CG æqualis ſummæ 2▭AF, AC + 2▭AD, AC, hoc eſt, [p] æquale 2▭DF, AC. Triplici igitur caſu □BC−□CG æquale eſt 2▭DF, AC. Sed □BC−□CG [q] eſt æquale 4▭BH, HC. Quare etiam 2▭DF, AC ipſi 4▭BH, HC eſt æquale, adeoque & ſemiſſis ſemiſſi, hoc eſt, ▭DF, AC ipſi 2▭BH, HC. Porrò cum AB ſit ad DF, ita AM ad RN; ut autem AB ad DF, ita, [r] aſſumptâ communi altitudine AC, eſt ▭AB, AC ad ▭DF, AC ſeu 2▭BH, HC; at verò ut AM ad RN, ita, aſſumptâ communi altitudine AM, eſt □AM ad ▭AM, RN: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭BH, HC, ita □AM ad ▭AM, RN. Sumptiſque conſequentium ſemiſſibus, ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad $\frac{1}{2}$▭AM, RN. Eſt autem $\frac{1}{2}$▭AM, RN, hoc eſt, $\frac{1}{2}$▭AN, RN æquale □MP vel PN: ſiquidem [s] propter ſimilitudinem triangulorum ANP, MNR, AN eſt ad PN, ut MC ad RN, aut ut $\frac{1}{2}$MC, hoc eſt, MP vel PN ad $\frac{1}{2}$RN. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad □MP vel PN. Quod ſecundò erat oſtendendum.

Præterea conſtat, ſumendo AT pro radio, tangentem ſemiſſis anguli quæſito BAC adjacentis eſſe TV.

Dico igitur 3^{tio} loco rectangulum BHC eſſe ad rectangulum IKC, ut □AT ad □TV.

Cum enim ex proximè demonſtratis ▭AB, AC ſit ad ▭BH, HC,

k ℘ 7 *Secundi Elem.*
l ℘ 13 *Secundi Elem.*
m ℘ 47 *Primi Elem.*
n ℘ 12 *Secundi Elem.*
o ℘ 1 *Secundi Elem.*
p ℘ 1 *Secundi Elem.*
q ℘ 8 *Secundi Elem.*
r ℘ 1 *Sexti Elem.*
s ℘ 4 & 16 *Sexti Elem.*

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

HC, ſicut □AM ad □MP vel PN: permutando erit [t] ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭BH, HC ad □MP vel PN, ſeu AX. Rurſus cum paulò ante oſtenſum ſit ▭AB, AC ad ▭KC, KI eſſe, ſicut □AM ad □SX vel XM: ſimiliter permutando erit, ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭KC, KI ad □SX vel XM. Unde [u] erit ut ▭BH, HC ad □AX, ſic ▭KC, KI ad □XM: & rurſus permutando ut ▭BH, HC ad ▭KC, KI, ita □AX ad □XM, ſeu □AT ad □TV. Quod tertiò erat oſtendendum.

t p 16 Quinti Elem.

u p 11 Quinti Elem.

Denique conſtat, ſumendo AL pro radio, tangentem ſemiſſis anguli quæſiti BAC, eſſe LO.

Dico igitur 4to loco rectangulum IKC eſſe ad rectangulum BHC, ut □AL ad □LO.

Etenim cum oſtenſum ſit ▭BH, HC eſſe ad ▭KC, KI, ſicut □AX ad □XM: convertendo erit [x] ut ▭KC, KI ad ▭BH, HC, ita □XM ad □AX, vel □AP ad □PN, ſeu □AL ad □LO. Quod quartò ac ultimò erat oſtendendum.

x p Cor. 4 Quinti Elem.

Illuſtratio per numeros.

Trianguli ABC eſto latus AB 5915②, & latus AC 91⓪, baſis verò BC 9555②. Quæritur angulus BAC.

Siquidem igitur angulus hic per præcedentes regulas quatuor modis inveniri poteſt, ſuffecerit ſi eum per 1^{mam} regulam inveſtigemus: cum reliquarum elucidatio huic parùm diſsimilis habenda ſit. Vt autem operatio tota per additionem, ſubtractionem, & bipartitionem abſolvatur: loco numerorum multiplicandorum & dividendorum accipiantur eorum Logarithmi, quales illos Clariſsimi Briggii tabula nobis ſuppeditat, quam Vir induſtrius ac de Matheſi practica optimè meritus D. Adrianus Vlaccus ad umbilicum poſtea perduxit, replendo Logarithmos numerorum à 20.000 ad 90 000, in ſerie naturali ab 1 ad 100.000 ante deſideratos. Cui porrò tabulæ, ad quæſiti anguli inveſtigationem, altera adhibenda eſt, Logarithmos continens ſinuum, quos idem Vir Clariſsimus ad graduum centeſimas conſtruxit, aſſumpto radio circuli 1000000000000000 partium, qualis illa in opere abſolutiſsimo, quod Trigonometria Britannica inſcribitur, contenta eſt; vel etiam illa, quam Vir laudandus Adr. Vlaccus, (ſequendo uſitatam hactenus graduum in ſexagenas partes diviſionem) pro ſinubus & tangentibus ad decades ſecundorum ſcrupulorum condidit, ſtatuendo radium 10000000000

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

partium, ſicut illam in opere, cui Trigonometriæ Artificialis titulum fecit, videre licet. Quarum tabularum ope quæcunque ad faciliorem & perfectiorem quorumvis triangulorum dimenſionem ſpectant, calculo facillimo expediuntur.

Hinc additis AB 5915② *& AC* 91⓪, *ſi à ſumma* EC 15015② *auferatur* CB 9555② : *erit reliqui ſemiſsis* KI 273①. *Cui addendo* IC *vel* CB 9555②, *habebitur* KC 12285②.

Deinde cum ▭ *AB, AC ſit ad* ▭ *KC, KI, ſicut* □ *AM ad* □ *SX vel XM, atque Logarithmi multiplicationem & diviſionem mutent in additionem & ſubtractionem, extractionem verò in bipartitionem: fiet, ut, ſi loco multiplicandi* ▭ *KC, KI per* □ *AM ad ipſarum KC, KI Logarithmos addamus duplum radii AM Logarithmum, & in locum dividendi productum per* ▭ *AB, AC ab hac ſumma auferamus ſummam Logarithmorum ipſarum AB, AC, reliquum* 197945417 *ſit Logarithmus quadrati ex SX vel XM. Cujus ſumendo ſemiſſem, loco extrahendi è* □ *SX vel XM radicem quadratum, habebitur* 98972708, *pro Logarithmo ipſius SX vel XM. Vnde cum utraque hæc ſinus exiſtat ſemiſsis anguli, quæſito BAC adjacentis, ſi in tabula quæratur cujus ſinus Logarithmo inventus numerus* 98972708 *proximè conveniat: reperietur SX vel XM fore ſinum graduum* 5213② *ſeu* $52\frac{13}{100}$, *vel etiam* 52 *gr.* 7′, *&* 48″. *Cujus ideo duplum, ut* $104\underline{26}$, *vel* 104 *gr.* 15′, *&* 36″, *erit quantitas anguli adjacentis. Quo ſubducto ex* 180 *gradibus, relinquetur quæſitus BAC* $75\underline{74}$, *vel* 75. 44′. 24″.

Vbi demum notandum, ſi pro Logarithmis auferendis addantur eorum complementa ad radium, non aliâ opùs fore ſubtractione. Vt liquet inferiùs ex collatione utriuſque praxeos.

			Logarithmi.	Logarithmi
Add. { AB.	59	15	1.7719.547	Compl. 8.2280.453
Add. { AG.	91		1.9590.414	Compl. 8.0409.586
ſumma EC.	150	15	ſumma 3.7309.961	
ſubtr. IC vel CB.	95	55		
reliquum EI.	54	6		
ſemiſſis EK vel KI.	27	3	1.4361.626	1.4361.626
add. IC.	95	55		
ſumma KC.	122	85	2.0893.752	2.0893.752
			20.0000.000	
			ſumma 23.5255.378	
differentia ſummarum			19.7945.417	ſumma 19.7945.417
ſemiſſis			9.8972.708	ſemiſsis 9.8972.708. Log. Sin.

52,13 gr.

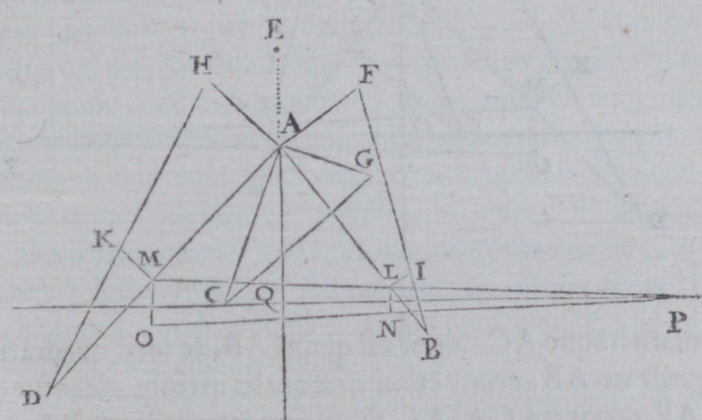
	graduum	
	52	13, vel 52.7.48
duplum	104	26, vel 104.15.36. ang. adjacens
reliq. ex 180 gr.	75	74, vel 75.44.24. angulus quæſitus BAC.

SECTIO XXVIII.

Ratio Geometrica inveniendæ lineæ meridianæ.

QUâ ratione ex tribus obſervationibus umbræ Solis, uno die in plano Horizontali factis, Geometricè inveniatur linea Meridiana, oſtendit mihi Pariſiis ante aliquot annos Mathematum peritiâ non minùs quàm omni virtute inſignis D. Claudius Mylon, J.C, cum quo tunc temporis familiariſſimè ſum verſatus, ac etiamnum amicitiam arctam colo. Quam quidem rationem ſe didiciſſe ait ex libro Italico, cui titulus: *Gli Horologi Solari nelle ſuperficie piane: Trattato di Mutio Oddi da Vrbino.* Verùm cum ipſa abſque demonſtratione ſit allata, placuit demonſtrationem qualem adinveni, unà cum Autoris methodo hîc ſubjicere.

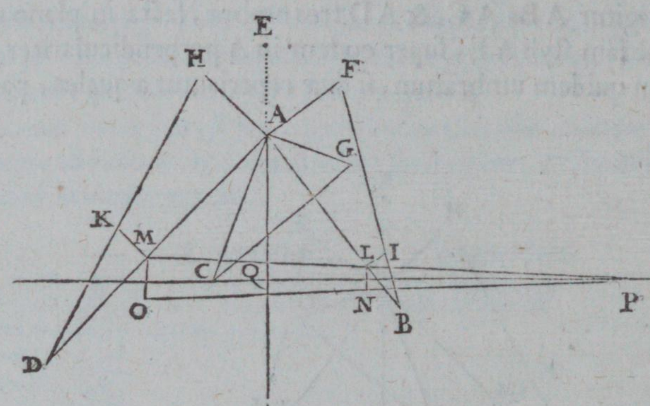
Sint igitur AB, AC, & AD tres umbræ, factæ in plano uno die per umbram ſtyli AE, ſuper eodem in A perpendiculariter erecti. Quarum quidem umbrarum, ſi duæ reperiantur æquales, patet, li-



neam à puncto A perpendiculariter demiſſam in eam, quæ conjungit illarum extrema, eſſe lineam Meridianam.

Si autem omnes tres ſint inæquales, ut ſi A C ponatur minima; erigendæ erunt in puncto A ſuper A B, A C, & A D perpendiculares A F, A G, & A H, ipſi ſtylo A E æquales, jungendæque F B, G C, & H D. Hinc quoniam A C minor eſt quàm A B, erit & G C minor quàm F B. Ob eandem rationem erit quoque G C minor quàm H D. Quocirca oportebit ex F B & H D auferre F I & H K ipſi G C æquales, & ex punctis I & K ſuper A B, A D deducere perpendiculares I L, K M; inde verò ex punctis L & M ſuper rectam hæc puncta jungentem alias duas perpendiculares erigere, ut L N & M O, quæ ipſis L I & M K ſint æquales. Siquidem autem duæ umbræ A B, A D inæquales ſunt, erunt ſimiliter F B, H D inæquales. Cum verò F I & H K æquales ſint ex conſtructione, ſequitur L I, K M ſeu L N, M O inæquales fore, adeoque, cum ipſæ ſint parallelæ, rectam, quæ puncta O & N conjungit cum recta M L producta concurrere. Concurrant igitur in punctum P, quo juncto cum puncto C, ex A in P C perpendicularis demittatur A Q, eritque linea Meridiana quæſita.

Atque hic ferè ſenſus Autoris eſt, ſequitur demonſtratio.



Quoniam itaque A C minor eſt quàm A B, ac ideo quadratum A C minus quadrato A B: erunt etiam, ſi æqualia utrinq; addantur quadrata A G, A F, quadrata C A, A G ſimul ſumpta quadratis B A, A F ſimul ſumptis minora. Sunt autem per 47 primi Elem. quadrata C A, A G æqualia quadrato G C; at verò quadrata B A, A F æqualia quadrato F B. Quare & quadratum G C quadrato F B minus erit, adeoque G C minor

nor quàm FB. Eodem modo GC minor oſtenditur quàm HD; ut &, cùm AB & AD inæquales ponuntur, quòd FB & HD inæquales ſint: adeò ut, ſi AD major fuerit quàm AB, HD quoque major ſit futura quàm FB. è quibus ſi porrò æquales auferantur HK, FI, relinquetur etiam KD major quàm IB.

Siquidem igitur KD major eſt quàm IB, habebit, per 8 Quinti Elem., HK ad KD minorem rationem, quàm FI ad IB. Unde & componendo, per 28 Quinti Elem., HD ad DK minorem rationem habebit quàm FB ad BI. Sed ut HD ad DK, ita eſt per 4 Sexti Elem. HA ad KM; & ut FB ad BI, ita eſt FA ſeu HA ad IL. Quamobrem & HA ad KM minorem rationem habebit quàm HA ad IL: unde, per 10 Quinti Elem., major erit KM quàm IL, ſive MO quam LN, ac proinde ML & ON productæ concurrent in P.

Intelligantur jam tria triangula ABF, ACG, & ADH perpendiculariter erecta ad ſubjectum planum ſuper rectas AB, AC, & AD. Quo fiet, ut tria puncta F, G, & H in unum coïncidant punctum, ut E, in verticem nempe ſtyli AE; & ut rectæ FB, GC, & HD ſint in Conica ſuperficie umbræ, quam Sol motu ſuo eo die deſcribit; cujus vertex ſit punctum E. Quocirca ſi in ipſis rectis ſumantur rectæ FI, GC, & HK inter ſe æquales, cadent puncta I, C, & K in circuli circumferentiam, cujus planum plano Æquatoris eſt parallelum. Ideoque ſi per puncta K & I in ejuſmodi poſitione recta linea concipiatur, ad planum Horizontale producta, concurret illa cum ML producta in punctum P, ubi videlicet ON producta cum ipſa concurrit. Adeò ut, puncto P exiſtente in plano illius circuli atque etiam in ſubjecto plano, nec non puncto C in utroque plano, recta linea per puncta P & C ducta communis interſectio utriuſque plani ſit futura. Quoniam verò hæc duo plana ad Meridiani planum recta ſunt, erit etiam illorum communis interſectio PC, per 19 undecimi Elem., ad idem Meridiani planum recta, ac proinde etiam ad lineam Meridianam, per 3 defin. undecimi Elementorum. Unde patet, lineam AQ perpendiculariter demiſſam ex A ſuper rectam PC, lineam Meridianam eſſe. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem porrò eſt, rationem hanc inveniendæ lineæ Meridianæ, non ſolùm locum habere in planis Horizontalibus, verùm etiam in verticalibus & in inclinatis, ſicut ex demonſtratione colligere licet.

Quòd ſi verò ſupra dictum planum plano Æquatoris parallelum

pro ipſo Æquatoris plano ſumatur, referet linea P C in omni alio plano lineam Æquinoctialem; perpendicularis autem A Q lineam Subſtilarem. Quod quidem adnotaſſe viſum fuit operæ pretium.

SECTIO XXIX.

Ratio deſcribendi horologia ſciatherica per triangulum iſoſceles.

CUm ad deſcribenda horologia ſciatherica modum ingenioſiſſimum, qui ope trianguli iſoſcelis perficitur, jam ante annos aliquot excogitârit Vir eruditus D. Samuel Forſterus, apud Londinenſes in Collegio Greſhamenſi Aſtronomiæ Profeſſor: viſum fuit eum, qualem Dublinii primùm apud Purſerum videre mihi contigit; unà cum ſcalarum conſtructione, quibus in finem illum utitur, paucis hîc exponere; præmittens ad ejuſdem demonſtrationem, hoc, poſtmodum à me inventum,

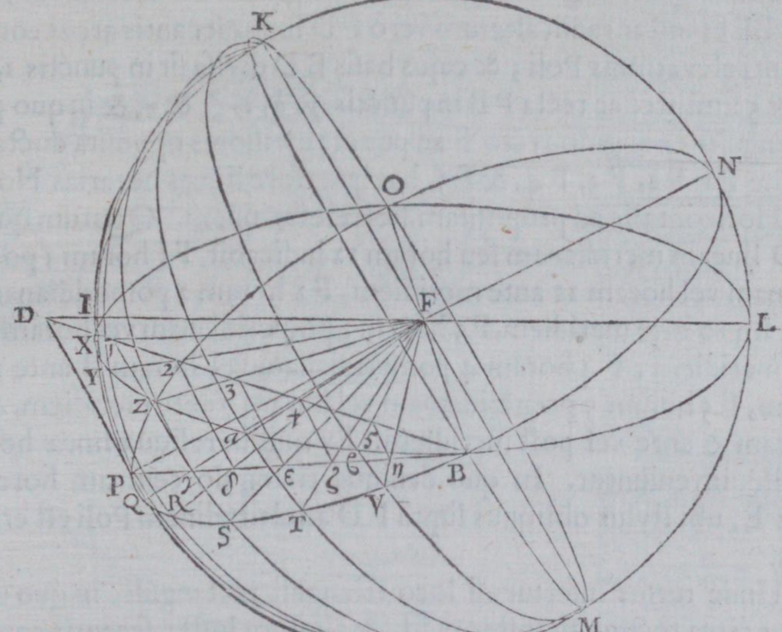
LEMMA.

Eſto circulus IKLM meridianus, cujus pariter atque mundi centrum ſit F: ſitqúe circulus IBLO horizon, linea verò IL plani horizontis & meridiani communis interſectio ſeu linea meridiana: & puncta K & M poli mundi: at KM axis: circulus autem BNOP æquinoctialis; cujus quidem & meridiani communis ſectio ſit PN; ipſius autem & horizontis BO. Circuli porrò horarii à meridie ſeu ſecantes ſunto KQM, KRM, KSM, KTM, KVM, & KBM, qui ſecent æquinoctialem quidem in Q, R, S, T, V, & B; horizontem verò in X, Y, Z, α, β, & B: ducanturqúe FQ, FR, FS, FT, FV, & FB, nec non FX, FY, FZ, Fα, Fβ, & FB. Denique junctâ BP, & ex P ductâ PD ipſi FK parallelâ, conveniente cum LI productâ in D, connectatur BD. Dico hanc ſecari à planis circulorum ſecantium in eadem ratione, in quâ recta BP ab iiſdem ſecta eſt.

Secent enim rectæ FQ, FR, FS, FT, & FV rectam BP in punctis

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

ctis $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, & η, eruntque ipſa in quibus plana circulorum ſecantium ſecant rectam BP. Eodem modo, rectæ FX, FY, FZ, Fα, & FB, ſecantes rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, erunt hæc ipſa puncta interſectionum, in quibus recta BD ſecatur à planis eorundem circulorum.



Dico igitur rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 ſimiliter ſectam eſſe atque recta BP in punctis $\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, & η.

Quoniam enim PD parallela eſt ipſi FK, atque FK ad planum circuli BNOP recta, erit quoque PD eidem plano ad rectos angulos, per 8 undecimi Elementorum. Jam verò ſi per ipſam & rectam PB vel BD planum tranſire intelligatur, utpote planum trianguli BPD, erit utique & illud ad planum circuli BNOP rectum, per 18 undecimi Elementorum. Porrò, ſiquidem omne planum quod per FK ducitur ad planum circuli BNOP rectum eſt, concipiatur planum per FK, quod plano trianguli BPD ſit æquidiſtans. Hæc igitur duo plana cum ambo ſecentur à planis circulorum ſecantium KPM, KQM, KRM, KSM, KTM, & KVM, ita ut communes interſectiones ſint rectæ

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

rectæ P D, γ 1, δ 2, ε 3, ζ 4, & η 5, ſequitur rectas haſce axi F K ut & inter ſe eſſe parallelas, per 16 & 9 undecimi Elementorum. Quare per 2 Sexti Elem. vel per ea, quæ demonſtrantur Prop^{ne} 10 ejuſdem libri, B D in eandem rationem ſecabitur in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, in quam recta B P in punctis γ, δ, ε, ζ, & η ſecta eſt. Quod erat propoſitum.

Hinc liquet, ſi fiat triangulum rectangulum B F D, cujus unum latus BF ſit inſtar radii; alterum verò F D inſtar ſecantis arcus complementi elevationis Poli; & cujus baſis B D diviſa ſit in punctis 1, 2, 3, 4 & 5 ſimiliter ac recta P B in punctis γ, δ, ε, ζ, & η; & in quo porrò triangulo ex angulo recto F ad puncta diviſionis oppoſita ductæ ſint rectæ F 1, F 2, F 3, F 4, & F 5, has ipſas fore lineas horarias Horologii Horizontalis ad propoſitam Poli elevationem. Quarum quidem F D lineam meridianam ſeu horam 12 indicabit, F I horam 1 pomeridianam vel horam 11 ante meridiem, F 2 horam 2 pomeridianam vel horam 10 ante meridiem, F 3 horam 3 pomeridianam vel horam 9 ante meridiem, F 4 horam 4 pomeridianam vel horam 8 ante meridiem, F 5 horam 5 pomeridianam vel horam 7 ante meridiem, & F6 horam 6 ante vel poſt meridiem. Ex quibus reliquæ lineæ horariæ facilè inveniuntur. In quo denique triangulo centrum horologii erit E, ubi ſtylus obliquus ſupra F D ad altitudinem Poli eſt erigendus.

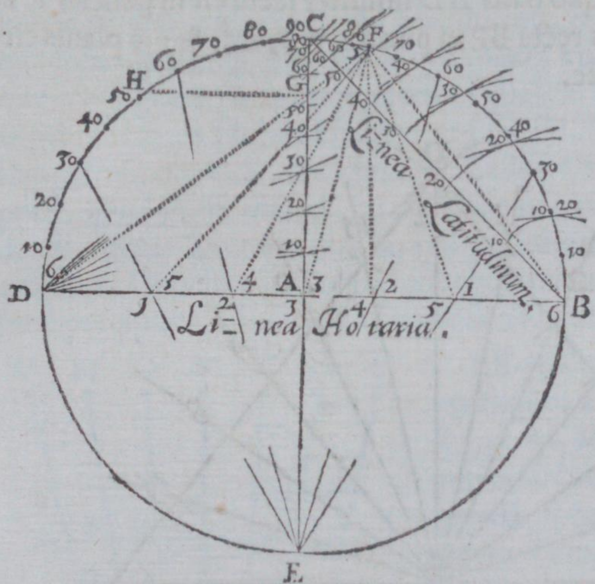
Unde rurſus infertur, ſi loco trianguli rectanguli, in quo unum latus circa rectum ſit inſtar radii, & alterum inſtar ſecantis complementi elevationis Poli, aliud aſſumatur triangulum rectangulum; cujus unum latus circa rectum ſit inſtar ſinus elevationis Poli, & alterum inſtar radii (ſiquidem ſinus arcus alicujus eſt ad radium, ut radius ad ſecantem complementi ejuſdem arcus); cujuſque baſis rurſus dividatur ſimiliter ac recta PB: idem obtineri, quod diximus.

Quibus præmiſſis perceptiſque accedimus porrò ad conſtructionem ſcalarum, quæ ſic ſe habet.

Centro A intervallo quocunque deſcribatur circulus, qui diametris BD, CE ad angulos rectos ſeſe decuſſantibus in quatuor quadrantes diſpeſcatur. Horum autem B C & C D in 90 gradus dividantur, & à puncto E ad gradus tricenos oppoſitos rectæ lineæ ducantur, quæ ſecent rectam B D: eritque D B ſic ſecta Linea Horarum dicta. Deinde dividatur radius AC ab A versùs C ſecundùm ſeriem ſinuum, poſitâque regulâ ad punctum D & ſingula puncta ipſius A C, quæ per-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

pertingat ad circumferentiam, quadrans B C in alias 90 partes diſpeſcatur, quæ numerationem à B versùs C accipiant. Quibus peractis, ſi à puncto B ad ſingula hæc interſectionum puncta rectæ lineæ ductæ concipiantur, ipſæque à B in recta BC notentur: erit BC ſic deſignata Linea Latitudinum appellata.



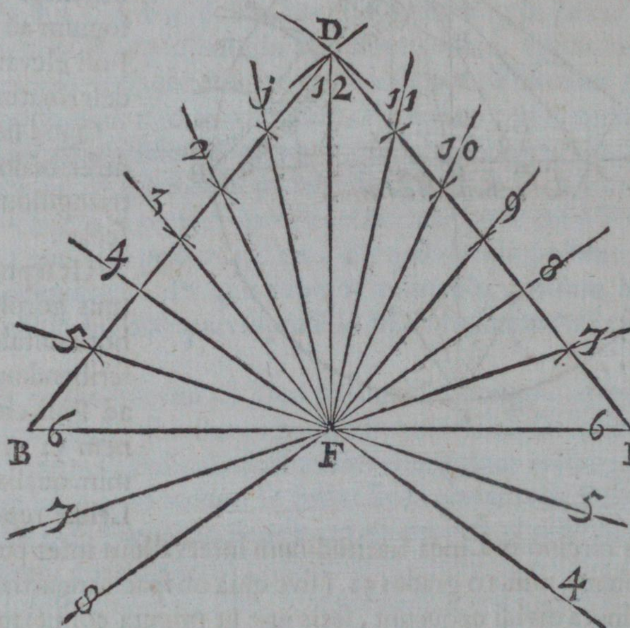
Præparatis igitur hiſce duabus ſcalis, ſupereſt ut oſtendamus, quâ ratione earundem beneficio Horologium ad datam Poli elevationem deſcribatur.

Quod fiet utiq; deſcribẽdo ad hoc triangulum iſoſceles.

Ut ſi proponamus horologium horizontale deſcribendum eſſe ad Poli elevationem 52 grad. 10 min. qualis ea hîc Leidæ reperitur: capiamus circino in Linea Latitudinum intervallum inter punctum B & terminum min. 10 gradus 52, (ſive quia ob ſpacii anguſtiam gradus in minuta dividi nequeunt, ſatis erit ut minuta conjiciamus ob exiguam differentiam quæ inde relinquitur), eoque notato in rectâ aliquâ indefinitâ à puncto F hinc inde uſque ad punctum B: capiamus porrò B D Lineam Horarum atque ad ejus intervallum ex utroque puncto B arcum decircinemus, quorum alter alterum ſecet in D, ita ut triangulum conſtituant iſoſceles BDB. In quo denique ſi denotemus ſuper æqualibus lateribus puncta omnia in Linea Horarum deſignata, atque ex puncto B per hæc ipſa rectas lineas ducamus, deſcriptum erit horologium quæſitum. Nam ut habeantur lineæ horariæ, quæ horas indicant ante 6tam matutinam, vel poſt 6tam veſ-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

pertinam, oportet tantùm jam inventas producere ex parte puncti F. Cujus quidem deſcriptionis ratio ex ſuperiori Lemmate perſpicua eſt. Liquet enim ex conſtructione, ſi triangulum rectangulum BDF circulo BCDE inſcriptum fuerit, ita ut latus ejus DF ſecet radium AC in G, tunc quidem AG ſinum fore grad. 52. min. 10. datæ videlicet Poli elevationis. In quo præterea triangulo latus unum BF eſt ad latus alterum FD, ut GA ad AD, hoc eſt, ut ſinus elevationis Poli ad radium; & in quo baſis BD ſimiliter ſecta eſt in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 ſicut ſuperiùs recta BP in punctis γ, δ, ε, ζ, & η à planis circulorum ſecantium. &c.



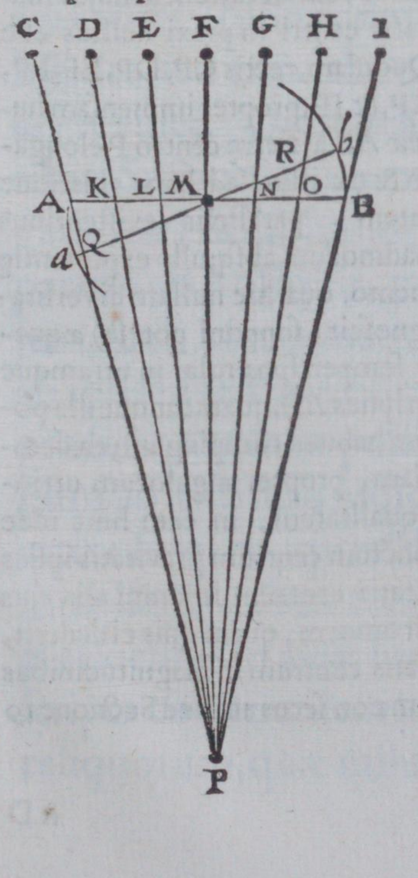
Operæ pretium duxiſſem reliquorum pariter horologiorum generum deſcriptionem hîc oſtendere, verùm cum in Angliam poſtea reverſus Londini tractatum ea de re à Forſtero ipſo vernaculâ linguâ conſcriptum invenerim, ac anno 1638 in lucem editum, cui titulus: *The Art of Dialling by à new, eaſje and moſt ſpeedii way*, quem adire licet: animum immutavi, ſufficere exiſtimans me ea hîc, quibus cætera innituntur, fundamenta demonſtraſſe.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

SECTIO XXX.

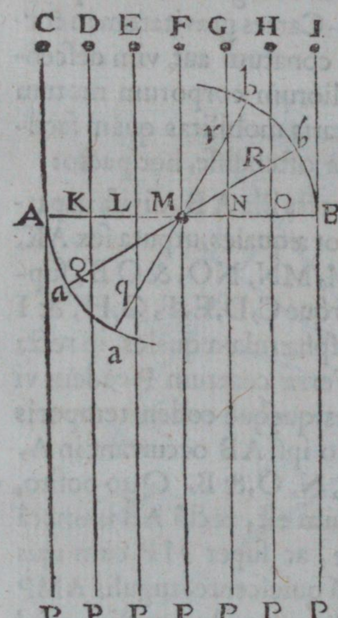
Quemadmodum centrum gravitatis in magnitudinibus mobile ſit intelligendum.

GRavitatis centrum in unoquoque corpore non fixum exiſtere, ex proprio principio ante complures annos deduxit Vir illuſtris Renatus des Cartes in tractatu ſuo de Mechanica, ubi naturam Vectis perſequitur. Quoniam autem eo nondum edito centri hujus naturam cuivis ex illo perſpicere haud obvium eſt, viſum fuit hoc loco aliam ejuſdem centri explicationem, quâ natura ejus perfacilè ab unoquoque intelligatur, in medium afferre; Qualem eam ingenioſiſſimus ac ſæpiùs laudatus D. Joh. Huddenius Ger. Fil. excogitavit, mihique illius participem fecit, ſtatuens cum D. des-Cartes gravitatem in corpore, quod grave dicitur, nil eſſe præter conatum aut vim deſcendendi versùs Terræ centrum, qui per aliorum corporum motum cauſetur. Quocirca ut centri hujus gravitatis mobilitas quàm facillimè percipiatur, ſuffecerit id in recta linea oſtendiſſe, hoc pacto:



Eſto recta illa A B, diviſa in partes aliquot æquales, utputa ſex AK, KL, LM, MN, NO, & OB; ſupponanturque C, D, E, F, G, H, & I ſeptem ſphærulæ æquales, in recta versùs Terræ centrum P eâdem vi tendentes, queque eodem temporis momento ipſi AB occurrant in A, K, L, M, N, O, & B. Quo poſito, manifeſtum eſt, rectâ AB immotâ exiſtente, ac ſuper MP cum ejus medio M quieſcente, angulis AMP & PMB exiſtentibus rectis, quòd per hunc motum ſphærularum cauſari non poſſit, ut terminorum A, B alter altero priùs deſcendat: quandoquidem vis, quæ illud præſtaret, utrinq; omnino eadem exiſtit. Adeò ut AB eo caſu in æquilibrio permanere teneatur, punctumq; M pro illius centro gravitatis ſit habendum.

Quòd ſi verò ipſi AB alia poſitio tribuatur, ut hîc *a* M*b*, debet neceſſario pars una *a*M, quæ Terræ centro P vicinior eſt, plus ſemper ponderare quàm pars altera M*b*, quæ à centro P eſt remotior: quoniam prædicta vis hâc ratione inæqualis redditur, atque illa hoc pacto in inferiorem partem *a*M accreſcit, dum in eam non ſolùm plures ſphærulæ impingunt, ſed ipſæ etiam in angulis, ad rectos magis accedentibus, occurrunt; ac proinde in eam fortiùs agunt. Ita ut recta *a* M*b* aliam poſitionem appetere teneatur, parsque M*b* ipsâ parte *a*M major ſumenda ſit, quò ipſa in eodem ſtatu ſeu æquilibrio permaneat; ac idcirco ejus centrum gravitatis non fixum ſed mobile exiſtere. Cujus quidem ad corpora adplicatio ex ſe manifeſta eſt.



Cæterùm ſciendum, differentiam hanc, ex ingenti horum corporum à Terræ centro diſtantiâ, cum eorundem magnitudine comparatâ, eſſe planè imperceptibilem ſeu inſenſibilem; ac proinde conſiderationem hujus mutabilitatis centri in praxi nullius eſſe uſus. Quoniam, rectis CP, DP, EP, FP, GP, HP, & IP, propter immenſam hujus lineæ AB à Terrę centro P elongationem & ex illius ad hanc relatione parvitatem, parallelis exiſtentibus (quemadmodum abſq; ullo experientię detrimento, quæ hîc nullam diverſitatem agnoſcit, ſupponi poteſt) æquemultæ ſemper ſphærulæ in utramque partem ipſius AB, quamcunque illa poſitionem habuerit, impingunt; eædemque etiam, propter angulorum utrinque æqualitatem, in eam hinc inde æquè fortiter agunt. Adeò ut M punctum centrum gravitatis ipſius A B exiſtens ejuſdem quoque gravitatis centrum in omni alia ejus poſitione exiſtat, ipſaque poſitionem omnem, quam quis ei dederit, retineat. Indicans quo ſenſu gravitatis centrum in magnitudinibus immobile ſeu fixum ſit intelligendum non ſecus ac illud Sectione 19 à nobis cum aliis fuit acceptum.

AD

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

AD LECTOREM.

POſtquam finem exercitationibus hiſce imponere decreveram, diverſa mihi alia, Amice Lector, jucundiſſimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta ſupereſſe deprehendi, quæ, ſi pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hiſce adjunxiſſem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè ſtudiis adjumenti commodiqúe attuliſſent; ſed tam labor quam opus in immenſum accreviſſet. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & ſublimiores quædam Propoſitiones, partim ab Antiquis, partim à præſtantiſſimis hujus ſæculi Mathematicis ingenioſiſſimè inventæ, ab ipſis inveſtigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præſidio inveniri poſſint, oſtenderim: haud alienum ab inſtituto judicavi, ſi, ad uberiorem hujus artis uſum, ea, quæ Nobiliſſimus atque Clariſſimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihiqúe conſcripta communicavit, hîc unà cum ipſius literis, reliquorum, quæ mihi ſuperſunt, loco, adjicerem.

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & ſubtiliora & à vulgo remotiora eſſe invenies; præſertim cum ad horum inveſtigationem eâdem mecum Analyſi, cujus olim fundamenta à me edoctus eſt, utatur; atque ita ejus ſtudioſis viam ad conſimiles quæſtiones reſolvendas aperiat. In quibus ſi cum reliquis noſtris laboribus amplam tibi ſatis, Benevole Lector, in hoc ſtudiorum genere exercitationis anſam præbuiſſe videar; animum exinde meum tui ſtudioſiſſimum (ut ſpero) agnoſces, ac noſtram proinde operam in tui & Reïpublicæ Literariæ bonum ſuſceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

CHRI-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clariſſimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

CVm in editione elegantiſſimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clariſſime, id inter cætera te ſpectare ſciam, ut varietate rerum, quarum tractationem inſtituiſti, oſtendas quàm latè ſe protendat divina Analytices ſcientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm propoſito tuo inſervire poſſe, quæ de aleæ ratiociniis conſcripſimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi poſſe videbantur, quæ fortuita ſunt atque incerta, tantò admirabilior ars cenſebitur, cui iſta quoque ſubjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda ſuſceperim, túque digna exiſtimes, quæ ſimul cum ſubtiliſſimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea eſſe exiſtimem hâc potiſſimùm ratione ipſa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocaſſe videri alioqui poſſem, non tamen prorſus utilitatis expers ac nullius pretii cenſebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec ſine multo labore è vernacula lingua noſtra in Latinam converteris. Quanquam, ſi quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus ſit rem non ut videtur ludicram agi, ſed pulchræ ſubtiliſſimæqúe contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis viſum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, ſicut illa, in nuda numerorum conſideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præſtantiſſimos totâ Galliâ Geometras

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibuſque quæſtionibus ſe invicem exercere ſoliti, methodum ſuam quiſque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis univerſam hanc materiam evolvere mihi neceſſe fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in reſolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire ſæpenumero expertus ſum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidiſſe me invenies, omiſſa tamen analyſi, cum quòd prolixam nimis operam poſcebant, ſi perſpicuè omnia exequi voluiſſem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi noſtrorum, ſi qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid

quid

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

quid obtinendum, quantum ſi habeat, poſſit denuo ad ſimilem ſortem ſive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, ſi quis me inſcio alterâ manu 3 ſolidos occultet, alterâ 7 ſolidos, mihique optionem det ex utra manu ſolidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac ſi 5 ſolidi mihi dentur. Quoniam quinque ſolidos habens, denuo eò pervenire poſſum, ut æquam expectationem nanciſcar ad 3 vel 7 ſolidos obtinendos: idque æquo luſu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere poſſit, expectatio mea dicenda eſt valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non ſolùm demonſtrandam, verùm etiam primitùs eruendam poſito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rurſus ad ſimilem ſortem pervenire poſſe, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque luſus eſſe talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quiſque deponat x, ac ut victor victo traditurus ſit a. Hic autem luſus juſtus eſt, & patet me hâc ratione æquam habere ſortem ad obtinendum a, ſi luſum perdam ſcilicet; aut $2x - a$, ſi vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depoſitum eſt, de quo alteri erogandum eſt a. Quòd ſi autem $2x - a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi ſors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x - a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonſtratio facilis eſt. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ poſſum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo ſit traditurus a. Quâ ratione ſimilis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, ſi perdam, aut ad obtinendum b, ſi vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depoſitum eſt, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua ſors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propoſitionem valet 5; & certum eſt me 5 habentem rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille ſimiliter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri ſit daturus 3: erit hic luſus omnino juſtus, & pater

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

tet mihi æquam obtingere ſortem ad obtinendum 3, ſi perdam, aut 7, ſi vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere poſſit, expectatio mea æſtimanda eſt $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rurſus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe juſto luſu. Ponatur luſus eſſe talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quiſque noſtrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, ſi ipſe victor evadat, mihi ſit daturus b, & ego ipſi traditurus ſim b, ſi idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus ſit c, aut ego ipſi ſim daturus c, ſi ego vincam. Et patet hunc ludum juſtum eſſe. Æquam autem hâc ratione ſortem habebo ad obtinendum b, ſi nimirum primus vincat, aut c, ſi ſecundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ ſi ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depoſitum eſt, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd ſi $3x-b-c$ æquale fuerit ipſi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, ſi ad a, b, c, aut d æqua ſors mihi obtingat, id tanti valoris eſſe, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

Si numerus caſuum, quibus mihi eveniet a, ſit p, numerus autem caſuum quibus mihi eveniet b ſit q, ſumendo omnes caſus æquè in proclivi eſſe: expectatio mea valebit $\frac{pa+bq}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rurſus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire poſſe, ut ante, juſto luſu. Ad hoc autem tot colluſores ſumam, ut unà mecum numerum ipſius $p+q$ efficiant, quorum

 deponat

deponat quiſque x, ita ut depoſitum ſit $px+qx$, & quiſque ſibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hiſce colluſoribus, quot indicat numerus q, ſigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi ſit daturus b, aut ego contra ipſi idem b, ſi vincam. Similiter cum reliquis colluſoribus, conſtituentibus $p-1$ ſigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus a, & ego tantundem (a ſcilicet) ipſi, ſi ego vincam. Et patet hunc luſum hâc conditione juſtum eſſe, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p-1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depoſitum eſt, de quo tradere debeo b unicuique q luſorum, & a unicuique $p-1$ luſorum, quæ ſimul conficiunt $ab+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æquale eſſet ipſi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & ſic ad priorem meam exſpectationem rurſus perveniſſem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio poſitum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile eſt oſtendere, me, ſi 11 habeam, rurſus ad eandem expectationem pervenire poſſe. Ludens enim contra 4 alios, & quiſque noſtrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis ſigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi ſit daturus 8, aut ego ipſi idem 8, ſi vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quiſque, qui ludum vincit, mihi ſit daturus 13, aut ego ipſi tantundem, ſi ego vincam. Qui quidem luſus juſtus eſt. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum ſi alteruter eorum, qui mihi 8 promiſerunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum ſi alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut ſi ipſe ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depoſitum, id eſt, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PRO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propoſitam quæſtionem veniamus, nimirum, de facienda diſtributione inter diverſos colluſores, quando eorum ſortes inæquales ſunt, opùs eſt ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depoſitum eſt, lucretur, & me jam bis viciſſe, alterum verò ſemel. Scire cupio, ſi luſum proſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerū impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquàm alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hîc facere diſtributionem.

Advertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, a; quòd ſi autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1^{mam} Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4^{or} luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

Propositio VI.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.

Fiet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1^{mam} Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

Propositio VII.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1^{mam} Propoſitionem. Unde patet, eum meliorem habere ſortem, qui duos luſus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim poſteriori caſu, nimirum ipſius 1 ad 2, portio mea, per 4^{tam} Propoſitionem, eſt $\frac{3}{4}a$, quæ minor eſt quàm $\frac{13}{16}a$.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres eſſe colluſores, quorum primo ut & ſecundo unus luſus deficiat, ſed tertio duo luſus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rurſus advertendum eſt, quid ipſi deberetur, ſi vel ipſe vel alter reliquorum duorum primum luſum vinceret. Si ipſe vinceret, haberet depoſitum, id quod ſit *a*. Quòd ſi ſecundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam ſecundus ſic luſui finem impoſuiſſet. At ſi tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret luſus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et ſit primo una expectatio ad *a*, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere poteſt cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipſi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propoſitionem. Et fit, ſimiliter ſecundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars ſeparatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot colluſorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores luſus deficiunt, cujuſque pars inveniatur, conſiderandum eſt, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, ſi vel ipſe, vel quiſlibet reliquorum primum ſequentem ludum vinceret. Horum autem partes ſi in unam ſummam colligantur, & aggregatum per numerum colluſorum dividatur, quotiens oſtendet unius quæſitam partem.

Ponamus tres eſſe colluſores A, B, & C, & ipſi A unum ludum deficere, ipſi B duos luſus, & ipſi C ſimiliter duos luſus. Invenire oportet, quid ipſi B, ejus quod depoſitum eſt, debeatur. Id quod vocetur *q*.

Primò examinandum eſt, quid ipſi B deberetur, ſi vel ipſe, vel A, vel C primum ſequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem impoſuiſſet, ac per conſequens ipſi B deberetur o. Si ipſe B vinceret, deficeret illi adhuc unus luſus, & ipſi A unus luſus, at ipſi C duo luſus. Quocirca ipſi B hoc in caſu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propoſitionem.

Denique ſi C primum ſequentem ludum vinceret, tunc ipſis A & C ſin-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

C ſingulis unus deficeret luſus , ſed ipſi B duo luſus, ac per conſequens ipſi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propoſitionem 8vam. Nunc autem in unam ſummam colligendum eſt, id quod in tribus hiſce caſibus ipſi B deberetur : nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum ſumma eſt $\frac{5}{9}q$. Quod ipſum diviſum per 3, numerum colluſorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipſius B quæſita pars eſt. Demonſtratio autem hujus patet ex 2da Propoſitione. Quoniam enim B æquam habet ſortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propoſitionem tantundem ac $\frac{c + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3}$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1 , 2 , 3 , quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1 , 2 , 2 , quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1 , 1 , 3; qui ſimiliter per 8vam Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos ſenarios duabus teſſeris, aut tres ſenarios tribus teſſeris jacere ſit tentandum. Et plures aliæ hujuſmodi quæſtiones.

Ad quas ſolvendas advertendum eſt. Primò unius teſſeræ ſex eſſe jactus diverſos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim teſſeram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum teſſerarum 36 eſſe diverſos jactus, quorum ſimiliter quivis æquè facilè obtingere poteſt. Nam ratione cujuſque jactus unius teſſeræ poteſt unus ſex jactuum alterius teſſeræ ſimul contingere. Et ſexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium teſſerarum eſſe 216 jactus diverſos. Nam ratione cujuſque 36 jactuum duarum teſſerarum poteſt unus ſex jactuum, qui in 3^{tia} ſunt, evenire. Et ſexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor teſſerarum jactus eſſe ſexies 216, id eſt, 1296; atque ſic ulteriùs jactus quotlibet teſſerarum ſupputari poſſe, ſumendo ſemper pro acceſſione unius teſſeræ ſexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum teſſerarum unum duntaxat eſſe jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim teſſeras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri poſſe. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B ſex, vel in A ſex & in B quinque puncta patêre poſſe. Quatuor punctorum tres ſunt jactus, videlicet, ipſius A 1 & B 3 puncta; vel ipſius A 3 & B 1 punctum; vel ipſius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum ſimiliter tres ſunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4^{or} ſunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5^{que} ſunt jactus.

Septem punctorum 6 ſunt jactus.

In tribus teſſeris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Propositio X.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut unâ teſſerâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice ſenarium jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depoſitum eſt; quinque verò eſſe caſus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipſum, & tantùm unus pro ipſo. Quod autem depoſitum eſt vocetur *a*. Eſt itaque ipſi unica expectatio ad obtinendum *a*, ſed quinque ad obtinendum o; id quod per 2^{dam} Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipſi hunc caſum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere poſſit, qui primâ vice ſuſcipere velit.

Qui duabus vicibus ſemel ſenarium jacere certet, ſors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet *a*. Si diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm caſus eſt, & quinque caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi *a*; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2^{dam} Propoſitionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti luſori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut ſors utriuſque ſive æſtimatio expectationis eam ſervet rationem, quam 11 ad 25; id eſt minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo ſubducitur, quòd ſors ejus, qui tribus vicibus ſemel ſenarium jacere ſuſcipit, ſit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere poſſit; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere poſſit; id eſt, plùs quàm 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{4651}{7776}a$, & poteſt 4651 contra 3125 deponere; id eſt, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inveniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

Pro-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Propositio XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum *a*; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2^{dam} Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit *a*; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantùm eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi *a*, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2^{dam} Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4^{or} vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet *a*; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent *a*, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2^{dam} Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.

Hoc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante oſtenſa ſunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem valere dictum eſt ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu exiſtente ſenario, opùs eſt ut ex duobus jactibus non niſi ſemel ſenarium jaciat. Quod per 10 Propoſitionem tantundem valet ac ſi $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum eſt ipſum unum habere caſum, quo primâ vice ſenarium jaciat, & quinque caſus quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio unum caſum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 caſus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ ſeu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto aſſumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ teſſerâ, aut 10 teſſeris primo jactu ſuſcipi poſſe, ut duo ſenarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus teſſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus teſſeris proveniunt, 6 jactus exiſtunt ſeptem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, reſtant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare poſſunt; id quod ſi fiat, cuique noſtrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus, quibus vincam, id eſt, ut a habeam; & 3 caſus, quibus diverſum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propoſitionem tantundem eſt ac ſi tali caſu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 caſus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propoſitionem, tantundem eſt ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PRO-

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Propositio XIV.

Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille verò quàm primùm ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.

Ponatur, ſortem meam valere x, & id quod depoſitum eſt vocari a; eritque ſors alterius $\infty\, a-x$. Et patet, quandocunque ipſius vices jaciendi revertuntur, ſortem meam tum rurſus debere eſſe $\infty\, x$. At quandocunque meæ vices ſunt ut jaciam, ſors mea pluris æſtimanda eſt. Ponatur itaque pro ejus valore y. Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 teſſeris, qui colluſori meo ſenarium dare luſuſque victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, quibus diverſum eveniat, id eſt, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priuſquam jacit, 5 caſus ad obtinendum 0, & 31 caſus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{31y}{36}$. Poſuimus autem caſum meum à principio eſſe $\infty\, x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} \infty\, x$, adeoque $y \infty \frac{36x}{31}$. Deinde poſitum fuit, vicibus meis venientibus, ſortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 caſus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 caſus, quibus vices colluſoris mei revertuntur, id eſt, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum ſit $\infty\, y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} \infty\, y$, $\frac{30x + 6a}{36} \infty \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x \infty \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco ſubjungantur ſequentia Problemata.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituet; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſus A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276. *Probl. 1.*

Probl. 2. Tres colluſores A, B & C aſſumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri exiſtunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipſorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio ſit penes A, ſecunda penes B, & tertia penes C, & tum ſequens rurſus penes A, atque ſic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura ſit ratio illorum ſortium?

Probl. 3. A certat cum B quòd ipſe ex 40 chartis luſoriis, id eſt, 10 cujuſque ſpeciei, 4 chartas extracturus ſit; ita ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

Probl. 4. Aſſumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B.

Probl. 5. A & B aſſumentes ſinguli 12 nummos ludunt tribus teſſeris hâc conditione: ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Errata quæ irrepsêre Benevolus Lector ſic corrigat.

Pag. 10. lin. 11 omiſſa ſunt hæc verba : *& triplo plures aurei quàm ſolidi.* P. 13. l. penult. lege *& 6 poma.* P. 16 in fine Prop. 26 lege 75 2^{dæ} *molæ*, & ſupra hoſce numeros ſcribe *modii*. Pag. 25 in margine lege *ad 22 Prop.* P. 26 in fine Prop. 39 lege *C.* 3520. P. 34 ad ſiniſtram in margine lege *flor.* 17017016 (3). P. 45 & 46 in 2 fig. loco ſuperioris literæ D ſcribe B. P. 50. l. 12 lege *& ED, DF.* P. 52. l. 3 lege *ſub AC, AB.* P. 53. l. 13 lege *& FE.* ibid. loco literæ E, quæ prope I reperitur, ſcribe F. ibid. l. 14 lege *AGB* &c. P. 55. l. 4 lege *CK*; 26 (1). P. 74. l. 11 lege *Prop.* 11ma. P. 79. l. 4 lege *Vnde LB erit* 16. P. 100. l. 9 lege ABD 27. P. 108 in ſiniſtra duarum ſuperiorum figurarum literæ M & N ſunt una in alterius locum collocandæ. P. 145 tolle ſuperiùs *Simplicium Problematum.* P. 151. l. 3 lege *quàm eſt Crux.* P. 153. l. 7 lege *versùs D.* P. 200. l. ult. ſcribe in margine 3. Pag. 204. l. 1. Pag. 206. l. 9. Pag. 208. l. penult. P. 211. l. 1. Pag. 213. l. 6. Pag. 215. l. ult. Pag. 218. l. 1. Pag. 220. l. 17. & Pag. 314. l. 14 lege *in rectam lineam.* Pag. 204. l. 9. Pag. 207. l. 1. Pag. 209. l. 13. Pag. 211. l. antep. Pag. 214. l. 1. Pag. 216. l. 13. Pag. 218. l. penult. Pag. 221. l. 5 *lege in circuli circumferentiam.* P. 208. l. 3 lege *ſunt.* P. 213. in fig. ad dextram loco ſuperioris literæ C ſcribe G. P. 220. l. penult. pro BD ſcribe BG. Pag. 221 in fig. inferiori, quæ eſt ad ſiniſtram, omiſſa eſt lit. I. P. 227. l. 6 lege *Prop.* 33. P. 228. l. penult. lege *in circumferentiam.* P. 245. l. 18 lege *inventum.* P. 265. l. 11 lege *datam AB.* P. 295. l. 27 lege *deſcriptio.* P. 300. l. 30 lege *in lapideis.* ib. l. antep. lege, *requiſitis.* P. 313. l. ult. dele *m.* P. 316. l. 25 lege *ſecans EM.* P. 404. l. 5 lege *Sectione* 25. P. 479. infra lin. 25 lege $\frac{2g4c}{a}$, & dele lineam ſubductam. P. 488 in fine lege ⊐ BHC.

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16

Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of Koninklijke Bibliotheek, Den Haag.
232 L 16